

Б. Б. Буховцев

В. Д. Кривченко

Г. Я. Мякишев

И. М. Сареева

Сборник

задач

по элементарной

физике

Издательство «Наука» Москва

B. B. Bukhovtsev

V. D. Krivtchenkov

G. Ya. Miakishev

I. M. Saraeva

Problemas seleccionados de Física Elementar

Editora Mir - Moscou

Impresso na URSS

Traduzido do russo por Marcel Tabak,
mestre em ciências físico-matemáticas pela
Universidade M. Lomonosssov de Moscú

Primeira edição 1977

Segunda edição 1985

На португальском языке

© Tradução para o português. Editora Mir. 1977

Índice

Prefácio		7
	Pre- ble- mas	Soluções e respostas
<i>Capítulo I. Mecânica</i>	8	209
§ 1. Cinemática do movimento retilíneo e uni- forme	9	209
§ 2. Cinemática do movimento retilíneo não uniforme e uniformemente variado	13	218
§ 3. Cinemática do movimento curvilíneo	17	224
§ 4. Dinâmica do movimento retilíneo	26	243
§ 5. Lei de conservação da quantidade de movimento	36	257
§ 6. Estática	39	262
§ 7. Trabalho e energia	48	277
§ 8. Dinâmica do movimento curvilíneo	50	291
§ 9. Lei da gravitação universal	68	310
§ 10. Hidro e aerostática	70	315
§ 11. Hidro e aerodinâmica	81	325
<i>Capítulo II. Calor. Física molecular</i>	88	333
§ 12. Dilatação térmica dos corpos sólidos e líquidos	88	333
§ 13. Lei de conservação de energia. Condu- tibilidade térmica	89	336
§ 14. Propriedades dos gases	93	338
§ 15. Propriedades dos líquidos	99	348
§ 16. Transformações mútuas de corpos sól- dos e líquidos	104	354
§ 17. Elasticidade e solidez	105	355
§ 18. Propriedades dos vapores	108	357

	Pro- ble- mas	Soluções e respostas
<i>Capítulo III. Eletricidade e magnetismo</i>	112	360
§ 19. Eletrostática	112	360
§ 20. Corrente elétrica contínua	125	385
§ 21. Corrente elétrica nos gases e no vácuo	138	407
§ 22. O campo magnético da corrente. Ação do campo magnético na corrente e nas cargas em movimento	143	414
§ 23. Indução eletromagnética. Corrente al- ternada	149	421
§ 24. Máquinas elétricas	160	436
 <i>Capítulo IV. Oscilações e ondas</i>	 164	 442
§ 25. Oscilações mecânicas	164	442
§ 26. Oscilações elétricas	171	452
§ 27. Ondas	173	455
 <i>Capítulo V. Ótica geométrica</i>	 176	 460
§ 28. Fotometria	176	460
§ 29. Leis fundamentais da ótica	177	462
§ 30. Lentes e espelhos esféricos	184	476
§ 31. Sistemas e aparelhos óticos	189	484
 <i>Capítulo VI. Ótica física</i>	 197	 505
§ 32. Interferência da luz	197	505
§ 33. Difração da luz	203	513
§ 34. Dispersão da luz e cores dos corpos	206	518

Prefácio

A presente coletânea de problemas de física foi confeccionada em base à matéria explicada no «Curso de Física Elementar», redigido pelo acadêmico G. Landsberg. Por isso, o seu conteúdo, o nível dos problemas e o caráter da distribuição da matéria correspondem, fundamentalmente, ao curso indicado. O capítulo de Física Atômica não foi incluído devido a que os problemas propostos no próprio curso, referido acima, ilustram de forma suficiente a matéria explicada. Problemas referentes a esse tema figuram noutros capítulos.

Prestou-se considerável atenção a problemas de maior complexidade, que requerem a compreensão profunda das leis físicas básicas e a capacidade de utilizá-las em diferentes condições. Todos os problemas difíceis contêm uma solução detalhada. Além disso para desenvolver o hábito de solucionar corretamente os problemas físicos, alguns problemas simples também contêm a sua solução.

Parte dos problemas da coletânea foram propostos em concursos entre pré-universitários, realizados na faculdade de física da Universidade M. Lomonossov de Moscou e posteriormente elaborados. Incluiu-se também certa quantidade de problemas do curso superior. A maioria dos problemas é original.

Os autores

PROBLEMAS

Capítulo 1

Mecânica

§ 1. CINEMÁTICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO E UNIFORME

1. Um barco a motor, que ia subindo um rio, encontrou uma balsa que se movia no sentido da corrente. Decorrida uma hora do encontro o motor do barco parou. O concerto do motor durou 30 minutos e durante esse tempo o barco moveu-se livremente no sentido da corrente. Depois do concerto o barco começou a mover-se na direção da corrente, com a mesma velocidade relativa à água e alcançou a balsa a uma distância $S = 7,5$ km, em relação ao primeiro encontro. Determinar a velocidade da corrente, considerando-a constante.
2. De Moscou a Pushkino com um intervalo $t = 10$ min saíram dois trens elétricos com velocidades $v = 30$ km/h. Com que velocidade u movia-se um trem em direção a Moscou, uma vez que encontrou os trens elétricos a um intervalo $\tau = 4$ min, um depois do outro?
3. Um engenheiro trabalha numa fábrica, que fica nos arredores da cidade. Diariamente ao chegar à última estação ferroviária, um carro da fábrica transporta-o para o local de trabalho. Certa vez, o engenheiro chegou à estação uma hora antes do habitual e sem esperar o carro foi a pé até o local de trabalho. No caminho encontrou-se com o carro e chegou à fábrica 10 min

antes do habitual. Quanto tempo caminhou o engenheiro antes de encontrar-se com o carro? Resolver o problema graficamente.

4. Três turistas, que possuem uma bicicleta, devem chegar ao centro turístico no menor espaço de tempo (o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar apenas duas pessoas e por isso o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontrar a velocidade média dos turistas, sendo a velocidade do que vai a pé $v_1 = 4$ km/h e a do ciclista $v_2 = 20$ km/h.
5. O correio entre dois pontos de embarque M e K é feito por duas lanchas. Em um tempo estabelecido, as lanchas saem de seus pontos de embarque, se encontram, trocam a correspondência e voltam. Se as duas lanchas saem de seus pontos de embarque simultaneamente, a lancha que sai do ponto M gasta no caminho em ambas as direções 3 horas, e a que sai do ponto K gasta 1,5 h. A velocidade de ambas as lanchas relativa à água é igual. Determinar graficamente, com que atraso deve sair a lancha do ponto M , em relação a que sai do ponto K , para que ambas as lanchas percorram o trajeto num mesmo tempo.
6. Utilizando as condições do problema anterior, determine: a velocidade dos barcos relativa à água, a velocidade da corrente e o ponto de encontro dos barcos no caso em que eles saiam de seus pontos de embarque simultaneamente. A distância entre os pontos de embarque é de 30 km.
7. Do ancoradouro C ao T com velocidade $v_1 = 3$ km/h, relativa à água, move-se um barco de carga. Do ancoradouro T ao C simultaneamente com o barco de carga sai uma lancha, cuja velocidade relativa à água é $v_2 = 10$ km/h. Durante o tempo do movimento do barco de carga entre os ancoradouros, a lancha percorre essa distância quatro vezes e chega ao ancoradouro T junto com o barco de carga. Determinar a direção da corrente do rio.
8. Um homem, movendo-se com uma velocidade constante v , passa sob uma lanterna, que está colocada a uma altura H . Encontrar a direção e a grandeza da veloci-

dade de movimento, sobre a terra, do extremo da sombra da cabeça do homem, sendo sua altura h .

9. Em um momento inicial duas velas eram iguais e tinham altura h , encontrando-se a uma distância a . A distância entre cada uma das velas e a parede mais próxima é também igual a a (fig. 1). Com que velocidade movem-se as sombras das velas nas paredes, se uma vela queima durante o tempo t_1 e a outra durante t_2 ?

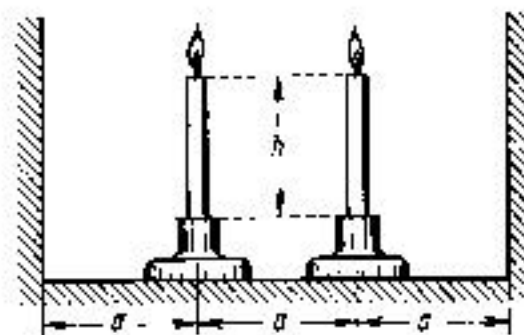


Fig. 1

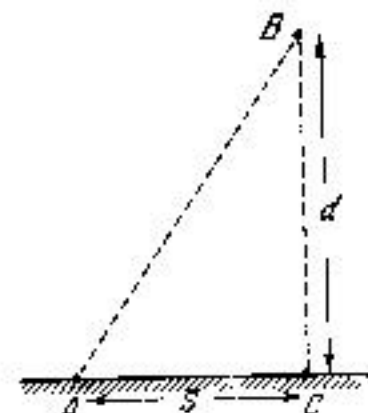


Fig. 2

10. Um homem encontra-se na margem de um lago no ponto A . Ele deve chegar no período mais curto ao ponto B , que se encontra no lago (fig. 2). A distância do ponto B à margem é $BC = d$ e a distância $AC = S$. A velocidade de movimento do homem na água é v_1 , e na margem v_2 ($v_2 > v_1$). De que modo deve mover-se o homem: nadar do ponto A pela reta AB , ou correr na margem certa distância e depois nadar em direção ao ponto B ?
11. Um ônibus move-se numa estrada com velocidade $v_1 = 16$ m por segundo. Um homem encontra-se a uma distância $a = 60$ m da estrada e $b = 400$ m do ônibus. Em que direção deve correr o homem para chegar a algum ponto da estrada simultaneamente com o ônibus ou antes dele? O homem pode correr com uma velocidade $v_2 = 4$ m por segundo.
12. Qual é a mínima velocidade que deve ter o homem (ver o problema 11) para alcançar o ônibus? Em que direção deve correr o homem nesse caso?

13. Num momento dado (ver o problema 11) o ônibus encontra-se no ponto A e move-se pelo caminho reto AE . Encontrar o lugar geométrico dos pontos, onde pode-se encontrar neste momento o homem, para que alcance o ônibus.
14. Um homem em uma lancha deve sair do ponto A ao ponto B , que se encontra na margem oposta do rio (fig. 3). A distância BC é igual a a . A largura do

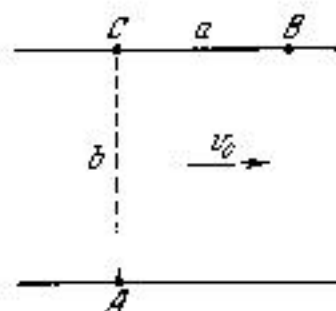


Fig. 3

- rio AC é igual a b . Com que velocidade mínima u , relativa à água, deve mover-se a lancha para chegar ao ponto B ? A velocidade da corrente é v_0 .
15. Do ponto A , situado na margem de um rio, é preciso chegar ao ponto B , movendo-se pela reta AB (fig. 4). A largura do rio AC é igual a 1 km, a distância BC é igual a 2 km, a velocidade máxima da lancha relativa à água é $u = 5$ km/h e a velocidade da corrente do rio é $v = 2$ km/h. É possível percorrer a distância AB em 30 minutos?

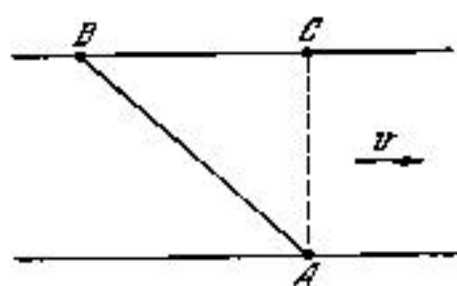


Fig. 4

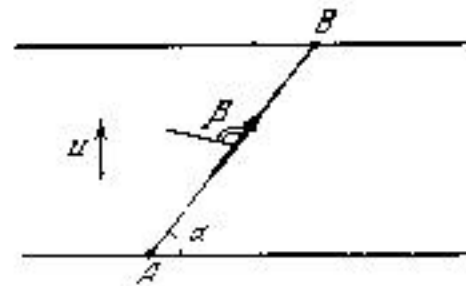


Fig. 5

16. Em um rio, do ponto A ao ponto B , os quais encontram-se em margens opostas, pela reta AB que forma um ângulo α com a linha da margem, move-se uma lancha (fig. 5). O vento sopra com uma velocidade u em

direção perpendicular à margem. A bandeira no mastro da lancha forma um ângulo β com a direção de movimento da mesma. Determinar a velocidade da lancha, relativa à margem. É possível com os dados do problema determinar a velocidade da corrente?

17. Dois carros movem-se com velocidades constantes v_1 e v_2 em estradas que se cruzam num ângulo α . Determinar a grandeza e a direção da velocidade de um carro em relação ao outro. Depois do encontro dos carros na intersecção das estradas, que tempo é necessário esperar, para que a distância entre eles seja S ?
18. Os automóveis (ver o problema 17) não se encontraram no cruzamento e ademais o segundo carro passou pelo cruzamento num tempo τ depois do primeiro. Qual foi a distância mínima entre os automóveis?
19. Duas retas interceptas movem-se, uniformemente, em direções opostas com velocidades v_1 e v_2 , perpendiculares às retas correspondentes. O ângulo entre as retas é igual a α . Determinar a velocidade do ponto de intersecção dessas retas.

§ 2. CINEMATICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO NÃO UNIFORME E UNIFORMEMENTE VARIADO

20. Determinar a velocidade média e a aceleração média de um ponto em 5 e 10 segundos, sendo seu movimento dado pelo gráfico da velocidade (fig. 6).

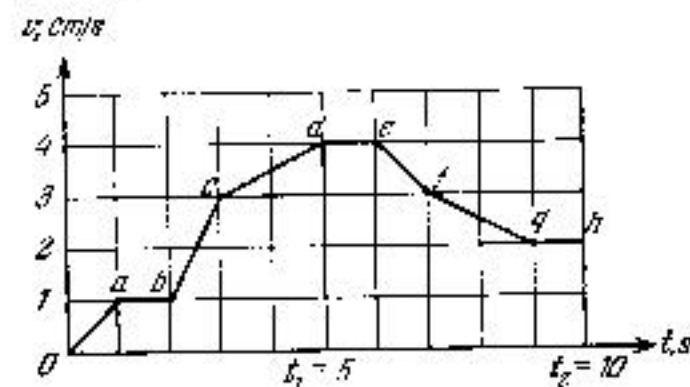


Fig. 6

21. Um homem, que se encontra na margem inclinada de um lago, puxa por uma corda um barco que se

encontra na água. A velocidade com a qual o homem puxa a corda é constante e igual a v . Que velocidade terá o barco no momento, em que o ângulo entre a corda e a superfície da água será igual a α ?

22. Uma fonte de luz pontual S encontra-se a uma distância l de uma tela vertical AB . Da fonte à tela pela reta SA move-se progressivamente, com uma velocidade constante v , um objeto opaco de altura h . Deter-

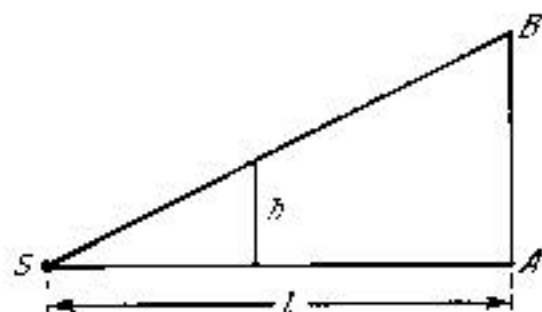


Fig. 7

mine a velocidade instantânea de deslocamento do extremo superior da sombra do objeto na tela (fig. 7).

23. A coordenada de um ponto que se move em linha reta na direção do eixo x , varia com o tempo segundo a lei $x = 11 + 35t + 41t^2$ (x é dado em cm e t , em segundos). Determinar a velocidade e a aceleração do ponto.
24. Uma carreta, usada em demonstrações, movia-se ao longo de uma régua com aceleração constante. No momento em que o cronômetro mostrava $t_1 = 7$ s, a carreta encontrava-se no ponto $x_1 = 70$ cm; no momento $t_2 = 9$ s no ponto $x_2 = 80$ cm e no momento $t_3 = 15$ s no ponto $x_3 = 230$ cm. Qual é a aceleração da carreta?
25. Nas figuras 8 e 9 estão desenhados: o gráfico da velocidade de um corpo e o gráfico da variação da coordenada do corpo (parábola) em função do tempo. O início da contagem do tempo, em ambos os gráficos, coincide. São os mesmos movimentos, os que estão desenhados nesses gráficos?
26. Os pontos A e B encontram-se a uma distância de $l = 4$ km. Do ponto A em direção ao ponto B , saiu um automóvel, que durante todo o trajeto moveu-se

uniformemente. Simultaneamente, do ponto B em direção ao ponto A , saiu outro automóvel com velocidade inicial $v_0 = 32$ m/s, o qual moveu-se com aceleração constante $a = 0,2$ m/s², sendo a direção de sua velocidade o tempo todo a mesma do primeiro automóvel. Sabe-se que no caminho os automóveis duas

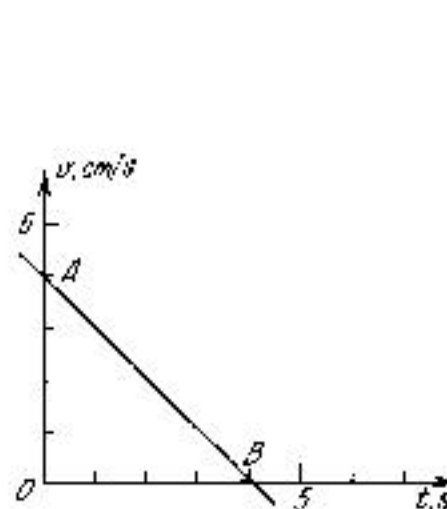


Fig. 8

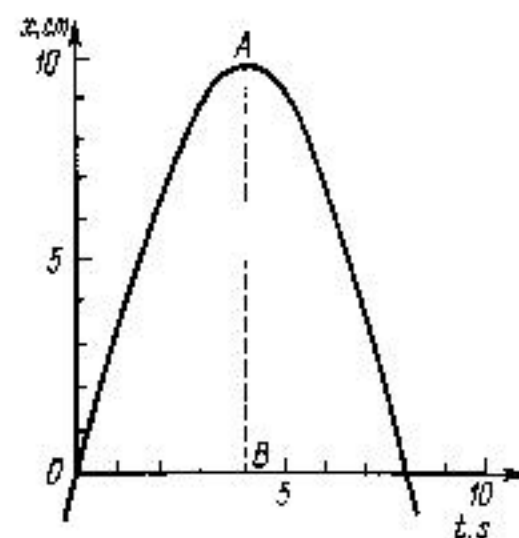


Fig. 9

vezes ultrapassaram um ao outro. Dentro de que limites encontra-se a velocidade do primeiro automóvel?

27. Uma bola cai livremente de uma altura H sobre um suporte elástico horizontal. Construir o gráfico da variação da coordenada e da velocidade da bola em função do tempo, considerando, que o tempo de choque pode ser desprezado. O choque é absolutamente elástico.
28. Em uma laje elástica caem livremente esferas de aço. A primeira cai de uma altura $h_1 = 44$ cm, a segunda, transcorridos τ s depois da primeira, de uma altura $h_2 = 11$ cm. Passado algum tempo as velocidades das esferas possuem a mesma grandeza e direção. Determinar o tempo τ e o intervalo de tempo durante o qual a velocidade de ambas as esferas é igual. As esferas não se chocam entre si.
29. Qual é o tempo necessário a um corpo, que cai livremente, sem velocidade inicial, para percorrer o n -ésimo centímetro do seu trajeto?
30. De uma torre alta lançam-se dois corpos, um após o outro, com velocidades iguais a v_0 . O primeiro corpo é lançado verticalmente para cima; decorrido

certo tempo τ o segundo corpo é lançado verticalmente para baixo. Determinar a velocidade dos corpos, um relativo ao outro, e a distância entre eles no momento $t > \tau$.

31. Três pontos A , B e C no momento inicial estão situados na mesma reta horizontal, a iguais distâncias um do outro. O ponto A começa a mover-se verticalmente para cima com velocidade constante v , e o ponto C , sem velocidade inicial, verticalmente para baixo com aceleração constante a . Como deve-se mover o ponto B na direção vertical, para que os três pontos se encontrem o tempo todo numa mesma reta? Os pontos começam a mover-se simultaneamente.
32. Um elevador move-se com aceleração a . Um passageiro, que se encontra no elevador, deixa cair um livro. Qual é a aceleração do livro em relação ao chão do elevador, se: 1) o elevador move-se para cima? 2) o elevador move-se para baixo?
33. Dois automóveis saíram um ao encontro do outro, das cidades A e B , com iguais velocidades em grandeza e com as mesmas acelerações, iguais a a . A aceleração do automóvel, que saiu de A , estava o tempo todo dirigida a A e a do automóvel, que saiu de B , dirigida a B . Com que atraso saiu um destes automóveis, se um terceiro automóvel, que se movia o tempo todo com velocidade constante v_1 , presenciou ambos os encontros dos dois primeiros automóveis?
34. Num elevador, que se move com aceleração a , de uma altura H sobre o chão, um homem deixa cair uma esfera. τ segundos depois da queda a aceleração do elevador muda de sinal e decorridos 2τ segundos torna-se igual a zero. Logo após, a esfera toca o chão. A que altura do chão do elevador a esfera elevar-se-á depois do choque? Considerar o choque absolutamente elástico.

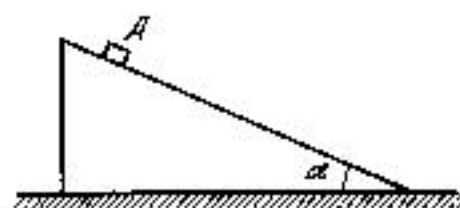


Fig. 10

35. Em uma cunha, que forma um ângulo α com o plano horizontal, colocaram o corpo A (fig. 10). Que aceleração é preciso transmitir à cunha na direção horizontal, para que o corpo A caia livremente na vertical?

§ 3. CINEMATICA DO MOVIMENTO CURVILINEO

36. Uma esfera pequena e pesada foi lançada na direção horizontal com velocidade inicial v_0 . Encontrar as acelerações normal e tangencial da esfera decorrido o tempo t depois do início do movimento.
37. Determinar a aceleração do corpo A , o qual desliza-se sem velocidade inicial pela rosca de um parafuso com passo h e raio R , no final da enésima volta (fig. 11). Despreza-se o atrito.

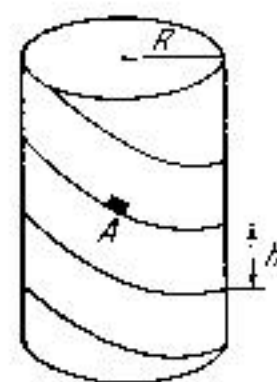


Fig. 11

38. A velocidade da corrente de um rio cresce proporcionalmente à distância da margem, atingindo seu valor máximo v_0 no meio do rio. Próximo às margens a velocidade da corrente é igual a zero. Um barco movimentar-se no rio de tal modo, que sua velocidade u em relação à água é constante e perpendicular à corrente. Determinar a distância, na qual o barco será levado pela corrente, em uma travessia, se a largura do rio é c . Determinar também a trajetória do barco.
39. Dois trilhos foram ligados formando entre si um ângulo reto. Nesses trilhos movem-se duas carrretas, ligadas por uma barra de comprimento l com articulação. A carrreta A (fig. 12) começa a mover-se do ponto de intersecção dos trilhos uniformemente para cima com

velocidade v . Determinar a lei do movimento e a velocidade da carreta B .

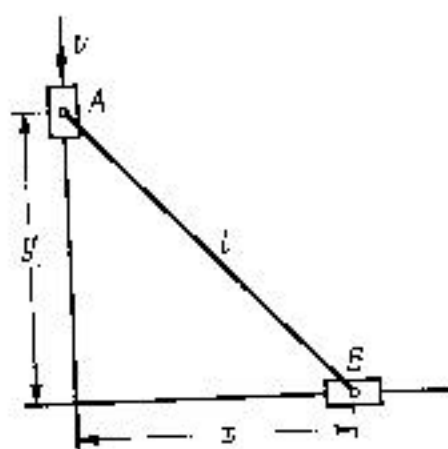


Fig. 12

40. Um corpo foi lançado com uma velocidade inicial v_0 , formando um ângulo α com a horizontal. Qual é o tempo de duração do voo? Em qual distância do local de lançamento cairá o corpo? Para qual valor do ângulo α a longitude do voo será a maior? Em qual altura estará o corpo após um intervalo de tempo τ desde o início do movimento? Quais serão a grandeza e direção da velocidade do corpo nesse instante? Considerar τ maior do que o tempo de ascensão do corpo até uma altura máxima. A resistência do ar é desprezada.
41. Determinar a trajetória do movimento de um corpo lançado com um ângulo em relação à horizontal (ver o problema 40).
42. É necessário lançar da terra uma bola por cima de uma parede vertical de altura H , que se encontra a uma distância S (fig. 13). Para qual menor velocidade

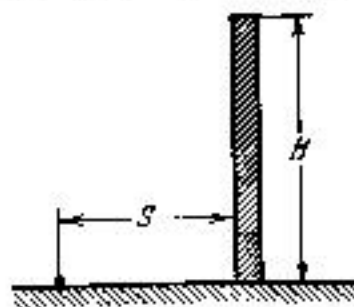


Fig. 13

inicial isso é possível? Com que ângulo α em relação à horizontal deverá, nesse caso, ser dirigida a velocidade?

43. As provas do detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H . Os estilhaços da granada, que se produzem depois da explosão e cujas velocidades não sobrepassem v_0 , não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço?
44. Um corpo foi lançado de um despenhadeiro abrupto de altura H dentro da água. A velocidade inicial do corpo, v_0 , forma um ângulo α com a horizontal. A que distância da margem cairá o corpo? Depois de quantos segundos após o início do movimento o corpo estará a uma altura h sobre a água? Qual é a velocidade do corpo no momento de queda na água?
45. Sub qual ângulo com a horizontal é necessário lançar uma pedra, da margem abrupta de um rio, a fim de que a mesma caia a uma maior distância da margem? A altura da margem é $h_0 = 20$ m e a velocidade inicial da pedra é $v_0 = 14$ m/s.
46. Com que velocidade mínima deve ser lançado um corpo de cima de uma torre de altura h , para que ele caia a uma distância S do pé da torre?
47. Um objeto lançado sob um ângulo α com a horizontal é observado numa luneta situada no lugar do lançamento. Para que ângulos α de movimento do corpo haverá momentos, quando a sua velocidade será perpendicular ao eixo da luneta?
48. Um bombardeiro de mergulho lança bombas desde uma altura H , estando a uma distância L do objetivo. A velocidade do bombardeiro é v . Sob qual ângulo em relação à horizontal o bombardeiro deve mergulhar?
49. Uma bola cai livremente desde uma altura h sobre um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal (fig. 14). Encontrar a relação das distâncias entre os pontos, nos quais salta a bola ao tocar o plano inclinado. O choque da bola com o plano é considerado absolutamente elástico.
50. Do ponto $x = y = 0$ (fig. 15) são lançados simultaneamente dois corpos com a mesma velocidade inicial v_0 e formando diferentes ângulos α_1 e α_2 com a horizontal. Qual é a velocidade de movimento dos corpos

um relativamente ao outro? Qual é a distância entre os corpos após o intervalo de tempo τ ? (Os corpos movem-se progressivamente).

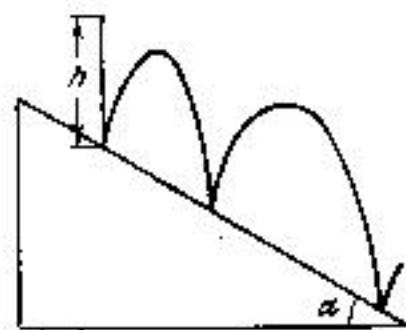


Fig. 14

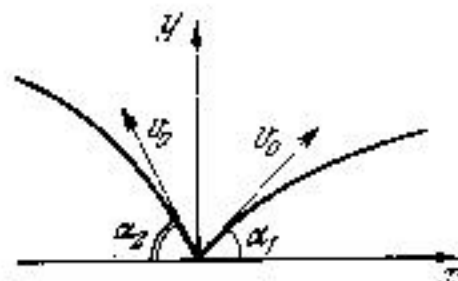


Fig. 15

51. De uma torre são lançadas pedras em todas as direções possíveis com velocidade inicial v_0 . Observou-se, que uma das pedras, ao atingir a terra através de uma trajetória mais côncava, no momento da queda tinha o vetor da velocidade formando um ângulo φ com a horizontal. Determinar a altura da torre.
52. De uma mesa de altura h é lançada uma bola elástica, à qual foi transmitida uma velocidade inicial horizontal. No momento em que a bola sofre um dos inúmeros choques elásticos com o solo, da mesma mesa, horizontalmente, é lançada uma segunda bola com uma velocidade tal que se choca com a primeira. À que altura deu-se o encontro?
53. Uma bala é disparada de um canhão com velocidade inicial v_0 . Determinar a «região de segurança», ou seja, o lugar geométrico dos pontos do espaço onde a bala não poderá cair.
54. As esteiras de um trator estão compostas de n divisões, o comprimento de cada uma é igual a a . Os raios das subrodas, sobre as quais se colocam as esteiras do trator, é R . O trator move-se com a velocidade v . Supõe-se que as esteiras do trator estão bem juntas às subrodas.
 - 1) Quantas divisões das esteiras movem-se num dado momento progressivamente, quantas estão em repouso (em relação à terra) e quantas divisões tomam parte no movimento giratório?

2) O trator percorreu um caminho $S \gg na$. Durante quanto tempo cada divisão da esteira movimentou-se progressivamente, esteve em repouso e participou no movimento giratório?

55. A fim de girar um trator, que se move com a velocidade $v_0 = 18$ km/h, um tratorista freia uma das esteiras de tal modo que o eixo da roda motriz começa a movimentar-se para frente com velocidade $v_1 = 14$ km/h. A distância entre as esteiras é $d = 1,5$ m. Qual é o raio do arco descrito pelo centro do trator?
56. Pode-se observar nas montanhas o seguinte fenômeno: uma estrela «observada a olho nú», rapidamente esconde-se atrás de um cume distante. (O mesmo fenômeno, certamente, pode-se observar em uma planície, se tivermos uma construção muito alta e suficientemente distante). Com que velocidade é necessário correr, a fim de ver a estrela durante todo o tempo em uma mesma distância angular da montanha? A distância do observador até o cume é de 10 km. A observação é feita no pólo.
57. Um disco contínuo rola sem deslizamento em um caminho horizontal com velocidade constante v (fig. 16).

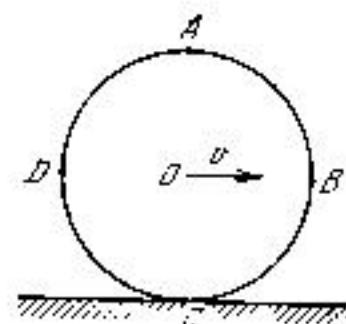


Fig. 16

- 1) Demonstrar que a velocidade linear de rotação relativamente ao centro O de qualquer ponto do disco, que se encontra na sua borda, é igual à velocidade do movimento de translação do disco.
- 2) Determinar a grandeza e a direção das velocidades dos pontos A , B , C e D situados na borda do disco, relativamente a um observador fixo.

3) Quais pontos do disco têm, relativamente a um observador fixo, a mesma grandeza absoluta de velocidade que o centro do disco?

58. Um bastonete AB de comprimento l move-se no plano do desenho (fig. 17) de tal modo que num dado intervalo de tempo a direção da velocidade do seu extremo

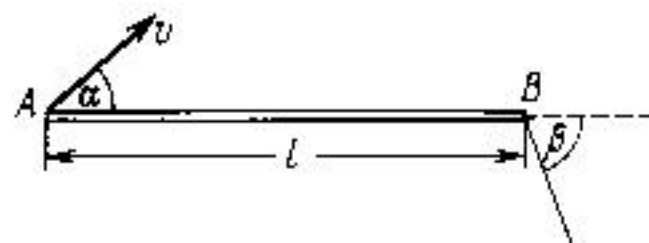


Fig. 17

A forma um ângulo α e a do extremo B , um ângulo β com o bastonete. A velocidade do extremo A é v . Determinar a velocidade do extremo B . Determinar a posição do eixo fixo, perpendicular ao plano do desenho, em relação ao qual no momento de tempo dado o bastonete gira (ou seja, determinar a posição do eixo instantâneo de rotação do bastonete).

59. Representar graficamente a distribuição das velocidades pelo comprimento do bastonete AB nas condições do problema anterior.
60. Muitas formigas carregam um pedaço de casca de árvore, que tem a forma de um triângulo equilátero. Sabe-se, que num dado intervalo de tempo a velocidade do vértice B é igual a v e tem a direção da linha AB e a velocidade do vértice C tem a direção da linha CB . Encontrar a velocidade do vértice C no momento dado.
61. Um automóvel movimenta-se atrás de um caminhão em uma estrada. Entre dois pneus traseiros do caminhão enroscou-se uma pedra. A qual distância do caminhão deverá movimentar-se o automóvel, a fim de que a pedra desprendida dos pneus do caminhão não atinja o automóvel? Os carros movimentam-se com velocidade de 50 km/h.
62. Na tela de um cinema vê-se uma carruagem em movimento. O raio das rodas dianteiras da carruagem é $r = 0,35$ m e o das rodas traseiras é $R = 1,5$ r . As rodas

dianteiras têm $N_1 = 6$ raios. A câmara cinematográfica roda a fita com uma velocidade de 24 quadros por segundo. Considerando que as rodas da carruagem giram sem deslizamento, determinar a velocidade mínima, segundo a qual temos a impressão de que as rodas dianteiras da carruagem estão em repouso na tela? Qual é o menor número de raios N_2 , que deverão ter para isso as rodas traseiras, a fim de que os mesmos também parecessem estar em repouso?

63. Para quais velocidades do movimento da carruagem que se dirige da esquerda para a direita (ver as condições do problema 62), os espectadores terão a impressão de que: 1) Os raios da roda giram em sentido anti-horário? 2) Os raios das rodas dianteiras e traseiras giram em sentidos contrários? O número dos raios das rodas dianteiras e traseiras é o mesmo e igual a 6.
64. Uma bobina, constituída de uma parte cilíndrica e de dois discos iguais e contínuos, rola sua parte cilíndrica sem deslizamento em uma barra áspera, colocada horizontalmente, com velocidade constante v (fig. 18).

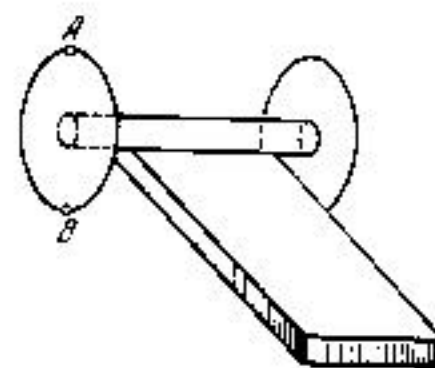


Fig. 18

O raio da parte cilíndrica é r , o dos discos é R . Que velocidade instantânea têm os pontos A e B localizados na borda de um dos discos?

65. Quais os pontos dos discos (ver o problema anterior) têm velocidade instantânea, igual em grandeza à velocidade do eixo da bobina?
66. Desenhar as trajetórias dos pontos A , B e C da bobina (fig. 19), que rola sua parte cilíndrica sem deslizamento em uma barra.

67. Um rolimã mantém o extremo do eixo de uma barra que gira com velocidade angular ω . O diâmetro do eixo da barra é d (fig. 20) e o diâmetro da abraçadeira

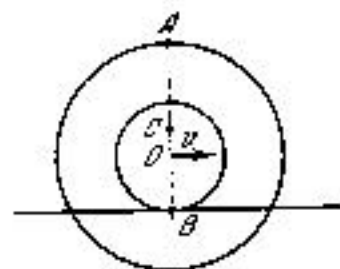


Fig. 19

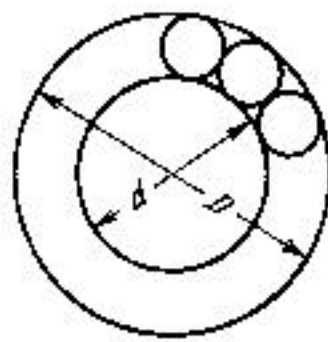


Fig. 20.

do rolimã é D . Encontrar a velocidade linear do movimento do centro de uma das esferas, se a abraçadeira estiver fixa e se a abraçadeira girar com velocidade angular Ω . Considerar, que em ambos os casos as esferas deslizam pela barra e pela abraçadeira sem escorregamento.

68. Um cone roda sem deslizamento em um plano. O eixo do cone gira com velocidade ω em redor da vertical que passa através do seu vértice. A altura do cone é h , o ângulo entre o eixo e a aresta é igual a α . Qual é a velocidade angular de rotação do cone em redor de seu eixo? Determinar a velocidade linear de um ponto arbitrário do diâmetro da base do cone, localizado em um plano vertical.
69. Na fig. 21 está representada esquematicamente a transmissão diferencial de um automóvel, a qual é utilizada,

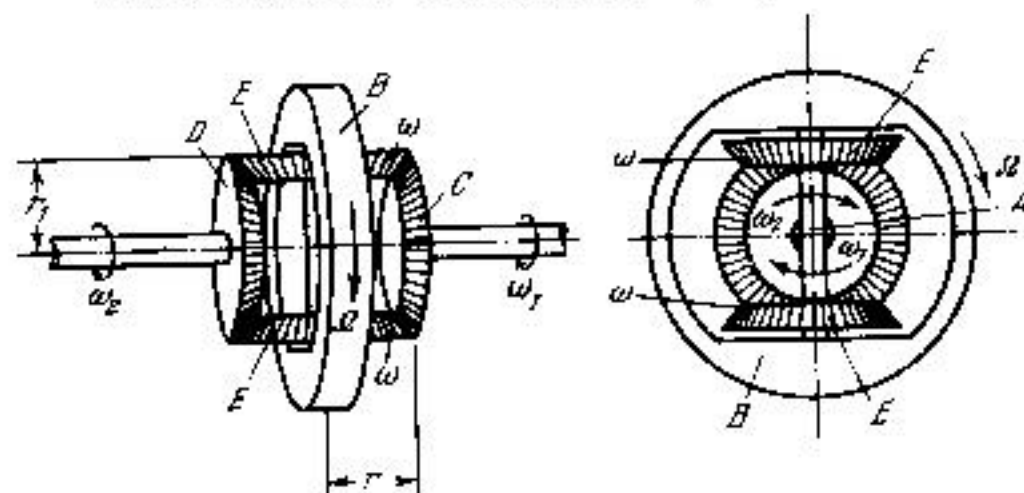


Fig. 21.

com o fim de que as rodas motrizes do automóvel não deslizem ao passar o mesmo por uma curva. (Para isto as rodas devem girar com diferentes velocidades). O motor gira a roda B , à qual está rigidamente fixo o eixo A . Em redor do eixo pode girar livremente um par de engrenagens cônicas E . Este par de engrenagens está anexado por dentes com outro par de engrenagens cônicas, pelas quais ela gira, quando gira o eixo A . O eixo das rodas motrizes do automóvel (normalmente as traseiras) é cortado ao meio e nos extremos do eixo situam-se engrenagens C e D . Estas metades do eixo podem girar com diferentes velocidades angulares, dependendo da ligação da transmissão diferencial. Encontrar a relação entre as velocidades angulares Ω , ω , ω_1 e ω_2 da transmissão diferencial, se os raios das engrenagens E são iguais a r e os raios das engrenagens D e C são iguais a r_1 .

70. Quatro tartarugas encontram-se nos cantos de um quadrado de lado a . Simultaneamente, elas começam a movimentar-se com uma velocidade constante em grandeza v , sendo que a primeira se dirige em direção à segunda, a segunda em direção à terceira, a terceira em direção à quarta e a quarta em direção à primeira. Encontrar-se-ão as tartarugas e caso encontrem-se, depois de quanto tempo isto ocorrerá?
71. De uma parte retilínea da margem ao mesmo tempo saíram dois barcos A e B , que se encontravam a uma distância inicial $a = 3$ km um do outro. O barco A dirigiu-se por uma reta perpendicular à margem. O barco B tomou um caminho constantemente dirigido ao barco A , tendo em cada momento a mesma velocidade do barco A . É evidente, que depois de um intervalo de tempo bastante grande, o segundo barco navegará atrás do primeiro, encontrando-se atrás dele a uma distância qualquer. Determinar essa distância.
72. Duas chapas de aço M e N de altura H estão em repouso na areia (fig. 22). A distância entre as chapas é $l = 20$ cm. Na chapa M movimenta-se uniformemente uma bola, cuja velocidade não se conhece exatamente. Sabe-se somente que se localiza no intervalo de 200 cm/s até 267 cm/s.
- 1) Para que altura H não se pode prever a direção da componente horizontal da velocidade da bola no

momento de sua queda na areia? (Até a queda na areia a bola choca-se no mínimo uma vez com a chapa N .)

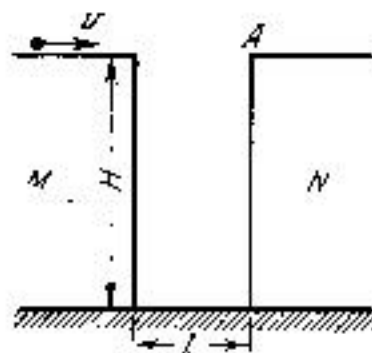


Fig. 22

2) Para qual altura mínima das chapas não se poderá produzir o local de queda da bola no segmento l ? O tempo de choque da bola com a chapa pode ser desprezado. O choque deverá ser considerado absolutamente elástico.

§ 4. DINÂMICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO

73. Um bloco homogêneo de massa M move-se aceleradamente sob a ação da força F numa superfície lisa. Encontrar o valor da força F' , com que uma parte A do bloco, de comprimento x , atua sobre a parte B do mesmo. O comprimento do bloco é l (fig. 23).

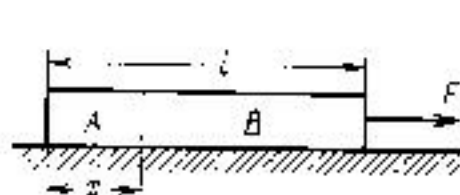


Fig. 23

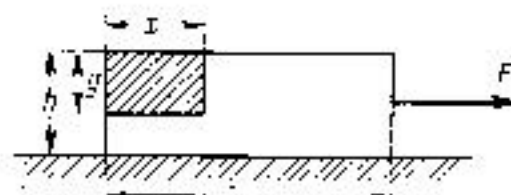


Fig. 24

74. Um bloco homogêneo move-se aceleradamente sob a ação da força F . A massa do bloco é M . Determinar as forças que atuam sobre a parte do bloco sombreada. As dimensões lineares mostram-se na fig. 24. O atrito é desprezado.
75. Uma barra homogênea de comprimento L está submetida à ação de duas forças F_1 e F_2 aplicadas aos seus

extremos e dirigidas em sentidos opostos (fig. 25). Com que força F é estendida a barra na seção que se encontra a uma distância l de um dos extremos?

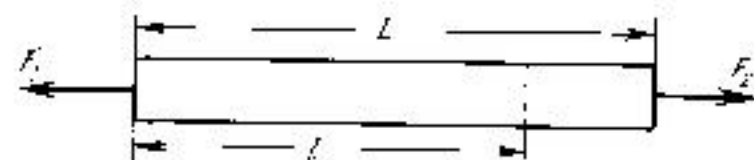


Fig. 25

76. Um bloco de massa m está no chão de um elevador. O elevador move-se com aceleração a para baixo. Determinar a força, com que o bloco atua sobre o chão de elevador. Para qual aceleração do elevador as deformações do bloco desaparecem? Com que força o bloco atua sobre o chão do elevador, se o mesmo começa a mover-se com aceleração a para cima?
77. Um menino de massa M corre em direção à parte superior de uma tábua imóvel de massa m , que se encontra num plano inclinado com ângulo de base α . O atrito entre a tábua e o plano é desprezível. Que caminho percorreu o menino até o momento, quando a sua velocidade, que era igual a v_0 no início, diminuiu duas vezes, mantendo-se na mesma direção?
78. Um bloco homogêneo está pendurado numa corda. A corda foi cortada. Que pedaços do bloco terão maior aceleração no momento inicial: os que estão na parte superior, ou inferior?
79. Um bloco homogêneo encontra-se sobre um suporte horizontal. O suporte repentinamente é retirado. Quais partes do bloco têm maior aceleração no momento inicial: as que estão na parte superior, ou inferior?
80. Um homem com as mãos levantadas encontra-se na plataforma de uma balança. Como varia a indicação da balança quando as mãos movem-se aceleradamente para baixo?
81. Num dos pratos de uma balança encontra-se uma garrafa. Na garrafa encontra-se uma mosca. Enquanto a mosca está adormecida, os pesos estão equilibrados. Variará o equilíbrio da balança se a mosca, ao despertar-se, desprende-se da parede da garrafa e voa primeiro

na direção horizontal e logo, em seguida, para cima com aceleração a ?

82. Nos extremos de uma corda, situada numa roldana com eixo fixo, estão penduradas, a uma altura $H = 2$ m do chão, duas cargas, cujas massas são $m_1 = 100$ gramas e $m_2 = 200$ gramas (fig. 26). No momento inicial as cargas estão em repouso. Determinar a tensão da corda, quando as cargas movem-se e o tempo no qual a carga de massa m_2 atinge o chão. A massa da roldana e da corda pode ser desprezada.

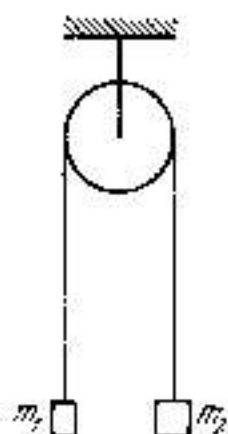


Fig. 26

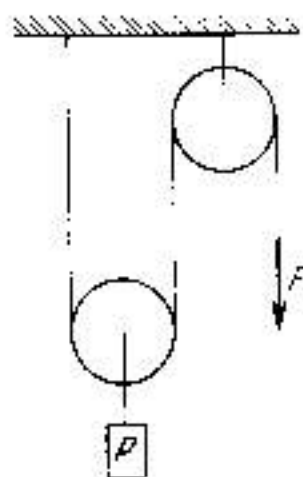


Fig. 27

83. No eixo de uma roldana móvel foi pendurada uma carga de peso P (fig. 27). Com que força F é necessário puxar o extremo da corda, colocada numa segunda roldana, para que a carga P mova-se para cima com aceleração a ? Para que a carga fique em repouso? A massa das roldanas e da corda é desprezada.
84. Determinar as acelerações dos pesos com massas m_1 , m_2 , m_3 e a tensão das cordas no sistema desenhado (fig. 28) se: $m_1 = m_2 + m_3$. As massas das cordas e roldanas são muito menores que as massas dos pesos.
85. Uma corda é colocada em duas roldanas fixas e em seus extremos colocam-se pratos com pesos $P = 30$ N em cada um. A corda entre as roldanas foi cortada e amarrada a um dinamômetro (fig. 29). Que mostra o dinamômetro? Que peso P_1 deve adicionar-se a um dos pratos, para que a leitura do dinamômetro não varie, logo após ter-se tirado do outro prato um peso

$P_2 = 10$ N? As massas dos pratos das roldanas, da corda e do dinamômetro desprezam-se.

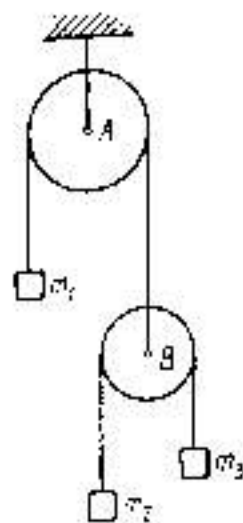


Fig. 28

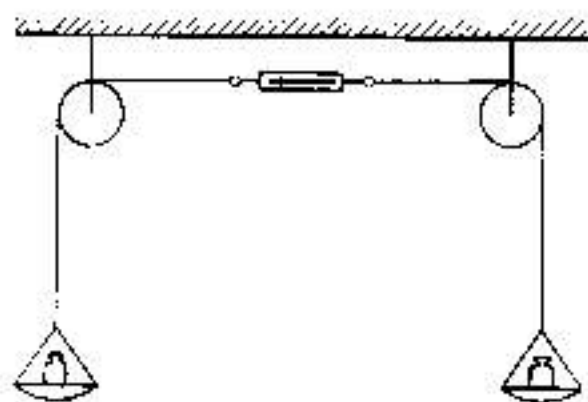


Fig. 29

86. Numa corda, colocada em uma roldana, penduraram-se os pesos com massas m_1 e m_2 . A roldana, estando imóvel, (os pesos não se movem), foi equilibrada numa balança como se vê na fig. 30. Em quanto será necessário variar o peso no prato da direita, para que, ao liberar-se a roldana e conseqüentemente moverem-se os pesos, o equilíbrio se mantenha.

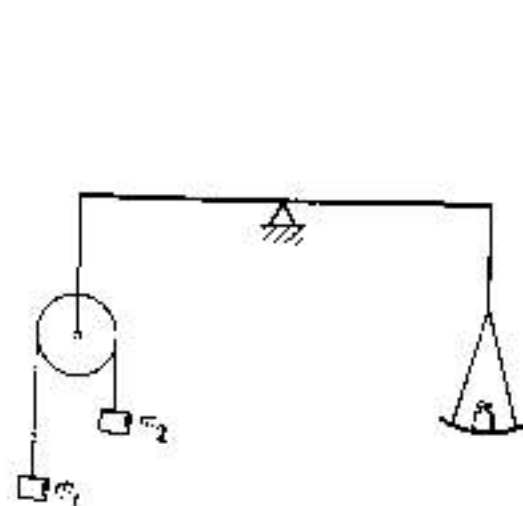


Fig. 30

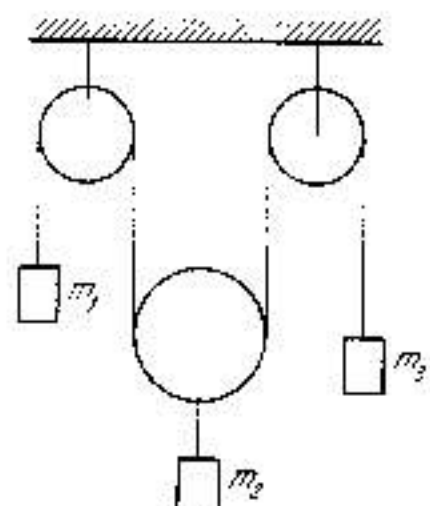


Fig. 31

87. Um sistema consiste de duas roldanas com eixos fixos e uma roldana móvel (fig. 31). Através das roldanas

colocou-se uma corda nos extremos da qual foram pendurados os pesos com massas m_1 e m_3 e no eixo da roldana móvel pendurou-se um peso de massa m_2 . As partes da corda, que não se encontram na roldana, estão situadas na posição vertical. Determinar a aceleração de cada um dos pesos se as massas das roldanas e da corda e também a fricção podem ser desprezadas.

88. Determinar a aceleração dos pesos no sistema desenhado (fig. 32). As massas das roldanas, da corda e a fricção podem ser desprezadas. Em que direção girarão as roldanas, quando os pesos se moverem?

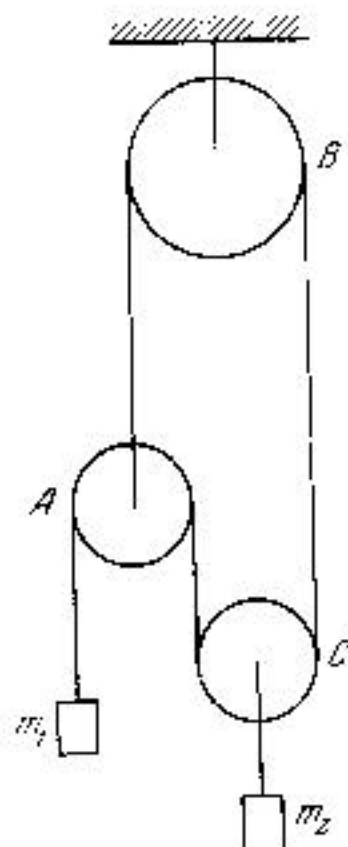


Fig. 32

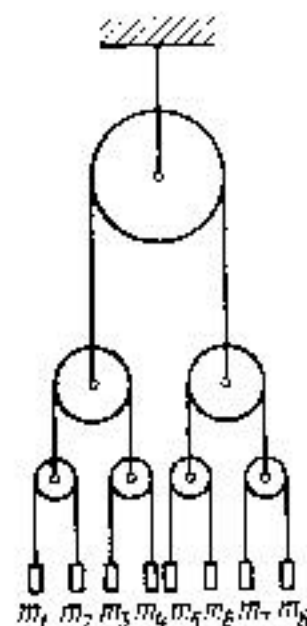


Fig. 33

89. Determinar a tensão das cordas, nas quais estão pendurados os pesos no sistema desenhado (fig. 33). A massa das cordas e roldanas é desprezada. Não há fricção. As massas dos pesos $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ são conhecidas.
90. Determinar a aceleração do peso de massa m_4 no sistema da fig. 34. As massas das cordas e roldanas são despre-

zadas. Não há atrito. As massas m_1, m_2, m_3, m_4 estão dadas na figura.

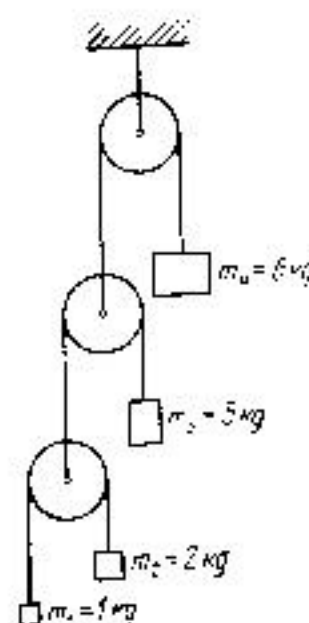


Fig. 34

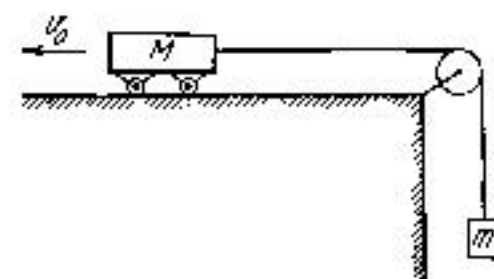


Fig. 35

91. Uma carreta de massa $M = 500$ gramas está unida por uma corda a uma carga de massa $m = 200$ gramas. No momento inicial a carreta tinha velocidade inicial $v_0 = 7$ m/s e se movia para a esquerda num plano horizontal (fig. 35). Determinar: a grandeza e direção da velocidade da carreta, o lugar onde encontrar-se-á e o caminho percorrido por ela, decorridos $t = 5$ segundos.
92. Determinar a aceleração dos corpos de massas m_1, m_2 e m_3 , para o sistema mecânico representado na fig. 36. Não existe atrito entre as superfícies que se tangenciam. As massas da roldana A e da corda podem ser desprezadas.
93. Uma barra pode mover-se sem atrito tanto para baixo como para cima, entre dois suportes fixos. A massa da barra é igual a m . O extremo inferior da barra toca a superfície lisa de uma cunha de massa M . A cunha está situada sobre uma mesa horizontal lisa (fig. 37). Determinar a aceleração da cunha e da barra.
94. Numa barra de comprimento $2l$ foi colocada uma conta de massa m . A conta pode deslocar-se pela barra

sem fricção. No momento inicial a conta encontrava-se no meio da barra. A barra move-se progressivamente num plano horizontal com aceleração a numa direcção

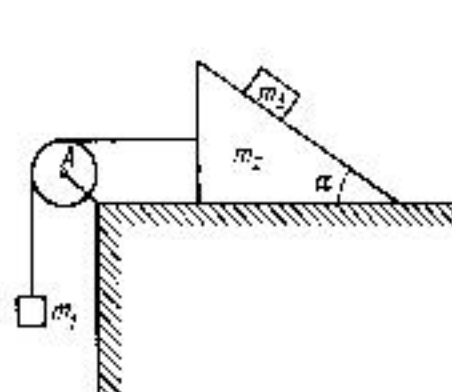


Fig. 36

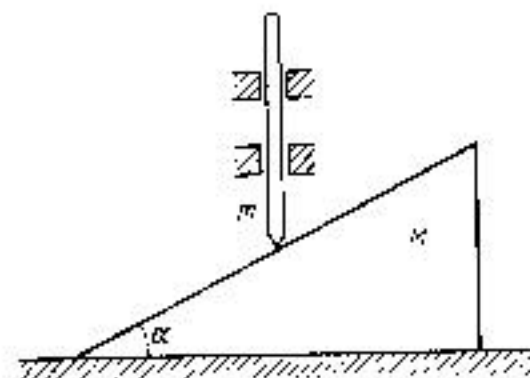


Fig. 37

que faz um ângulo α com a mesma (fig. 38). Determinar a aceleração da conta relativamente à barra, a força de reacção da barra sobre a conta e o tempo em que a conta deixa a barra.

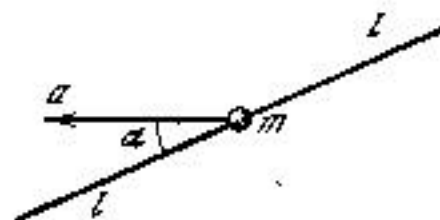


Fig. 38

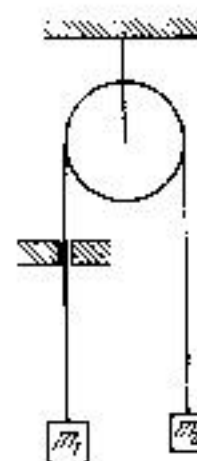


Fig. 39

95. Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício (fig. 39). No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante K . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são m_1 e m_2 . Determinar a aceleração dos pesos.

96. Nos extremos de uma mola foram aderidos dois blocos, cujas massas são M e m ($M > m$). Sob a ação de duas forças iguais a F , que atuam sobre os blocos como se vê na figura 40, a mola foi comprimida. Os blocos



Fig. 40

repousam em uma mesa. Que sucederá, se as forças F deixarem de atuar? O coeficiente de atrito dos blocos com a mesa é igual a k .

97. Na parede posterior de um vagão há um quadro pendurado em uma corda que passa por um prego. Como mover-se-á o quadro em relação ao vagão, se a corda rebentar no caso em que:

1) a velocidade do vagão aumenta? 2) a velocidade do vagão diminui? Em ambos os casos o valor absoluto da aceleração do vagão é a . O coeficiente de fricção do quadro com a parede do vagão é k .

98. Duas cargas com massa m_1 e m_2 estão ligadas através de uma corda que passa por uma roldana. Os planos, nos quais se encontram as cargas, formam com o plano horizontal ângulos α e β (fig. 41). A carga da direita

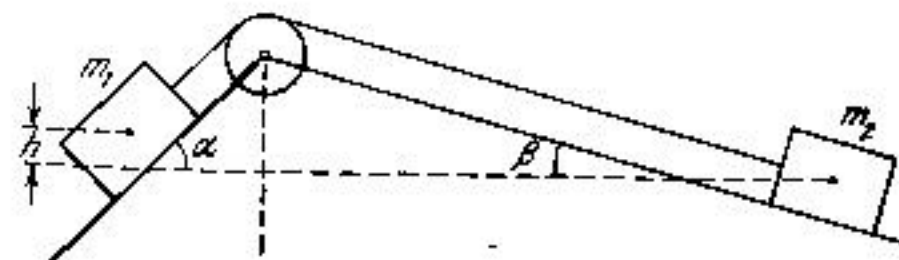


Fig. 41

encontra-se em um nível inferior à carga da esquerda em uma grandeza igual a h metros. Decorridos τ segundos, depois de iniciado o movimento, ambas as cargas encontraram-se à mesma altura. Os coeficientes de fricção entre as cargas e os planos são iguais a k . Determinar a relação entre as massas das cargas.

99. De um ponto O através de canais, situados num plano vertical, que formam diferentes ângulos com a vertical, simultaneamente começam a deslizar grãos de areia. Encontrar o lugar geométrico dos pontos, nos quais se encontram os grãos de areia, decorrido um tempo t , se o coeficiente de fricção de cada grão com o canal é k .
100. Uma montanha de gelo faz com a horizontal um ângulo α igual a 30° . Do cume deixam cair uma pedra a qual durante $t_1 = 2$ segundos percorre a distância $l = 16$ m e continua caindo. Em que tempo t_2 decorreu o deslizamento da pedra para baixo? Qual é o coeficiente de atrito entre a pedra e a montanha?
101. Uma carreta de massa M move-se sem fricção em trilhos horizontais com uma velocidade v_0 . Na parte dianteira da carreta coloca-se um corpo de massa m . Sua velocidade inicial é igual a zero. Para que comprimento da carreta o corpo não cairá da mesma? As dimensões do corpo em relação ao comprimento da carreta l podem ser desprezadas. O coeficiente de fricção entre o corpo e a carreta é k .
102. Um bloco de massa M está situado em um plano horizontal. Sobre o bloco encontra-se um corpo de massa

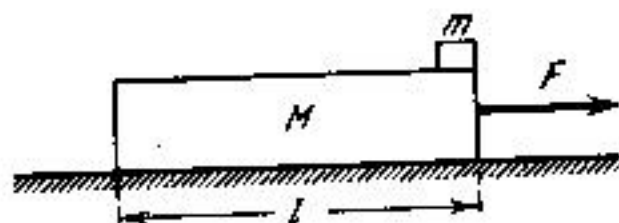


Fig. 42

m (fig. 42). O coeficiente de atrito entre o corpo e o plano é k . Analisar o movimento para diferentes valores da força F .

103. Uma barra de massa M está situada num plano horizontal liso, no qual move-se sem fricção. Sobre a barra está colocado um corpo de massa m (fig. 42). O coeficiente de fricção entre o corpo e a barra é k . Para que valor da força F , que atua sobre a barra na direção horizontal, o corpo começa a deslizar sobre a mesma? Decorrido que tempo o corpo cairá da barra, se o comprimento da mesma é igual a l ?

104. Uma mesa com peso $P_1 = 150$ N pode mover-se sem fricção em um piso horizontal. Sobre a mesa está colocado um peso $P_2 = 100$ N. Ao peso foi amarrada uma corda, que passa através de duas roldanas fixas na mesa (fig. 43). O coeficiente de fricção entre o peso

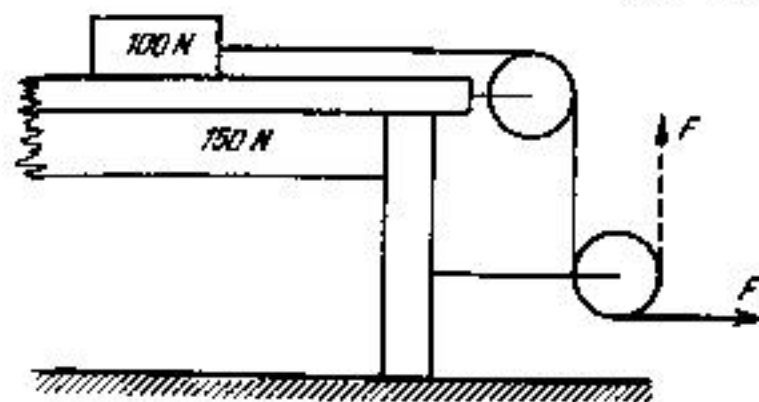


Fig. 43

e a mesa é $k = 0,6$. Com que aceleração a mesa mover-se-á se ao extremo livre da corda for aplicada uma força igual a 80 N? Considerar dois casos: 1) a força está dirigida horizontalmente; 2) a força está dirigida verticalmente para cima.

105. Sobre uma barra, de comprimento $2l$, foi colocada uma conta de massa igual a m . O coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a k . No momento inicial a conta encontrava-se no meio da barra. A barra desloca-se progressivamente em um plano horizontal com aceleração a em uma direção, que forma um ângulo α com a barra (fig. 38). Determinar a aceleração da conta relativamente à barra, a força de reação por parte da barra sobre a conta e o tempo depois do qual a conta se liberta da barra. Não é necessário considerar a força de gravidade.
106. Um canhão velho, que não tem amortecedor, encontra-se numa área horizontal. O canhão atira, de um ângulo α com o plano horizontal, projétil, cuja massa é m e velocidade inicial é v_0 . Que velocidade v_1 terá o canhão imediatamente depois do disparo, se a massa do canhão é M e a aceleração do projétil no cano do canhão é muito maior do que a aceleração de queda livre? O coeficiente de fricção entre o canhão e a área é igual a k .

107. Um foguete tem uma reserva de combustível $m = 8 \text{ t}$. A massa do foguete (incluindo o combustível) é igual a $M = 15$ toneladas. O combustível queima-se em 40 segundos. O gasto de combustível e a força de tração $F = 200\,000 \text{ N}$ são constantes.

1) O foguete está situado horizontalmente numa carrêta. Determinar a aceleração do foguete no momento de lançamento. Encontrar a dependência da aceleração com o tempo de movimento do foguete e desenhar essa dependência graficamente. Pelo gráfico, avaliar a velocidade do foguete decorridos 20 segundos depois de começar o movimento. A fricção é desprezada.

2) O foguete é lançado verticalmente para cima. As medições mostraram que, decorridos 20 segundos, a aceleração do foguete é $0,8 \text{ g}$. Calcular a força de resistência do ar, que atua sobre o foguete nesse momento. A aceleração g considerar constante.

3) Para medir a aceleração do foguete, nele colocou-se um aparelho, o qual é constituído de uma mola fixa num tubo vertical. Em repouso a mola é estendida por uma carga situada no seu extremo em $l_0 = 1 \text{ cm}$. Determinar a dependência da extensão da mola da aceleração do foguete. Desenhar a escala do aparelho.

108. Dois cubos estão situados bem juntos sobre uma superfície horizontal lisa. A aresta de cada cubo é l e a massa M . Um dos cubos é atingido por uma bala de massa m , que se move em direção da linha que une os centros dos cubos. Considerando que a força de resistência horizontal, resultante do movimento da bala, é constante e igual a F , determinar em que limites deve encontrar-se a velocidade inicial da bala, para que a mesma passe pelo primeiro cubo, mas fique encaixada no segundo.

§ 5. LEI DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

109. Um disco homogêneo, que gira em redor de seu eixo, possui quantidade de movimento? O eixo do disco está fixo.
110. Duas canoas navegam paralelamente ao encontro uma da outra com velocidades iguais. Quando as canoas encontram-se, de uma delas à outra lançam uma carga

e da segunda para a primeira lançam outra carga igual. De outra vez as cargas foram lançadas de uma canoa para a outra simultaneamente. Em qual caso a velocidade das canoas depois de lançarem as cargas será maior?

111. Uma rã de massa m está parada no extremo de uma tábua de massa M e comprimento L . A tábua está flutuando na superfície de um lago. A rã salta, formando um ângulo α em relação à horizontal na direção da tábua. Qual deve ser a velocidade inicial da rã v_0 , para que depois do salto a rã encontre-se no outro extremo da tábua?
112. Uma cunha com ângulo de base α encontra-se numa mesa horizontal lisa. Pelo plano inclinado da cunha sobe um besouro com uma velocidade constante u relativamente à cunha. Determinar a velocidade da cunha. Considera-se, que o besouro começou a mover-se, quando a cunha estava em repouso. A massa da cunha é M , a massa do besouro é m .
113. Uma cunha, cujo ângulo de base é α , pode deslocar-se sem fricção em uma superfície horizontal lisa (fig. 44).

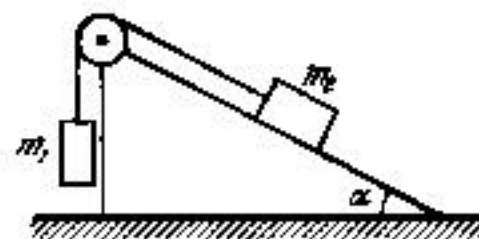


Fig. 44

Para qual relação de massas m_1 e m_2 das cargas, ligadas por uma corda que passa por uma roldana, a cunha permanecerá imóvel, e para qual relação de cargas a cunha mover-se-á para a direita ou para a esquerda? O coeficiente de fricção entre a carga m_2 e a cunha é k .

114. Em um plano inclinado liso, cujo ângulo com a horizontal é α , começou a deslizar com velocidade inicial igual a zero, uma caixa de areia de massa M . Depois de percorrer a distância S a caixa chocou-se com uma pedra de massa m , que se movia na direção horizontal. Qual era a velocidade da pedra v , se a caixa com areia depois do choque parou instantaneamente?

A velocidade da pedra e da caixa estão num mesmo plano.

115. Um foguete foi lançado verticalmente para cima e na altura máxima explodiu. Depois da explosão o foguete ficou dividido em três pedaços. Demonstrar que os vetores das velocidades iniciais dos três pedaços encontram-se num mesmo plano.
116. Na superfície de um lago encontra-se uma canoa, que está situada perpendicularmente à linha da margem e tem a proa dirigida à mesma. A distância entre a proa da canoa e a margem é igual a 0,75 metros. No momento inicial a canoa estava imóvel. O homem, que se encontra na canoa, passa da proa para a popa. Atracará a canoa na margem, sendo o seu comprimento 2 metros? A massa da canoa é $M = 140$ kg, e a massa do homem é $m = 60$ kg.
117. Dos extremos de uma plataforma imóvel de comprimento $l = 9,2$ m, um adulto e uma criança estão correndo ao encontro um do outro. Determinar em quanto deslizará a plataforma, quando o adulto passe de um extremo da plataforma ao outro. Sabe-se, que o adulto corre duas vezes mais rápido do que a criança. A massa da plataforma é $m_1 = 600$ kg, a massa do adulto é $m_2 = 60$ kg e a massa da criança é $m_3 = 30$ kg.
118. Em um plano horizontal absolutamente liso encontra-se um aro. Sobre o mesmo encontra-se um besouro. Que trajetória descreverão o besouro e o centro do aro, se o besouro mover-se-á pelo aro? A massa do aro é M , o seu raio é R e a massa do besouro é m .
119. No momento inicial um foguete com massa M tinha velocidade v_0 . No final de cada segundo o foguete desprende uma porção de gás de massa m . A velocidade da porção de gás se diferencia da velocidade do foguete, antes de que essa massa de gás seja queimada, numa grandeza constante u , ou seja, a velocidade de fluxo do gás é constante. Desprezando a ação da força de gravidade, determinar a velocidade do foguete decorridos n segundos.
120. Aumentará a velocidade do foguete, se a velocidade de saída dos gases em relação ao foguete é menor do que a velocidade do foguete, de tal forma que os gases, expelidos pelo foguete, voam atrás do mesmo?

121. Um canhão de massa M , que se move somente na horizontal, atira sob um ângulo α um projétil de massa m , com a velocidade v_0 . Considerando v_0 como a velocidade inicial do projétil em relação à terra, ou em relação ao canhão e considerando o ângulo de inclinação α , o ângulo do vetor da velocidade inicial v_0 ou o ângulo de inclinação do cano do canhão, encontrar a velocidade v de retrocesso do canhão nas quatro variantes.

§ 6. ESTATICA

122. Num cilindro imóvel enrolaram uma corda, cujo comprimento é $l = R\theta$, onde R é o raio do cilindro, θ é o ângulo em radianos entre os raios traçados dos pontos inicial e final, em que a corda toca o cilindro. Um extremo da corda é puxado com força T_0 . O coeficiente de fricção entre a corda e a superfície do cilindro é k . Determinar a força de tensão do segundo extremo da corda, conhecendo-se que esta é a força máxima, para a qual ainda não existe deslizamento.
123. Nos extremos de uma corda que passa por duas roldanas, estão penduradas duas cargas iguais (fig. 45).

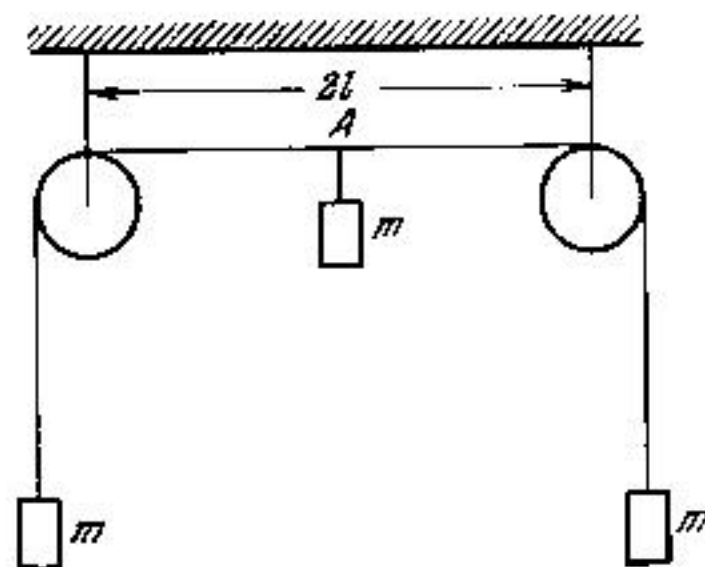


Fig. 45

A que distância baixará uma terceira carga de igual massa, se ela for pendurada no meio da corda? A distân-

cia entre os eixos das roldanas é igual a $2l$. Existe fricção nos eixos das roldanas, mas esta é muito pequena.

124. Uma cunha isósceles de ângulo agudo α foi colocada numa fresta. Para qual valor do ângulo α a cunha não será expelida da fresta, se o coeficiente de fricção entre a cunha e o material da fresta é k ?
125. Qual é a relação entre os pesos P e Q conhecendo-se que o sistema desenhado na fig. 46 está em equilíbrio? Os comprimentos das barras AD , BC , CH , DT e o com-

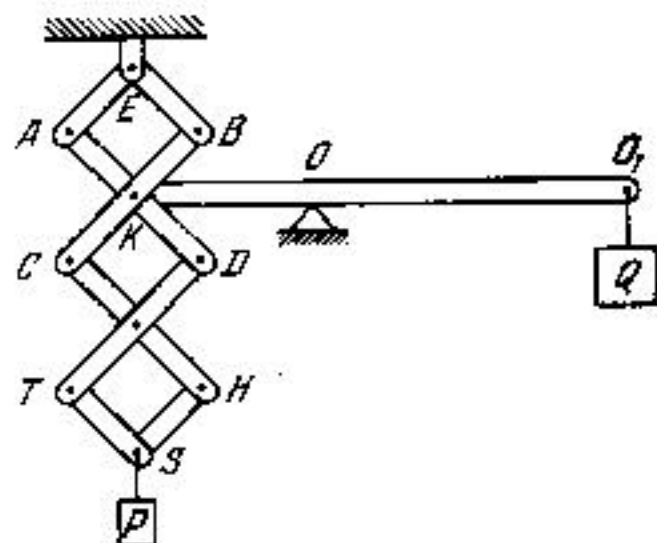


Fig. 46

primento do braço da alavanca OO_1 são duas vezes maiores que o comprimento das barras AE , EB , TS , SH e o comprimento do braço da alavanca KO , respectivamente. Os pesos das barras e da alavanca podem ser desprezados.

126. Para poder mover uma caixa retangular de comprimento l e de altura h na sua aresta superior, perpendicular à face, aplica-se uma força horizontal F . Qual valor deve ter o coeficiente de fricção k entre a caixa e o chão, para que a caixa mova-se sem virar?
127. Uma barra homogênea, cujo peso é P , está no chão. O coeficiente de fricção entre a barra e o chão é k . O que é mais fácil: virar a barra no plano horizontal em relação ao seu centro, ou mover a barra progressivamente? Em ambos os casos, a barra é movida por duas pessoas.

128. Um guindaste, cujo peso é $P = 2 \cdot 10^4$ N, tem um vão $L = 26$ m (ver a fig. 47). O cabo, no qual está dependurada a carga, encontra-se a uma distância $l = 10$ m

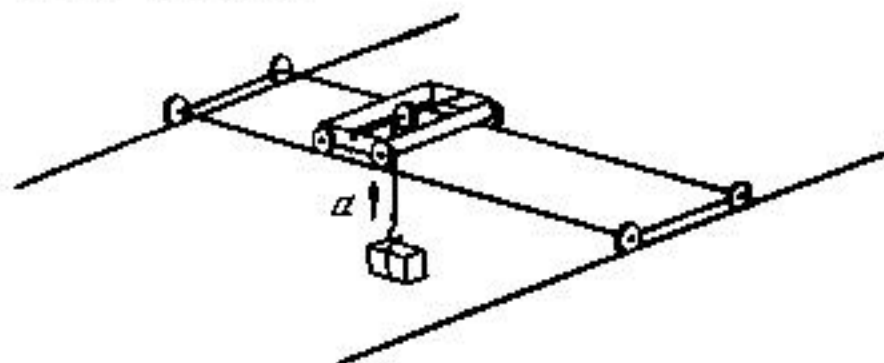


Fig. 47

de um dos trilhos. Determinar a força de pressão do guindaste nos trilhos, ao levantar uma carga com um peso $P_0 = 10^4$ N e uma aceleração $a = 9,8$ m/s².

129. Uma alavanca está dobrada de tal modo, que seus lados AB , BC , CD são iguais e formam entre si ângulos retos (fig. 48). O eixo da alavanca está no ponto B . Perpendicularmente ao braço da alavanca AB no ponto A está aplicada uma força P . Determinar o valor mínimo da força, que é necessário aplicar no ponto D , para que a alavanca encontre-se em equilíbrio. O peso da alavanca pode ser desprezado.

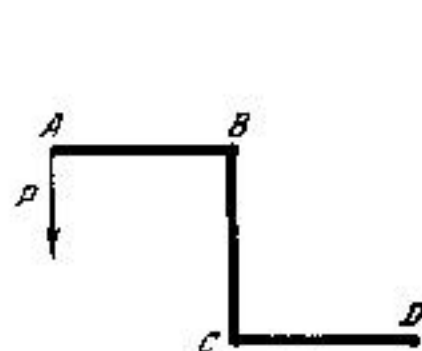


Fig. 48

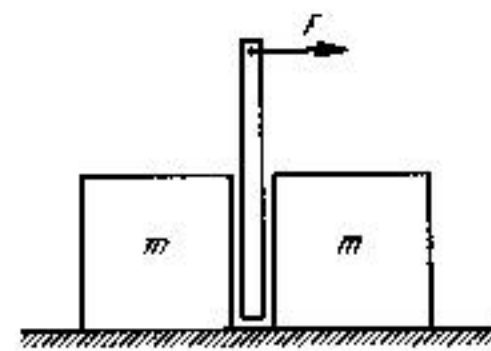


Fig. 49

130. Entre duas caixas iguais, situadas no chão, foi colocada uma barra, a qual não atinge o solo (fig. 49). À parte superior da barra é aplicada uma força horizontal. Qual das duas caixas mover-se-á antes?

131. Uma bola homogênea e pesada foi pendurada numa corda, cujo extremo está fixo numa parede vertical. O ponto de união da corda com a bola, encontra-se numa mesma vertical, em relação ao centro da bola. Qual valor deve ter o coeficiente de fricção entre a bola e a parede, para que a bola encontre-se em equilíbrio?
132. Um tijolo encontra-se num plano inclinado (fig. 50). Qual metade do tijolo, da direita ou da esquerda, exerce uma maior pressão sobre o plano inclinado?

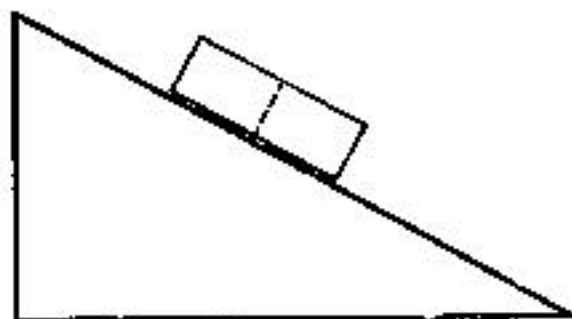


Fig. 50

133. Para erguer um rolo pesado de raio R num degrau retangular, aplicou-se ao seu eixo uma força na direção horizontal igual ao peso do rolo. Determinar a altura máxima do degrau.
134. Em dois planos inclinados, que fazem ângulos $\alpha_1 = 30^\circ$ e $\alpha_2 = 60^\circ$ com a horizontal, encontra-se uma bola que pesa P . Determinar a força de pressão da bola sobre cada um dos planos inclinados, sendo que a fricção entre a bola e um dos planos é desprezada.
135. Na parede frontal da gaveta de um armário existem duas alças situadas simetricamente. A distância entre as alças é l e o comprimento da gaveta a . O coeficiente de fricção entre a gaveta e o armário é k . É sempre possível abrir a gaveta, atuando com uma força apenas sobre uma das alças, perpendicular à parede da gaveta?
136. Sobre um tronco irregular, situado horizontalmente, foi equilibrada uma tábua homogênea (fig. 51). Depois que aumentaram o peso de um dos extremos, observou-se, que o equilíbrio foi alcançado, quando a tábua

fez um ângulo α com o plano horizontal. Qual é o coeficiente de fricção entre a tábua e o tronco?

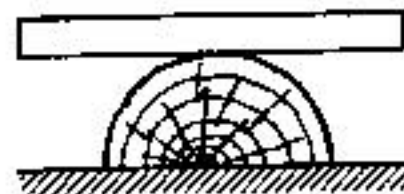


Fig. 51

137. O extremo superior de uma escada apoia-se numa parede vertical lisa e o extremo inferior da escada está sobre um solo irregular. O coeficiente de fricção entre a escada e o solo é k . Determinar para que ângulo α , entre a escada e a parede, a escada ficará em equilíbrio.
138. Resolver o problema anterior, considerando que a parede não é lisa e que o coeficiente de fricção entre a escada e a parede é também igual a k .
139. Uma barra fina homogênea AB de comprimento l situa-se na superfície horizontal de uma mesa. Ao extremo B da barra foi amarrada uma corda de comprimento $2l$ (fig. 52). Como mover-se-á a barra, sendo

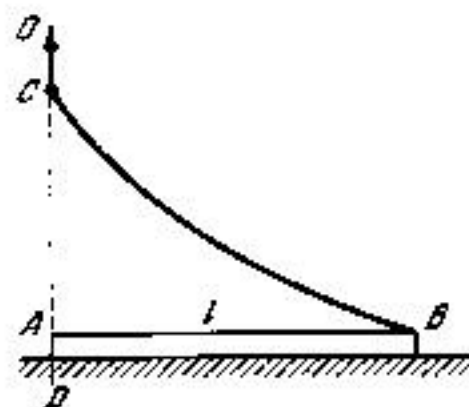


Fig. 52

- que o outro extremo da corda C , ergue-se lentamente na direção da reta vertical imóvel DO e passa pelo extremo A da barra? O peso da corda é desprezado.
140. Para qual valor do coeficiente de fricção, um homem que corre por um caminho reto e duro, não escorregará? O ângulo máximo entre a linha vertical e a linha que

que o centro de gravidade do corredor com o ponto de apoio, é igual a α .

141. Uma escada foi encostada na parede vertical lisa de uma casa. O ângulo entre a escada e a superfície horizontal da terra é $\alpha = 60^\circ$. O comprimento da escada é l . O seu centro de gravidade encontra-se no meio. Como está dirigida a força, com que a terra atua sobre a escada?
142. Uma escada, cujo centro de gravidade encontra-se no meio, está apoiada à parede e chão absolutamente lisos (fig. 53). Qual deve ser a tensão da corda amarrada ao meio da escada, para que esta não caia?

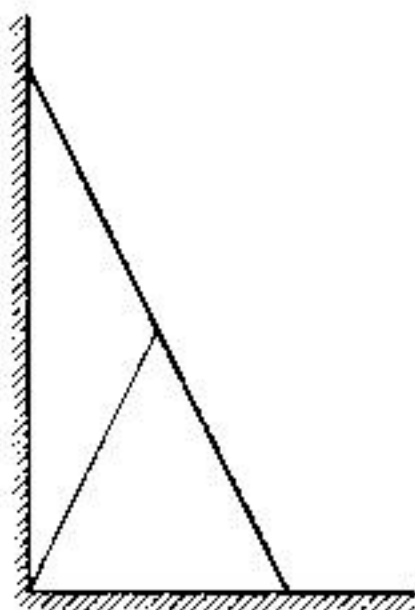


Fig. 53

143. Por uma escada, encostada a uma parede vertical lisa, está subindo um homem. A escada começa a escorregar somente quando o homem atingiu determinada altura. Explique o porquê?
144. Um quadro está dependurado numa parede vertical por uma corda AC de comprimento l , a qual faz um ângulo α com a parede. A altura do quadro é BC igual a d (fig. 54). A parte inferior do quadro não está presa. Para que valor do coeficiente de fricção, entre o quadro e a parede, o quadro ficará em equilíbrio?

145. Quatro barras homogêneas estão fixas, uma à outra, em forma de articulação nos pontos B , C e D (fig. 55).

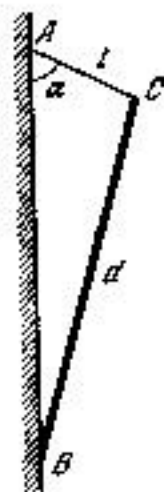


Fig. 54

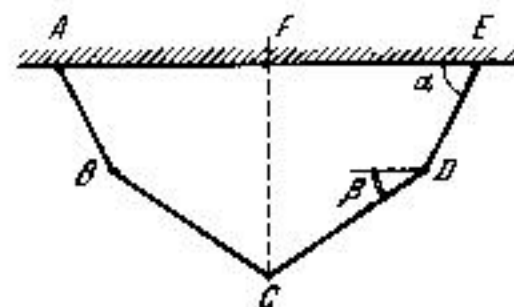


Fig. 55

As duas barras extremas AB e DE podem girar livremente em relação aos pontos fixos A e E , que se encontram na linha horizontal. Os comprimentos das barras são iguais em pares: AB é igual a ED e BC , igual a CD . As massas das barras são iguais. Demonstrar que em equilíbrio os ângulos α e β relacionam-se da seguinte forma: $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

146. Qual é o coeficiente de fricção entre o solo e uma caixa que pesa 100 N , sendo que a força mínima necessária para mover a caixa do lugar é igual a 60 N ?
147. Num cilindro de massa m foi enrolada uma corda inflexível com peso desprezível (fig. 56). Com que força mínima $F_{\min}$ e sob que ângulo α_1 em relação

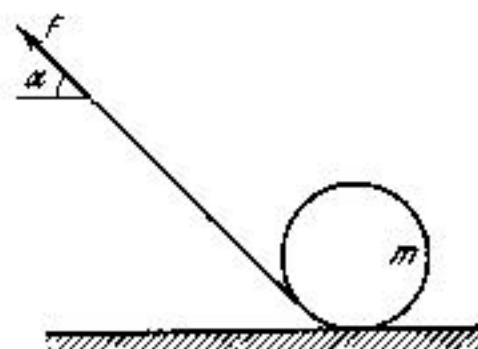


Fig. 56.

à horizontal, é necessário puxar a corda para que o cilindro, girando, mantenha-se no seu lugar? O coeficiente de fricção entre o cilindro e o solo é igual a k .

148. Na fig. 57 está desenhado um esquema simplificado da máquina de vapor e do mecanismo a manivela da locomotiva. As figuras 57 a e b correspondem aos

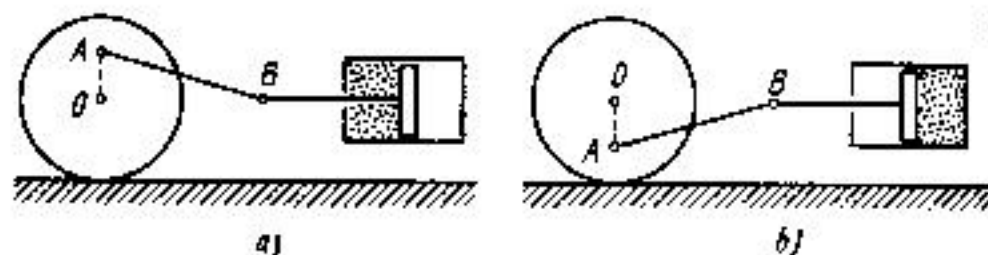


Fig. 57

momentos, quando o vapor encontra-se nas partes da esquerda e direita do cilindro, respectivamente. Calcular a força de tração para esses casos, quando o ponto A encontra-se em uma vertical com o eixo da roda motriz. A pressão do vapor no cilindro é p , a área do pistão é S , o raio da roda motriz é R , a distância OA é igual a r . A massa do mecanismo a manivela, do pistão e da roda motriz pode ser desprezada.

149. Sobre põe-se vários tijolos sem usar material para ligá-los de tal forma, que cada tijolo fique com uma parte

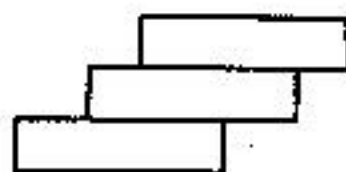


Fig. 58

livre em relação ao outro (fig. 58). A que distância máxima o extremo direito do tijolo superior pode sobressair o inferior, que serve de base para todos os tijolos? O comprimento de cada tijolo é l .

150. Determinar o centro de gravidade de um arame fino e homogêneo, dobrado em forma de semicírculo de raio r .

151. Determinar o centro de gravidade de um semicírculo homogêneo e fino de raio r .
152. Determinar o centro de gravidade de um arame fino e homogêneo, que foi dobrado em um arco de raio r (fig. 59).

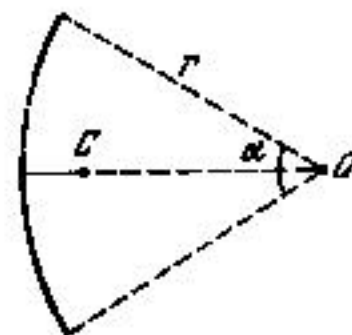


Fig. 59

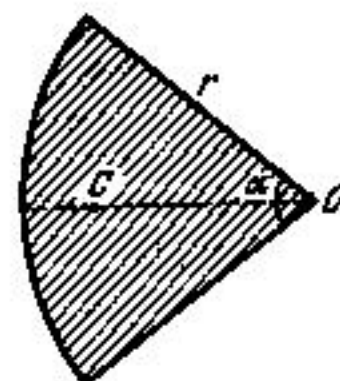


Fig. 60

153. Determinar o centro de gravidade de uma lâmina fina e homogênea cortada em forma de um setor de raio r , cujo ângulo central é igual a α (fig. 60).



Fig. 61

154. Determinar o centro de gravidade de uma lâmina fina e homogênea, que está composta de um retângulo, cujos lados são r e $2r$, do qual foi cortado um semicírculo de raio r (fig. 61).

§ 7. TRABALHO E ENERGIA

155. Que trabalho é realizado por uma força de 30 N, ao levantar um peso de 10 N a uma altura de 5 m?
156. A experiência de Guericke (com os hemisférios de Magdeburgo) consistiu em que, duas semi-esferas de cobre se unissem herméticamente pelas bases e da esfera obtida se tirasse o ar. A pressão atmosférica uniu tão fortemente as semi-esferas uma à outra, que foi possível separá-las somente com a ajuda de vários cavalos. Determinar quantos cavalos são necessários para separar as semi-esferas, atuando cada cavalo com uma força F ? O raio das semi-esferas é R , a pressão atmosférica é p .
157. Como explica-se o fato de que, quando uma pedra cai sobre a terra, a variação de quantidade de movimento da terra é igual à variação de quantidade do movimento da pedra, mas a variação da energia cinética da terra não é considerada?
158. Um pilar com peso 100 kg é introduzido no solo por um martelo gigante, cujo peso é 400 kg. O martelo cai livremente de uma altura de 5 metros e após cada choque o pilar aprofunda-se em 5 cm. Determinar a força resistente do solo, considerando-a constante.
159. Uma caixa com areia tem massa M e está pendurada numa corda de comprimento L . O comprimento da corda é muito maior do que as dimensões lineares da caixa. Uma bala, cuja massa é m , move-se na direção horizontal e atinge a caixa, introduzindo-se na mesma. A corda depois que a bala atinge a caixa, inclina-se em um ângulo α da vertical. Determinar a velocidade da bala.
160. Duas carretas (rodas são fixas por cunhas) são empurradas por uma explosão de pólvora Q , colocada entre elas (fig. 62). A carreta que pesa 100 gramas

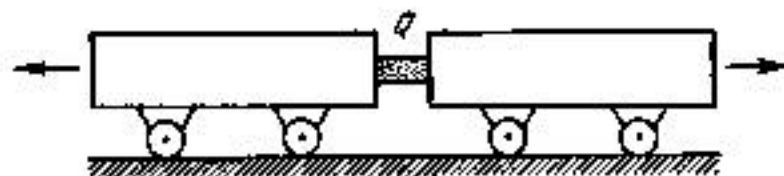


Fig. 62

percorre um caminho de 18 metros e para. Que caminho percorre a segunda carreta, cujo peso é 300 gramas? Os coeficientes de fricção entre a terra e as carretas são iguais a k .

161. Resolver o problema 101, utilizando a lei de conservação da quantidade de movimento e considerando a variação de energia cinética da carreta e do corpo.
162. Um foguete é lançado verticalmente para cima e elimina os gases incandescentes, conseqüentemente, em duas porções iguais. A velocidade de saída dos gases em relação ao foguete é constante e igual a u . Qual deve ser o intervalo de tempo entre a queima das porções, para que o foguete atinja uma altura máxima? O combustível queima instantaneamente. A resistência do ar é desprezada.
163. O combustível em um foguete queima-se em porções iguais de massa m . A queima é instantânea. Será a velocidade de saída de gases do foguete constante, se, ao queimar-se cada porção, a energia mecânica do sistema varia em um mesmo valor?
164. Ergue-se um corpo até o cume de uma montanha, uma vez, percorrendo o caminho ADC e outra, o caminho

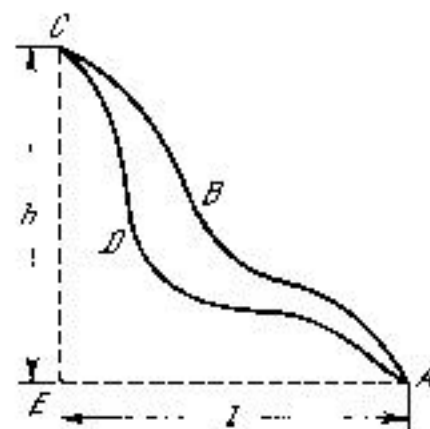


Fig. 63

ABC (fig. 63). Demonstrar que se a subida é lenta, o trabalho realizado será o mesmo, caso o coeficiente de fricção em ambos os trajetos seja igual.

165. Que força deve ser aplicada à alavanca de um macaco, para manter em equilíbrio um peso levantado pelo macaco igual a P ? O passo do parafuso é igual a h e o comprimento da alavanca é R . Não existe fricção.

166. Encontrar o coeficiente máximo de rendimento útil de um macaco, o qual não tenha adaptação especial que permita retrocesso.
167. Ao cesto de um balão de massa M , está amarrada uma escada de corda, de comprimento l , em cujo extremo encontra-se um homem de massa m . Todo o sistema encontra-se no ar em equilíbrio. Determinar que trabalho deve realizar o homem para subir ao cesto. Qual será a velocidade do balão, caso o homem mova-se pela escada com uma velocidade v relativa à mesma?
168. Como deve variar a potência do motor de uma bomba, para que ela possa bombear, através de um orifício fino, o dobro da quantidade de água por unidade de tempo? A fricção é desprezada.
169. Um poço retangular, cuja área da base é igual a S e a profundidade H , está cheia até a metade com água. Uma bomba bombeia a água até a superfície da terra através de um cano cilíndrico do raio R .
- 1) Que trabalho deve realizar a bomba para bombear toda a água no decorrer do tempo τ ?
 - 2) Que trabalho realizou a bomba nesse mesmo tempo, sendo que no fundo do poço, encontra-se uma lage de forma retangular, cuja área da base é igual a S_1 e altura h ? (A profundidade da água no poço é a mesma e igual a $H/2$).
170. Que trabalho é necessário realizar para que no tempo τ seja possível subir por uma escada de metrô, que se move para baixo? A altura da subida é h , a velocidade da escada é igual a v ; o ângulo, que faz a escada rolante com o plano horizontal, é α .

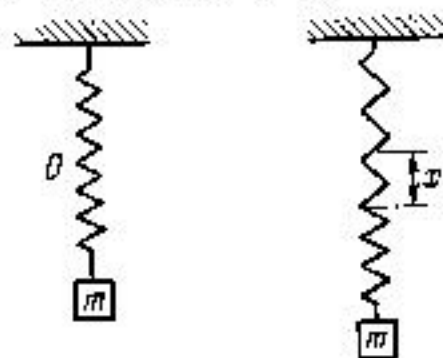


Fig. 64

171. Tomemos uma mola pelo seu ponto médio O e estiquemos em uma distância x (fig. 64) e depois soltemos-la.

A mola com rapidez torna-se uniformemente esticada e a passagem a esse estado está relacionada com a perda de certa energia. Estimar essa perda de energia, considerando a dureza da mola k muito grande. (Depois que a mola estica-se uniformemente, surgem oscilações do peso m , o que está relacionado com perda de energia adicional).

172. No vagão de um trem que se move uniformemente, um homem atua com uma força F sobre uma mola estendida (fig. 65). O trem percorreu o trajeto L .

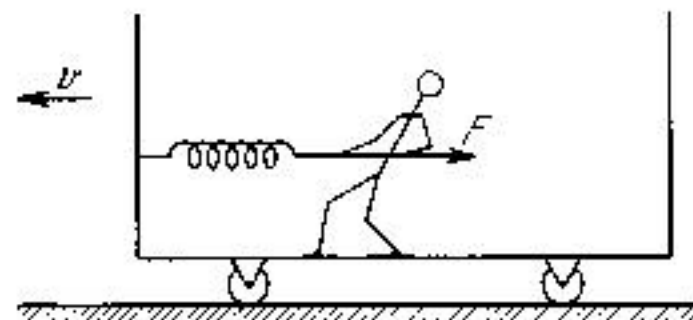


Fig. 65.

Que trabalho realiza o homem no sistema de coordenadas relacionado à terra?

173. No vagão de um trem que se move uniformemente, um homem estendeu uma mola prendendo-a na parede frontal do vagão, em um comprimento l ; durante esse tempo o trem percorreu o trajeto L . Que trabalho realiza o homem no sistema de coordenadas relacionado a terra? A que é igual esse trabalho no sistema relacionado ao trem? Ao estender a mola o homem caminha no sentido contrário ao do movimento do trem.
174. Duas bolas absolutamente elásticas, de massas m_1 e m_2 respectivamente, chocam-se. Suas velocidades iniciais são v_1 e v_2 . Encontrar as velocidades das bolas depois do choque. O choque é considerado central: as velocidades das bolas estão dirigidas na direção da linha que une seus centros. Analisar dois casos: 1) A velocidade da segunda bola antes do choque é igual a zero. 2) As massas das bolas são iguais.
175. Duas bolas absolutamente elásticas de massas m_1 e m_2 , chocaram-se. As velocidades iniciais eram v_1 e v_2 .

e o choque foi central. Determinar a energia máxima de deformação elástica.

176. Num plano horizontal, absolutamente liso, encontram-se em repouso duas barras elásticas de massa igual a m , unidas por uma mola de comprimento l (fig. 66). O coeficiente elástico da mola é igual a k . Na direção de uma das barras, por exemplo da esquerda, move-se com uma velocidade v uma terceira barra, cuja massa



Fig. 66

é também m . Demonstrar que as barras unidas pela mola mover-se-ão sempre numa mesma direção. Determinar as velocidades das mesmas no momento, em que a mola está distendida ao máximo.

177. Duas lâminas, cujas massas são iguais a m , estão ligadas através de uma mola de coeficiente de rigidez k (fig. 67). A lâmina superior foi comprimida para baixo, o suficiente, para que a deformação da mola fosse igual a x , sendo depois liberada. Determinar a que altura elevar-se-á depois disso o centro de massas do sistema.

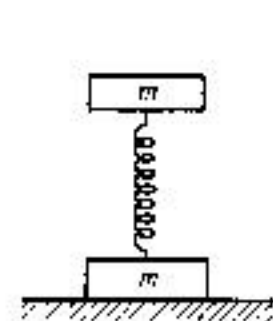


Fig. 67

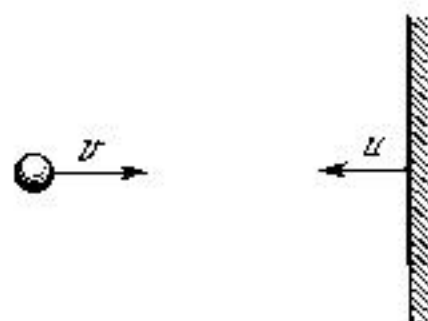


Fig. 68

178. Uma bola move-se com velocidade v em direção a uma parede, que se move em direção à bola com velocidade u (fig. 68). A bola choca-se elasticamente com a parede. Determinar a velocidade da bola depois do choque. Devido a que a energia cinética da bola varia? A massa da parede considerar como infinitamente grande.

179. De uma altura $h = 73,5$ m lançam duas pedras de massa igual, unidas por uma corda, cujo comprimento é $l = 39,2$ m. A primeira pedra começa a cair $\tau = 2$ s antes da segunda. Depois de quanto tempo, após o início do movimento as pedras atingirão o solo? A queda é sem velocidade inicial. 1) Considerar a corda absolutamente elástica. 2) Considerar a corda absolutamente inelástica.

180. Várias bolas elásticas idênticas foram penduradas, uma junto a outra, em cordas de igual comprimento (fig. 69),

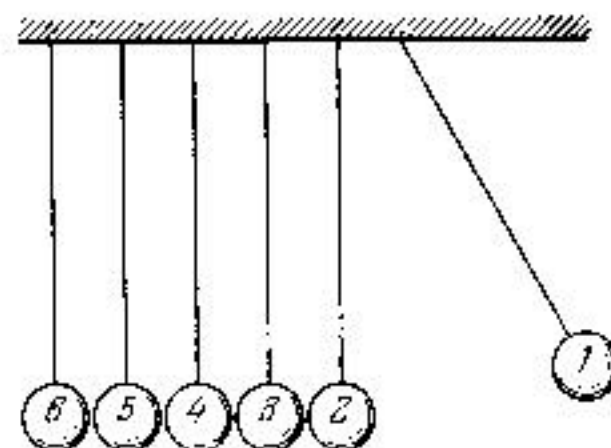


Fig. 69

de tal modo que a distância entre as bolas é muito pequena. De que modo comportar-se-ão as bolas, se inclinarmos e soltarmos a bola, que se encontra em um dos extremos e, assim por diante, simultaneamente duas bolas, três bolas, etc.?

181. Em um plano estão dispostas em fila (com pequenos intervalos) esferas de iguais dimensões (fig. 70). Uma

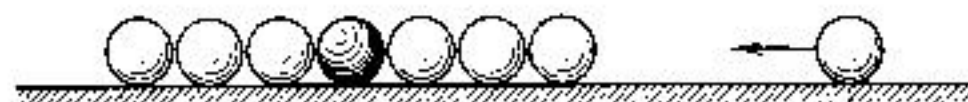


Fig. 70

delas, que se encontra no meio é feita de aço e as outras de marfim (a massa da esfera de aço é maior). Em direção à última esfera, que se encontra à direita, move-se uma outra de osso, ao longo da linha que une

os centros, cuja massa é igual a das demais. Como mover-se-ão as esferas depois do choque?

182. Nos extremos de uma corda muito comprida foram penduradas duas cargas de massa igual a m (fig. 71). A corda passa através de duas roldanas fixas, que se encontram a uma distância $2l$ uma da outra. Encontrar as velocidades das cargas, no decorrer de um tempo suficientemente grande, se, no meio da corda, pendurarmos um peso de massa $2m$.

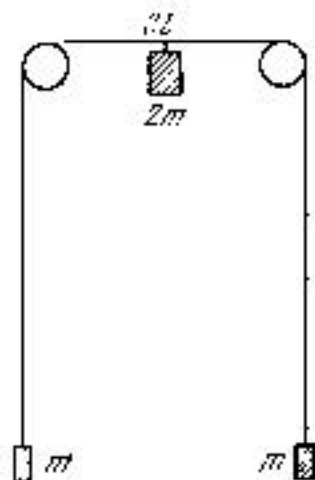


Fig. 71

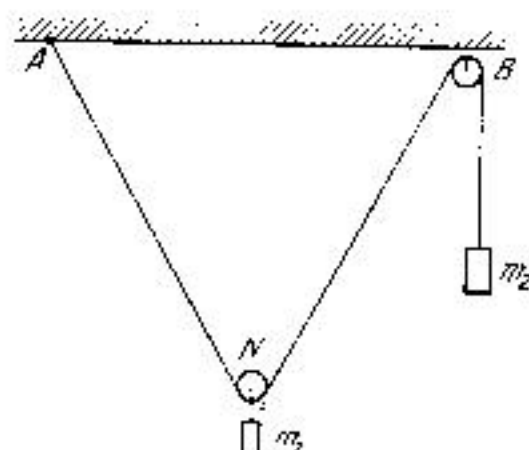


Fig. 72

183. Um peso de massa $m_1 = 536$ g, que se encontrava inicialmente no teto, entre os pontos A e B, começa a descer (fig. 72). Para qual valor do ângulo ANB, a sua velocidade em valor absoluto será igual à velocidade de outro peso de massa $m_2 = 1000$ g? Como mover-se-ão os pesos depois desse momento?
184. Sobre dois roletes de diferentes raios encontra-se uma tábua pesada, que forma um ângulo α com o plano horizontal. Determinar como se moverá a tábua. Não existe deslizamento. A massa dos roletes pode ser desprezada.
185. Uma corrente uniforme de comprimento $2l$ e massa M está situada numa tábua absolutamente lisa. Uma pequena parte da corrente foi introduzida numa abertura na tábua (fig. 73). No momento inicial o extremo da corrente, que se encontrava sobre a tábua, estava fixo, mas depois foi liberado e a corrente começou a mover-se sob a ação da força de gravidade da parte

da corrente, que ficou pendurada fora da tábua. Determinar a velocidade de movimento da corrente no momento, em que o comprimento da parte pendurada da corrente



Fig. 73

é x ($x < l$). Determinar, para esse mesmo momento, a aceleração da corrente e a reação do extremo da tábua.

186. Uma carreta de massa M move-se sem fricção em trilhos horizontais. Sobre a carreta fixou-se um pêndulo simples (uma bola de massa m , pendurada em uma corda de comprimento l) (fig. 74). No momento inicial

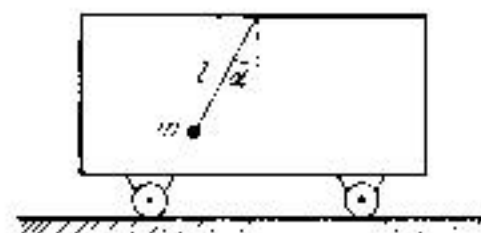


Fig. 74

a carreta e o pêndulo estavam em repouso e a corda inclinou-se num ângulo α em relação à linha vertical. Qual será a velocidade da carreta no momento, em que a corda do pêndulo fizer um ângulo β com a linha vertical ($\beta < \alpha$)?

187. Uma cunha, cuja massa é M , situa-se num plano horizontal absolutamente liso. Sobre a cunha encontra-se uma viga de massa m . A viga, sob a ação da força da gravidade, desliza pela cunha sem fricção. Considerando que no momento inicial o sistema encontrava-se em repouso, determinar a velocidade da cunha, quando a viga desce no sentido vertical a uma altura h .
188. Uma barra fixada entre dois suportes pode mover-se livremente na direção vertical (fig. 75). O extremo inferior da barra apoia-se numa cunha lisa, que se encontra em

um plano horizontal. A massa da barra é m e da cunha, M . Não há atrito. No momento inicial a barra e a cunha estavam em repouso. Determinar a velocidade v da cunha no momento, em que a barra desce a uma altura h ; a velocidade u_{relat} da barra, em relação à cunha que se move; a aceleração a da barra.

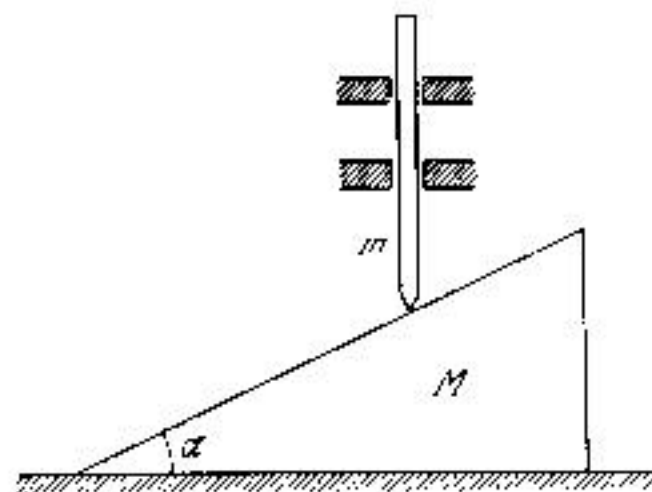


Fig. 75

§ 8. DINÂMICA DO MOVIMENTO CURVILÍNEO

189. Determinar a tensão do fio de um pêndulo balístico (ver o problema 159), após o mesmo ter sido atingido por uma bala.
190. Em um fio elástico, não flexível, cujo peso pode ser desprezado, estão fixos, como vê-se na fig. 76, quatro

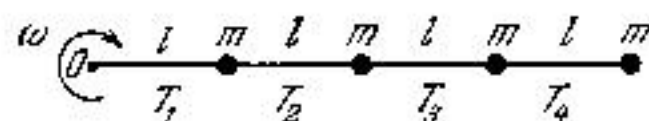


Fig. 76

pesos iguais. Todo o sistema gira com velocidade angular ω em redor de um eixo vertical, que passa através do ponto O . Os pesos movimentam-se em uma superfície horizontal lisa. Determinar a tensão do fio nas diferentes partes.

191. Nos extremos de uma barra leve, de comprimento l , estão fixas as massas m_1 e m_2 . As velocidades das massas m_1 e m_2 estão em um mesmo plano e são iguais, correspondentemente, a v_1 e v_2 (fig. 77). Determinar com que

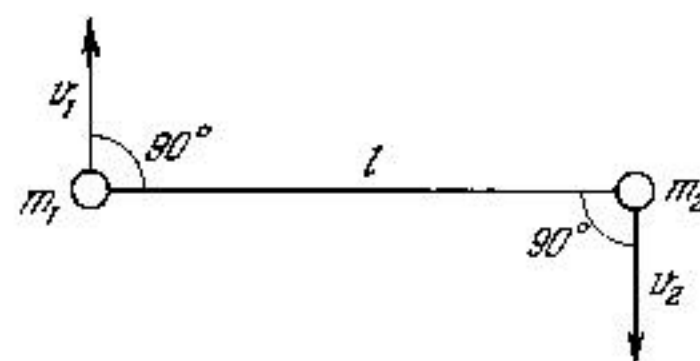


Fig. 77

velocidade movimentar-se o centro de gravidade do sistema e com que velocidade angular, gira a barra relativamente ao eixo que passa através do centro de gravidade.

192. No centro de uma plataforma, qual gira livremente em redor do eixo vertical, existe um canhão. O eixo de rotação passa através da culatra do mesmo. Na direção horizontal, em redor do raio da plataforma, foi dado um tiro. Variará, neste caso, a velocidade de rotação da plataforma?
193. Um pequeno corpo começa a deslizar sem velocidade inicial em um plano inclinado de uma altura H (fig. 78). Considerando, que não existe fricção e o choque

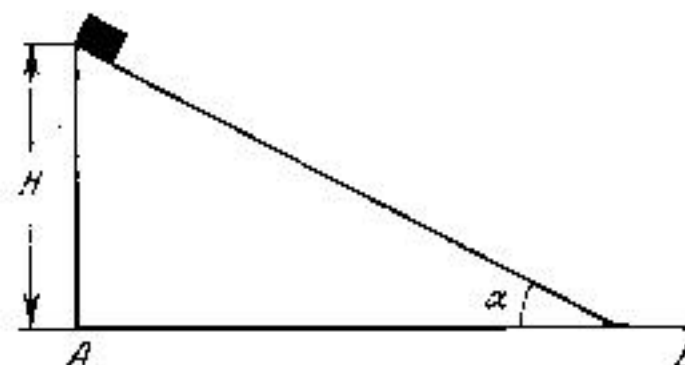


Fig. 78

do corpo com o plano horizontal AB é absolutamente elástico, determinar o caráter do movimento do corpo,

depois de sair do plano inclinado. Responder à mesma pergunta, sendo o choque absolutamente inelástico.

194. Qual é o raio mínimo de um arco, que pode descrever um motociclista, sendo sua velocidade $v = 21$ m/s, e o coeficiente de atrito entre os pneus e a terra é $k = 0,3$? Sob qual ângulo α com a horizontal deverá inclinar-se a motocicleta, se consideramos a sua massa concentrada no centro?
195. Em uma barra leve foi colocada uma esfera maciça (fig. 79). Em qual caso a barra cairá mais rapidamente:

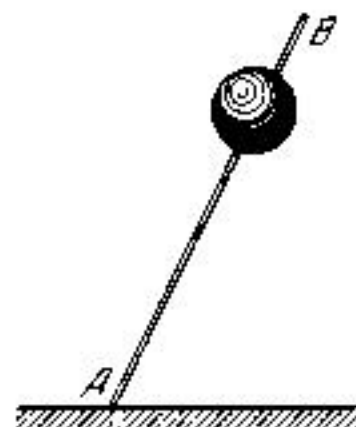


Fig. 79

se a colocarmos verticalmente no extremo A ou no extremo B? O extremo que se encontra em contacto com o solo não desliza.

196. No extremo de uma barra leve, que se encontra na posição vertical em relação ao solo, foi colocada uma esfera maciça. A barra começa a cair sem velocidade inicial. Para qual valor do ângulo α , entre a barra e a vertical, a barra deixará de pressionar o solo? Para qual valor do coeficiente de fricção o extremo de barra não deslizará até este momento?
197. A qual distância da base da barra cairá a esfera (ver o problema 196), se o coeficiente de atrito $k > \frac{\sqrt{5}}{2}$?
198. Um arame é dobrado em forma de arco com raio R (fig. 80). No arame foi colocada uma conta, que pode movimentar-se ao longo do arame sem fricção. No momento inicial a conta encontrava-se no ponto O. Qual velocidade horizontal é necessário transmitir

à conta, a fim de que a mesma, percorrendo parte do trajeto no ar, caísse novamente no ponto B no arame?

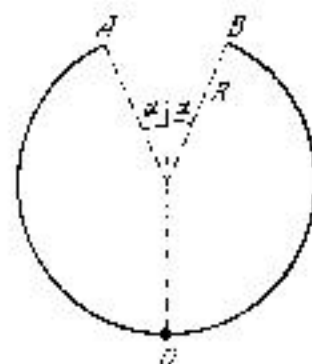


Fig. 80

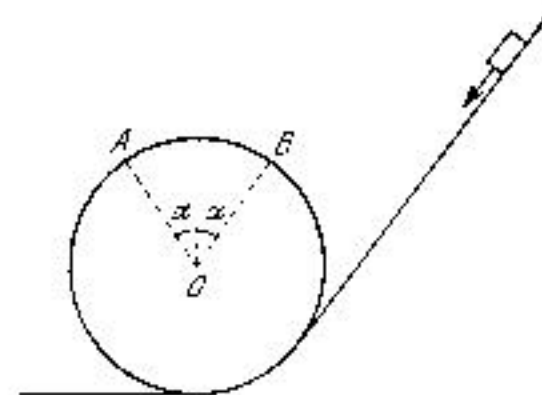


Fig. 81

199. Um corpo pequeno desliza por uma superfície inclinada e depois passa por um arco de altura mínima, a fim de que o corpo não se desprenda da superfície do arco (fig. 81). Qual corte simétrico, caracterizado pelo ângulo $\alpha < 90^\circ$, pode-se fazer no arco, a fim de que o corpo, percorrendo parte do caminho no ar, caia no ponto B do arco? Como movimentar-se-á o corpo, se o ângulo α for maior ou menor do que o encontrado? A fricção e a resistência do ar podem ser desprezadas.
200. Nos extremos de um fio, que passa através de dois pregos, estão fixos e movimentam-se circularmente

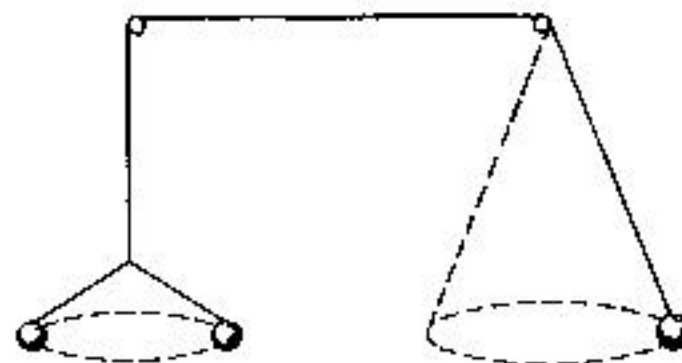


Fig. 82

pesos (fig. 82). À esquerda estão dois pesos de massa m cada um, à direita um peso de massa $2m$. Ficará o sistema em equilíbrio?

201. Em um fio muito fino encontra-se uma esfera. O fio é colocado em uma posição horizontal e depois solto. Em quais pontos da trajetória a aceleração de esfera estará dirigida verticalmente para baixo, em quais estará dirigida verticalmente para cima, e em quais horizontalmente? No momento inicial o fio não está esticado.
202. Uma barra leve pode girar em um plano vertical relativamente ao ponto O . Na barra são fixas as massas m_1 e m_2 nas distâncias r_1 e r_2 de O (fig. 83). A barra foi

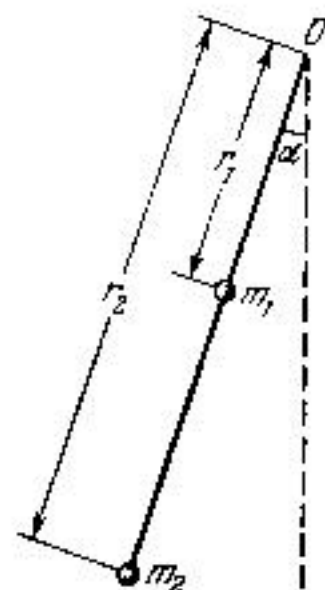


Fig. 83

liberada, sem velocidade inicial, de uma posição, que forma um ângulo α com a vertical. Determinar as velocidades lineares das massas m_1 e m_2 no momento, em que a barra fica em posição vertical.

203. No eixo de uma máquina centrífuga foi colocado clumbe, ao qual fixou-se uma pequena esfera em um fio de comprimento $l = 12,5$ cm. Encontrar o ângulo α de inclinação do fio em relação à vertical, sendo que a máquina faz 1 rotação por segundo, 2 rotações por segundo.
204. Uma barra de peso desprezível, dobrada como mostra a fig. 84, gira com velocidade angular ω relativamente

ao eixo OO' . No extremo da barra fixou-se um peso de massa m . Determinar a força, com que a barra atua sobre a massa m .

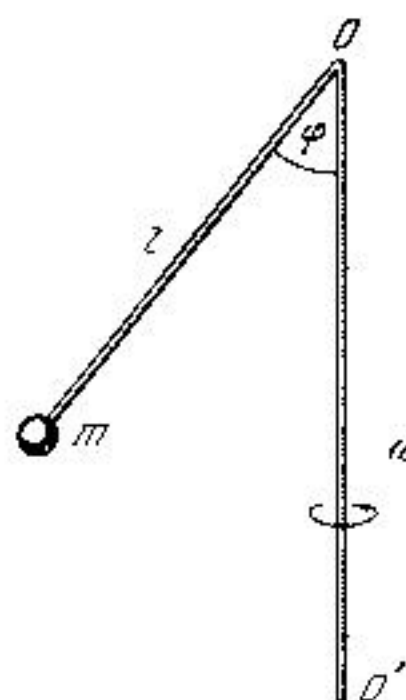


Fig. 84

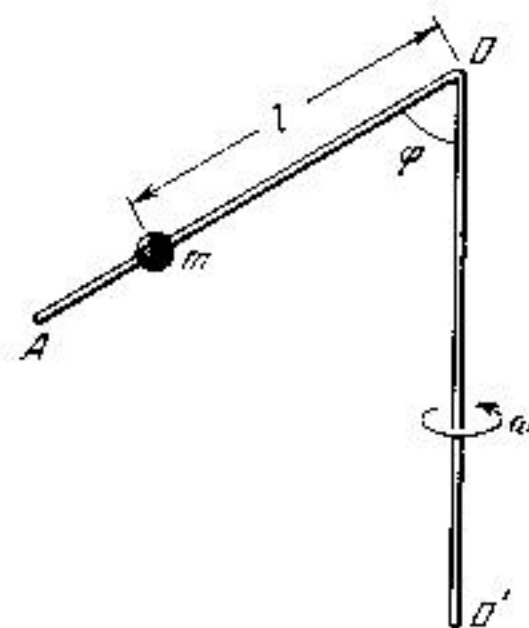


Fig. 85.

205. Uma barra de peso desprezível AOO' , dobrada como mostra a fig. 85, gira com velocidade angular ω relativamente ao eixo OO' . Na barra foi colocada uma conta de massa m . Determinar a que distância l do ponto O , a conta ficará em equilíbrio, se o coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a k .
206. Em uma barra vertical, que gira com velocidade angular ω , fixou-se um fio de comprimento l , no extremo do qual encontra-se um peso de massa m . Ao peso, por sua vez, fixou-se um outro fio de mesmo comprimento, que mantém em seu extremo um segundo peso de massa m . Demonstrar que, no movimento de rotação, o ângulo entre o primeiro fio e a vertical será menor que o ângulo entre a vertical e o segundo fio. O peso do fio pode ser desprezado.
207. Em uma barra leve fixaram-se dois pesos de massas m e M . A barra, através de uma articulação, está ligada ao eixo vertical OO' (fig. 86). O eixo OO' gira

com velocidade angular ω . Determinar o ângulo φ formado pela barra e a vertical.

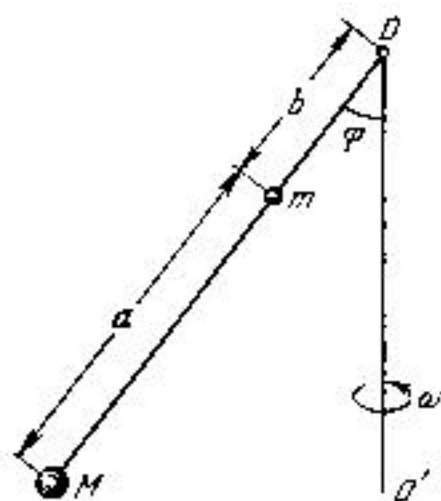


Fig. 86.

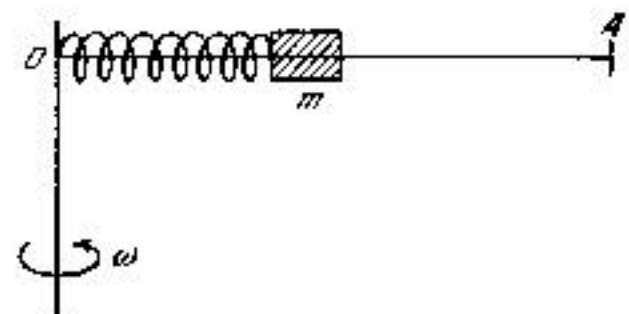


Fig. 87

208. Uma barra horizontal reta gira com velocidade angular constante em redor de um eixo vertical. Um corpo pode deslizar pela barra sem fricção. Inicialmente, o corpo é mantido na posição de equilíbrio, através de uma mola (fig. 87). O que ocorrerá com o corpo, se transmitirmos ao mesmo, uma velocidade inicial em redor da barra? O comprimento da mola solta pode ser desprezado.

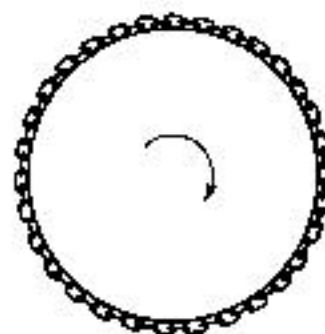


Fig. 88

209. Uma corrente metálica de comprimento $l = 62,8$ cm, cujos extremos estão unidos, foi colocada em um disco de madeira (fig. 88). O disco gira com uma velocidade $n = 60$ rotações por segundo. Determinar a tensão da corrente T , sendo sua massa $m = 40$ g.

210. Em um tubo de borracha, dobrado em forma de um anel, circula água com velocidade v (fig. 89). O raio do

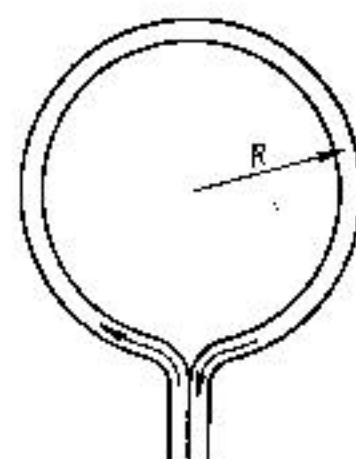


Fig. 89

anel é R , o diâmetro do tubo é $d \ll R$. Com que força se dilata o tubo de borracha?

211. Uma barra homogênea, de comprimento l e massa m , gira com uma velocidade angular ω , em um plano horizontal, em redor do eixo que passa pelo seu extremo. Encontrar a tensão da barra na distância x do seu eixo de rotação.
212. Uma esfera de massa m , fixada em uma barra leve, gira com velocidade constante v , em um plano horizontal (fig. 90). A energia cinética da esfera em um sistema

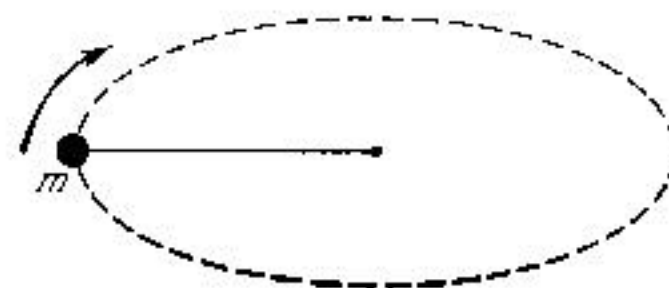


Fig. 90

de coordenadas fixo, relativamente ao eixo de rotação, é constante e igual a $mv^2/2$. Em relação a qual sistema de coordenadas que se move retilineamente, em um plano horizontal, com velocidade v em relação ao

eixo, a energia cinética varia, no decorrer do tempo, de zero até $\frac{1}{2} mc^2$. Qual é a causa dessa variação da energia?

213. Um aro, homogêneo e fino, rola em uma superfície horizontal com velocidade constante v . Como e sob a ação de quais forças varia a energia total de uma pequena parte AB , que se encontra em um dado momento no ponto mais alto do aro?

214. Um fio está enrolado em uma bobina pesada, a qual encontra-se em uma superfície horizontal áspera, onde pode-se rolar sem deslizamento. Se o fio for esticado na direção horizontal para a esquerda, a bobina também rolará para a esquerda. Se a direção do fio mudar (fig. 91), então, para um valor qualquer do ângulo α

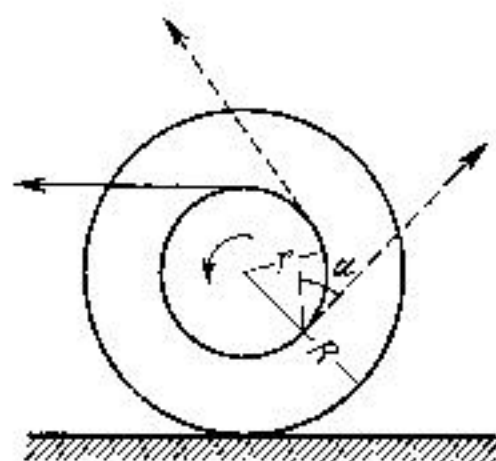


Fig. 91

entre a direção do fio e a vertical, a bobina rolará para a direita. Determinar este ângulo. O que ocorrerá com a bobina para o valor do ângulo dado? O raio da parte externa da mesma é R , da interna é r .

215. Encontrar a energia cinética de um aro de massa M e raio R , sendo que o aro movimenta-se, retilaneamente, com velocidade v e gira com uma velocidade angular ω em redor do eixo que passa através do centro.

216. Determinar a energia cinética da esteira de um trator, que se movimenta com velocidade v . A distância entre os eixos das rodas, sobre as quais está a esteira, é igual a l , o raio da roda é r . A unidade de comprimento da esteira pesa P .

217. Como saber, qual dos dois cilindros iguais em grandeza, é oco, se foram feitos de materiais desconhecidos com diferentes densidades? As massas dos cilindros são iguais.

218. Numa bobina de raio R enrolou-se uniformemente um cabo flexível (fig. 92). O peso da unidade de comprimento do cabo é ρ . O peso de todo o cabo é P . A bobina sem deslizamento move-se por inércia em um plano horizontal. O cabo desenrola-se e fica no plano. Inicialmente, quando todo o cabo estava enrolado na bobina, a velocidade do centro da bobina era igual a v . Desprezando o raio da seção transversal do cabo (em comparação com R) e a massa da própria bobina, calcular a velocidade do centro da bobina no momento em que se encontra no plano uma parte do cabo de comprimento α . Sob a ação de qual força varia a quantidade de movimento do cabo?

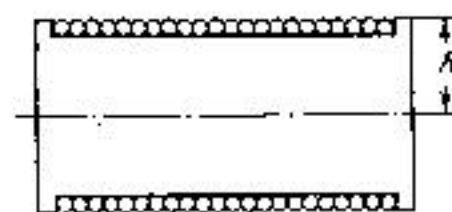


Fig. 92

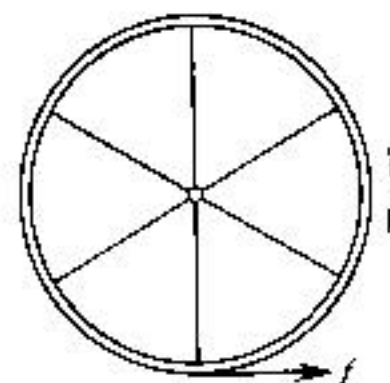


Fig. 93

219. Em uma roldana de raio r , que gira em redor de um eixo fixo, atua a força de fricção f (fig. 93). Determinar a variação da velocidade angular da roldana, em relação ao tempo, sendo que, no momento inicial, a velocidade angular era igual a ω_0 . A massa da roldana é m , a massa dos raios pode-se desprezar.
220. Um aro de raio r , que gira com velocidade angular ω_0 , foi colocado em uma superfície horizontal áspera. Determinar a velocidade v do centro do aro, depois de terminado o escorregamento. No momento inicial a velocidade do centro do aro era igual a zero.
221. A um aro de raio r , colocado em um plano horizontal áspero, foi transmitida, na direção horizontal, a velo-

cidade de translação v_0 . Determinar a velocidade angular de rotação do aro ω , após haver terminado o escorregamento do mesmo.

222. Um aro de raio r foi colocado em um plano horizontal áspero e gira com velocidade angular ω_0 . Ao aro foi transmitida uma velocidade de translação v_0 (fig. 94).

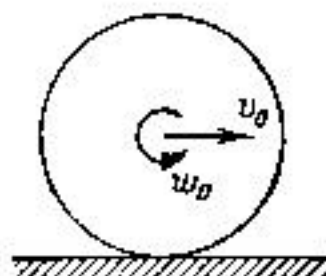


Fig. 94

Considerando, que a força de fricção de deslizamento é igual a f , determinar o caráter do movimento do aro.

223. Um tubo cilíndrico de raio r está fixo, através de raios, a dois aros de raio R . A massa de ambos os aros é igual a M . A massa do tubo e dos raios, em comparação à massa do aro M , pode ser desprezada. No tubo foi enrolado um fio, que passa através de uma roldana leve. No extremo do fio fixou-se um peso de massa m (fig. 95). Encontrar a aceleração do peso, a tensão do fio e a força de fricção entre os aros e o plano. (Considerar que os aros não deslizam). Determinar para quais valores do coeficiente de fricção os aros deslizarão.

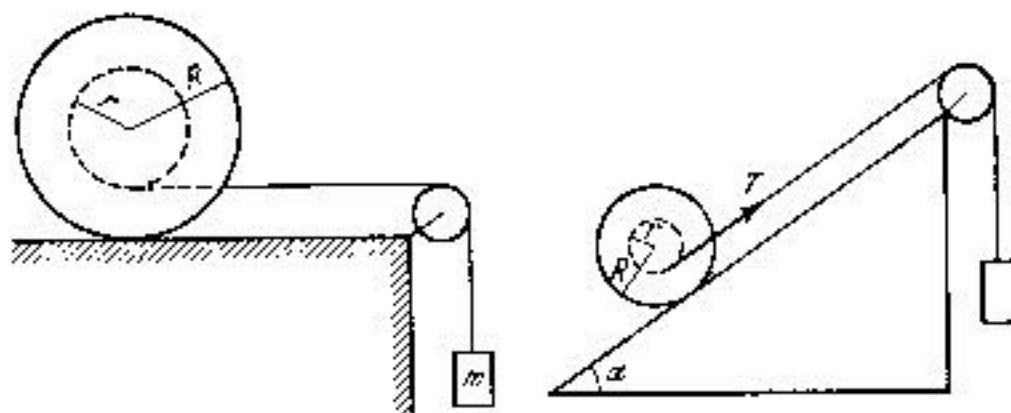


Fig. 95

Fig. 96

224. Em um plano inclinado situa-se uma bobina. Na bobina foi enrolado um fio, que passa através de uma

roldana leve e em cujo extremo livre prenden-se um peso de massa m (fig. 96). Supõe-se, que a massa da bobina M está distribuída uniformemente nos limites do raio R . Não existe fricção. Determinar para quais valores do ângulo de inclinação α o centro de gravidade da bobina ficará em repouso.

225. Uma tábua de massa M foi colocada sobre dois roletes cilíndricos homogêneos de raio R . Os roletes estão em um plano horizontal. No momento inicial o sistema está em repouso. Depois aplicou-se à tábua uma força Q na direção horizontal. Encontrar a aceleração da mesma, a grandeza da força de atrito entre os roletes e a tábua, e também entre os roletes e o plano horizontal. Considerar que não existe deslizamento. Os roletes têm a forma de duas barras cilíndricas de massa m cada uma.

226. Uma roldana de dois escalões compõe-se de dois aros finos, rigidamente unidos entre si, cujos raios são R e r , e as massas, correspondentemente, M_1 e M_2 . Em cada um dos escalões da mesma foi enrolado um fio, em cujos extremos foram colocados pesos de massa m_1 e m_2 (fig. 97). Encontrar a aceleração dos pesos

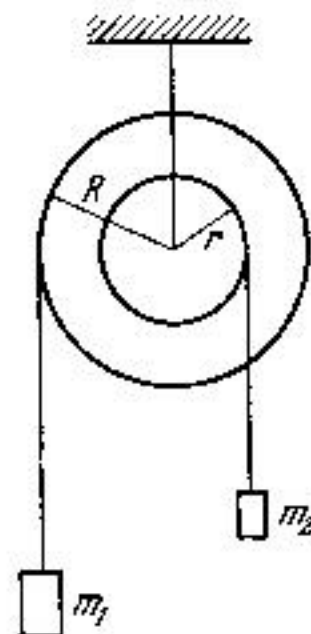


Fig. 97

m_1 e m_2 , a tensão dos fios e a força, com que o sistema atua no eixo da roldana.

227. Um cilindro fino e homogêneo de raio R e massa M , sem deslizamento, rola, sob a ação da força da gravidade, de um plano inclinado, que forma um ângulo α com a horizontal. Utilizando a lei de conservação da energia, determinar: 1) A velocidade do centro de gravidade e a velocidade angular de rotação do cilindro, após o tempo t do início do movimento. (Supõe-se, que o cilindro, no momento inicial, encontra-se em repouso). 2) A aceleração do centro de gravidade do cilindro.

§ 9. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

228. Por que a Terra imprime a todos os corpos uma mesma aceleração independente da massa dos mesmos?
229. Encontrar a grandeza e a dimensão, no sistema CGS, da constante gravitacional, observando que o raio médio da Terra $R = 6,4 \cdot 10^8$ cm e a massa da Terra $M = 6 \cdot 10^{27}$ g.
230. Em quais condições os corpos dentro de uma nave cósmica ficarão em estado de imponderabilidade, i.é., deixarão de exercer pressão nas paredes da cabina da nave?
231. Um pêndulo simples, constituído de uma barra e disco (fig. 98), está fixado em um quadro de madeira, que

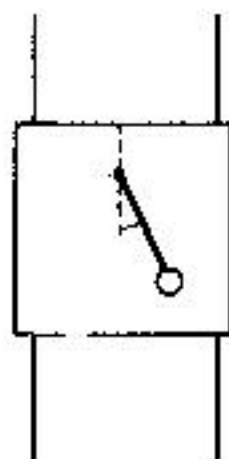


Fig. 98

pode cair livremente ao longo de dois arames que o dirigem. O pêndulo foi inclinado, em relação à posição de equilíbrio, num ângulo α e liberado. No momento, em que o pêndulo passa pela posição mais baixa, soltam o quadro, que, então, cai livremente. Como movi-

mentar-se-á o pêndulo relativamente ao quadro? A fricção e a resistência do ar podem ser desprezadas.

232. Um planeta move-se segundo uma elipse, em cujo foco está situado o Sol. Observando o trabalho da força gravitacional, indicar em que ponto da trajetória a velocidade do planeta será máxima e em que ponto será mínima?
233. Um satélite artificial da Terra move-se à altura $h = -670$ km, em órbita circular. Encontrar a velocidade de movimento do satélite.
234. Como varia, em relação ao tempo, a velocidade de um satélite artificial da Terra, que se movimenta nas camadas superiores da atmosfera?
235. Em uma órbita circular, a uma distância não muito grande um do outro e numa mesma direção movimentam-se dois satélites. Do primeiro satélite é necessário lançar um recipiente no segundo. Em que condição o recipiente alcançará mais rapidamente o segundo satélite: se é lançado na direção do movimento do primeiro satélite, ou na direção contrária ao movimento do mesmo? A velocidade do recipiente, relativamente ao satélite, é u e é muito menor que a velocidade do satélite v .
236. Calcular a massa M do Sol, conhecendo raio médio da órbita da Terra $R = 149 \cdot 10^6$ km.
237. Determinar a mínima distância h da superfície da Terra, do primeiro satélite artificial da mesma, lançado na URSS em 4 de outubro de 1957, sendo conhecidos os seguintes parâmetros: a distância máxima do satélite em relação à Terra $H = 900$ km; o período de rotação do satélite em redor da Terra $T = 96$ min; o semi-eixo maior da órbita lunar $R = 384\,400$ km; o período de movimento da Lua em redor da Terra $T = 27,3$ dias e o raio da Terra $R_0 = 6370$ km.
238. Na água existe uma bolha de ar de raio r e uma bola de ferro do mesmo raio. Haverá entre os mesmos atração, ou repulsão? Qual é a grandeza da força de interação entre eles? A distância entre os centros da bola e da bolha é igual a R .
239. Na água existem duas bolhas de ar de raio r . Haverá atração, ou repulsão entre as mesmas? Qual é a grandeza da força de interação? A distância entre as bolhas é R .

240. Uma bola de chumbo de raio $R = 50$ cm tem, dentro de si, uma cavidade esférica de raio $r = 5$ cm, cujo

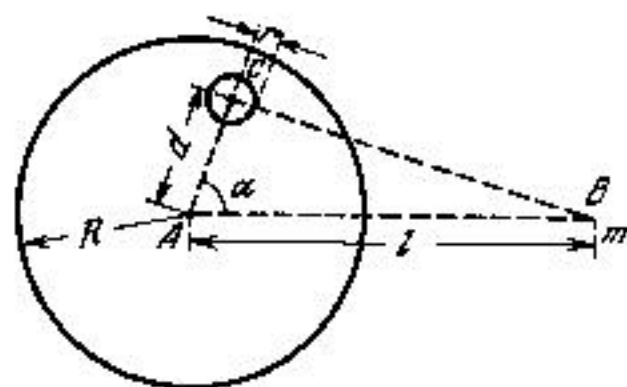


Fig. 99

centro encontra-se à distância $d = 40$ cm do centro da bola (fig. 99). Com que força a bola atrairá um ponto material de massa $m = 10$ g, que se encontra à distância $l = 80$ cm do centro da bola, se a linha, que une o centro da bola e da cavidade, forma um ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a linha, que une o centro da bola com o ponto material?

241. Um corpo de dimensões desprezíveis foi colocado dentro de uma esfera homogênea e fina. Demonstrar que a força de atração com que age a esfera no corpo é igual a zero para qualquer localização do corpo dentro da esfera.
242. Com que força o centro da Terra atrai um corpo de massa m , que se encontra em uma mina profunda, se a distância do corpo ao centro da Terra é igual a r ? A densidade da Terra considerar única em todos os pontos e igual a ρ .

§ 10. HIDRO E AEROSTÁTICA

243. Em um copo de água flutua, na posição vertical, um pedaço de madeira. Como variará o nível da água no copo, se o pedaço de madeira ficar na posição horizontal?
244. Um vaso de água foi colocado no extremo de uma tábua (fig. 100). Desequilibrar-se-á a tábua, se, na superfície

da água, for colocado um pedaço de madeira e sobre o mesmo um peso, de tal modo que ambos flutuem na superfície da água?

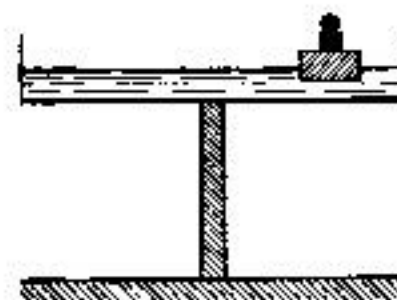


Fig. 100

245. Em um copo de água flutua um pedaço de gelo. Como variará o nível da água no copo, se o gelo derreter? Ver os seguintes casos:
- 1) o gelo é totalmente homogêneo;
 - 2) no gelo encontra-se uma pedra aprisionada;
 - 3) dentro do pedaço de gelo existe uma bolha de ar.
246. Um corpo homogêneo e sólido, colocado em um líquido com peso específico d_1 , pesa P_1 ; e colocado no líquido com peso específico d_2 , pesa P_2 . Determinar o peso específico d do corpo.
247. No meio de um grande lago congelado foi feita uma abertura. A espessura do gelo é igual a 10 m. Qual é o comprimento de uma corda necessária para tirar um balde de água?
248. Em uma xícara com água flutua uma caixa de fósforos dentro da qual existe uma pedra pequena. Variará o nível da água na xícara se a pedra foi tirada de dentro da caixa e colocada na água?
249. Um barco atravessa uma comporta, elevando-se até o maior nível na câmara da mesma, para onde a água é bombeada desde o nível inferior (fig. 101). Em qual caso as bombas realizam um maior trabalho: quando na câmara encontra-se um navio grande, ou um barco pequeno?
250. De duas lâminas homogêneas e de mesma espessura, com pesos específicos $3,5$ g/cm³ e 2 g/cm³, foram cortados um quadrado de lado a e um retângulo de lados a e $2a$, sendo que o quadrado foi cortado do material mais pesado. O quadrado e o retângulo foram colados,

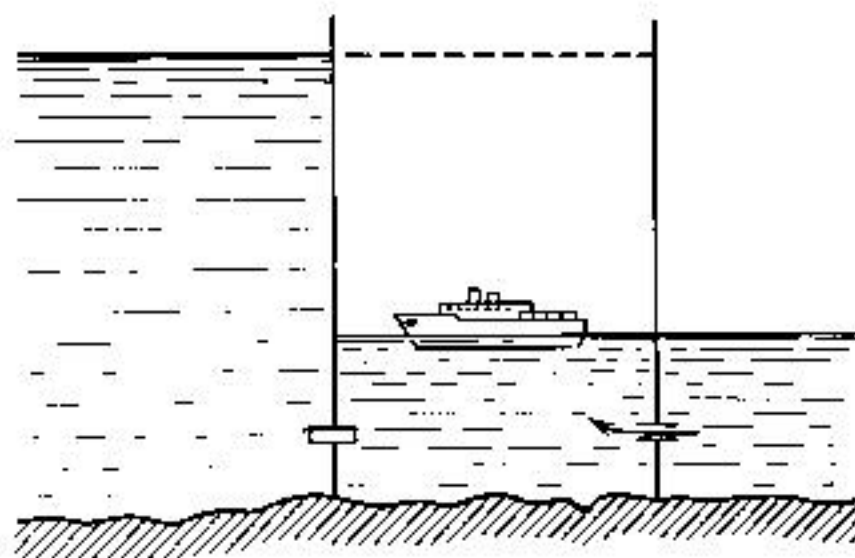


Fig. 101

na forma da figura 1 e colocados no fundo de um recipiente vazio (fig. 102). O que ocorrerá se enchermos o recipiente com água?

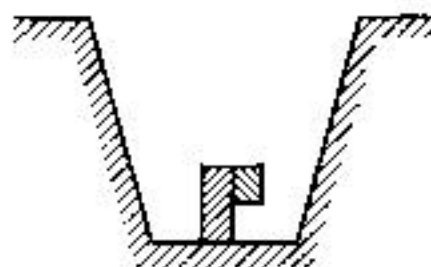


Fig. 102

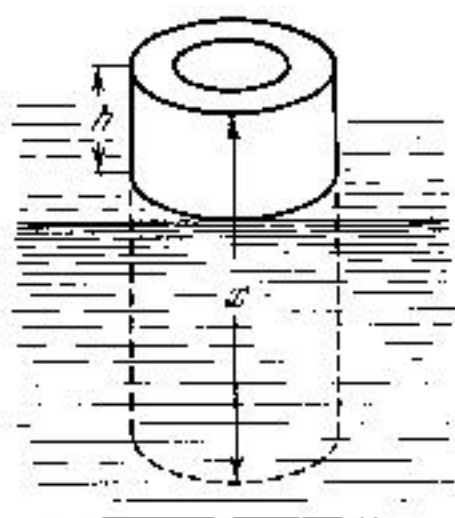


Fig. 103

251. Um tubo flutua na água em posição vertical (fig. 103). A altura do tubo, que sai fora da água, é $h = 5$ cm. Dentro do tubo foi colocado óleo de peso específico $d = 0,9$ g/cm³. Qual deverá ser o comprimento do tubo para enchê-lo totalmente de óleo?
2. Um pistão de peso $P = 30$ N tem a forma de um disco redondo de raio $R = 4$ cm com abertura, na qual foi

colocado um tubo de paredes finas e raio $r = 1$ cm. O pistão pode ser ajustado e sem atrito em um copo e inicialmente ficar no fundo do mesmo. A que altura H eleva-se o pistão, se introduzirmos no tubo $m = 700$ g de água?

253. Uma bola de borracha, de massa m e raio R , submerge-se em água a uma profundidade h , e solta-se. Em que altura, a partir da superfície da água, saltará a bola? Não se considera a resistência da água e do ar no movimento.
254. Uma tábua, que tem um dos extremos fora da água, apoia-se em uma pedra. A tábua tem comprimento l . Uma parte da tábua de comprimento a encontra-se

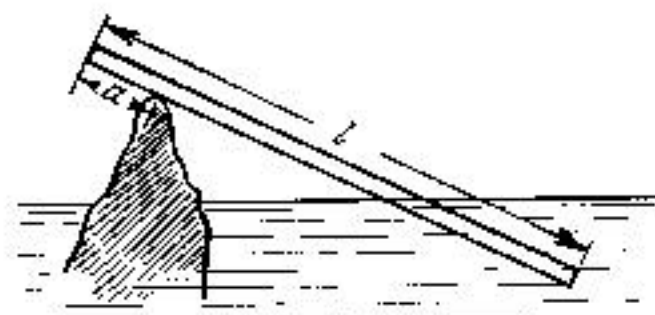


Fig. 104

acima do ponto de apoio (fig. 104). Que parte da tábua encontra-se submersa, se o peso específico da madeira é d ?

255. Um homem, que trazia uma câmara de ar, resolveu facilitar seu trabalho, utilizando a força de empuxo do ar (pela lei de Arquimedes). Para isto o homem bombeou a câmara, aumentando seu volume. Obteve com isto o homem seu objetivo?
256. Em uma balança analítica exata, que se encontra em uma câmpula de cristal, pesam um corpo. Variará o resultado da pesagem, se for evacuado o ar da câmpula?
257. Qual é o erro cometido na pesagem de um corpo de volume $V = 1$ l, se ao pesarmos o mesmo no ar, utilizarmos pesos de cobre iguais a: $M_1 = 800$ g? O peso específico do cobre é $d_1 = 8,8$ g/cm³, do ar é $d_a = 1,29$ g/l.

258. Calcular o peso da atmosfera da Terra.
 259. Em alto mar caia uma garrafa aberta. Aumentará, ou diminuirá a capacidade da garrafa, devido à pressão da água?
 260. Um recipiente tem a forma de um prisma (fig. 105). O fundo do recipiente é um retângulo, com dimensões a e b . Encheram o recipiente de líquido, cuja densidade é ρ , até uma altura h . Determinar a força com que as paredes laterais atuam sobre o fundo do recipiente. O peso das paredes é desprezado.

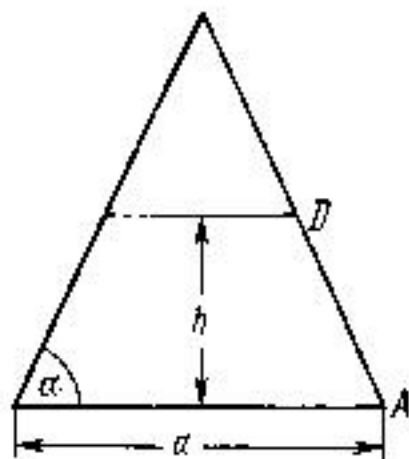


Fig. 105

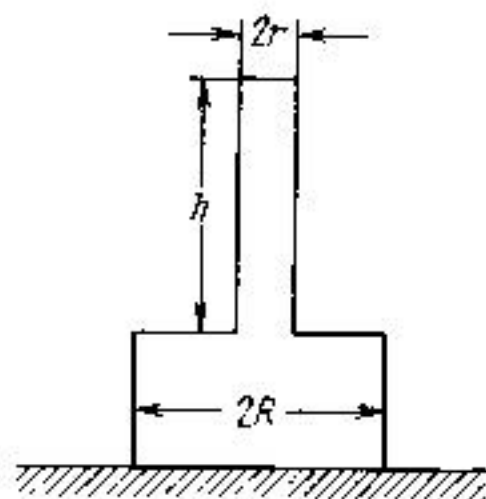


Fig. 106

261. Um recipiente sem fundo cuja forma e dimensões estão representadas na fig. 106, encontra-se em uma mesa. Os extremos do recipiente estão bem ajustados à superfície da mesa. O peso do recipiente é P . Coloca-se um líquido no recipiente. Depois que o nível do mesmo atinge uma altura h , o recipiente sob a ação do líquido levanta. Determinar a densidade ρ do líquido colocado.
 262. Um recipiente cônico, sem fundo, está sobre uma mesa. Os extremos do recipiente estão bem ajustados à superfície da mesma. Depois que o nível do líquido atinge uma altura h no recipiente, a pressão da água ergue o recipiente. O raio da base inferior do recipiente (que é maior) é igual a R , o ângulo entre a aresta do cone e a vertical é α , o peso do recipiente é P . Qual é a densidade do líquido colocado?

263. Três recipientes, com fundo falso, foram colocados na água, a uma mesma profundidade. O fundo de cada um dos vasos (fig. 107) cairá, se colocarmos nos vasos 1 kg de água. Cairão os fundos, se colocarmos

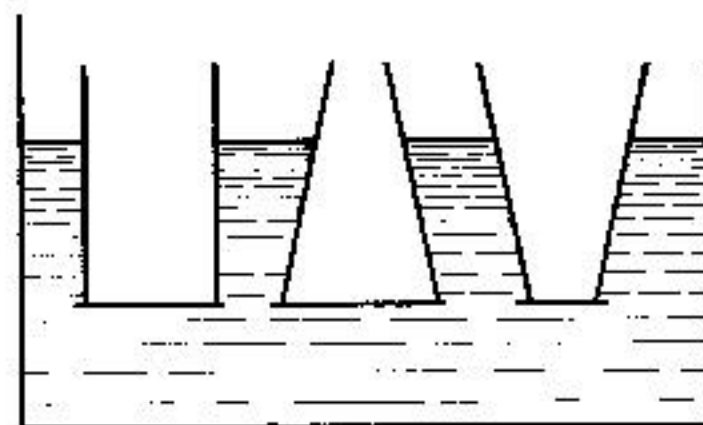


Fig. 107

nos recipientes 1 kg de óleo? Se colocarmos 1 kg de mercúrio? Se colocarmos em cada vaso um peso de 1 kg?

264. Em dois vasos cilíndricos, que se comunicam, foi colocado mercúrio e sobre o mesmo água. O nível da água em ambos os vasos é igual. Seriam iguais, o nível de água e de mercúrio, se em um dos vasos colocássemos um pedaço de madeira e no outro, uma quantidade de água equivalente, em peso, ao pedaço de madeira? Analisar casos dos vasos que tenham iguais e diferentes seções.
 265. Em dois vasos cilíndricos que se comunicam, de diferentes áreas das seções transversais, foi colocado mercúrio. No vaso mais largo foi colocado um cubo de ferro de volume V , e, como consequência, o nível do mercúrio neste vaso subiu. Depois, nesse mesmo vaso, colocou-se água, até o momento em que o nível de mercúrio atingisse a posição anterior. Encontrar a altura da coluna de água h , se a área da seção transversal do vaso fino é igual a S_1 .
 266. Em balanças, de muita sensibilidade, foram equilibrados dois barômetros de mercúrio: um em forma de taça (com um prato grande) e outro em forma de U

(fig. 108). Os barômetros foram feitos de um mesmo material, têm o mesmo diâmetro dos tubos e contêm a mesma quantidade de mercúrio. A distância entre as partes fechadas do tubo e o nível superior do mercúrio nos mesmos é igual. Como variará o equilíbrio dos pesos, quando aumentar-se a pressão atmosférica?

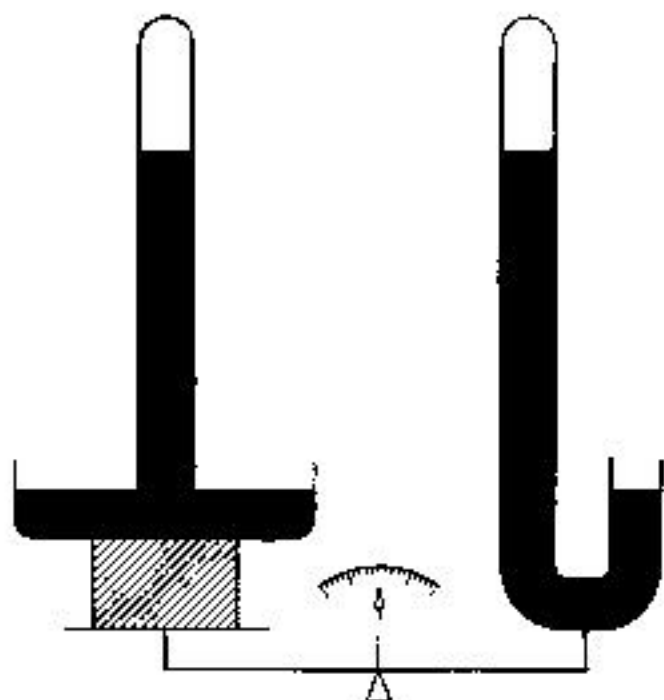


Fig. 108

267. Um colchão de ar está cheio até uma determinada pressão, que ultrapassa a atmosférica. Em qual caso a pressão do ar no colchão será maior: quando o homem fica em pé sobre o mesmo, ou quando ele deita-se?
268. A roda de um automóvel foi construída do seguinte modo: no aro metálico da roda colocou-se uma câmara

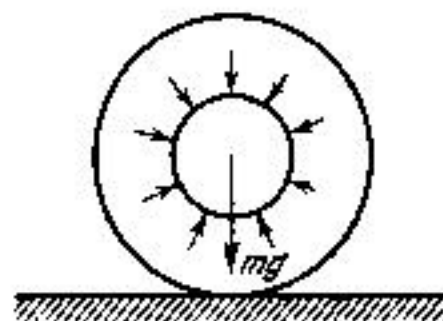


Fig. 109

de borracha, encerrada dentro de um pneu. Depois encheu-se a câmara de ar. A pressão do ar, na parte inferior e superior da câmara, é igual. Além da pressão do ar, no aro atua a força de gravidade (fig. 109). Por que o aro não desce? O que mantém o aro em estado de equilíbrio?

269. Uma caldeira a vapor é composta de uma parte cilíndrica e de dois fundos semi-esféricos (fig. 110). Os raios da parte cilíndrica e de ambos os fundos da caldeira são iguais. A espessura da parede da parte cilíndrica é



Fig. 110.

0,5 cm. Todas as partes da caldeira foram feitas de um mesmo material. Qual é a espessura, que deverão ter as paredes do fundo, a fim de que a resistência de todas as partes da caldeira seja igual?

270. Que forma deve ter uma caldeira a vapor, a fim de que, para uma dada espessura das paredes, a resistência da caldeira seja a maior?
271. Um vaso de água cai com aceleração $a < g$. Como varia a pressão no vaso em função da profundidade?
272. Um vaso com um corpo que flutua no mesmo, cai com aceleração $a < g$. Emergirá o corpo nessas condições?
273. Uma cisterna, cuja forma se vê na fig. 111, está cheia de água e move-se com aceleração a na direção horizontal. Determinar a força com que a água atua sobre a tampa da cisterna.

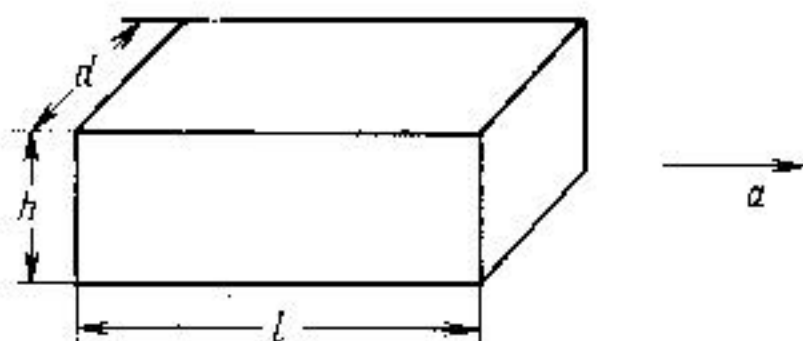


Fig. 111

274. No problema anterior determine a força com que a água atua sobre o fundo da cisterna.
275. Em um carrinho situa-se um tanque de forma cúbica, totalmente cheio de água (fig. 112). O carrinho movimenta-se com aceleração constante a . Determinar a

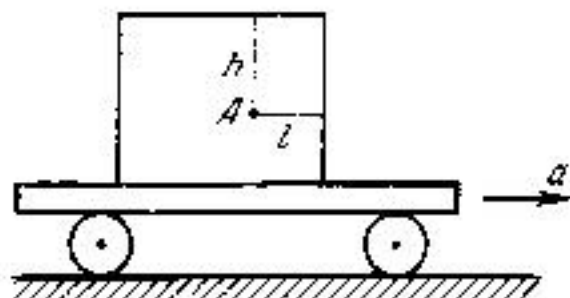


Fig. 112

pressão na profundidade h , no ponto A , distante da parede frontal em uma distância l , se o tanque está fechado hermeticamente por uma tampa. (No movimento uniforme a tampa não exerce pressão na água).

276. Um depósito retangular sem tampa (as dimensões estão assinaladas na fig. 113) move-se com aceleração a .

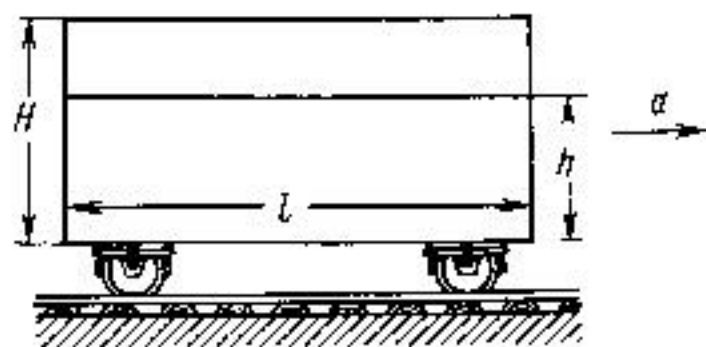


Fig. 113

O depósito está cheio de água, até uma altura h . Qual deve ser a aceleração a , para que a água comece a entornar do depósito?

277. Coloca-se um vaso com abertura no fundo em um carrinho. A massa do vaso com o carrinho é M , a área da base do vaso é S . Com que força F é necessário puxar o carrinho, para que no vaso fique a máxima quantidade de água? As dimensões do vaso são indicadas na fig. 114. Não existe fricção.

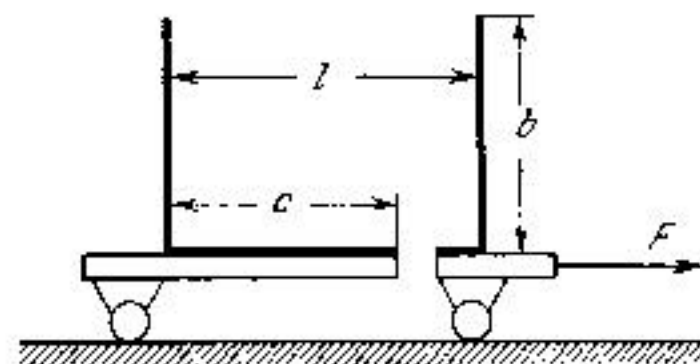


Fig. 114

278. Pode-se, com a ajuda de um sifão, bombear água sobre uma parede de 20 m de altura?
279. Um vaso, representado na fig. 115, está totalmente cheio de água. O que ocorrerá se tirarmos a rolha A ? O raio do orifício é cerca de 0,5 cm.

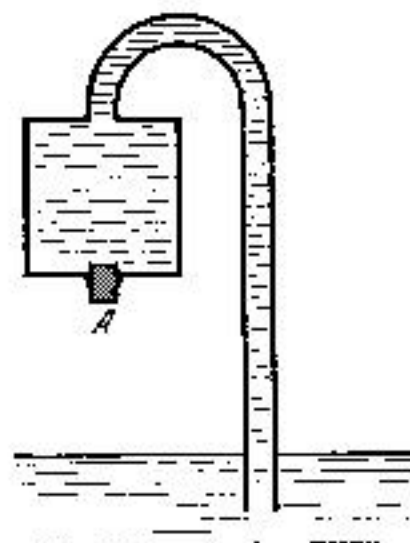


Fig. 115

280. Quatro pistões de uma bomba foram feitos com partes de tubos de diâmetros grandes e pequenos. As bombas elevaram a água a uma mesma altura $H - h$ (fig. 116).

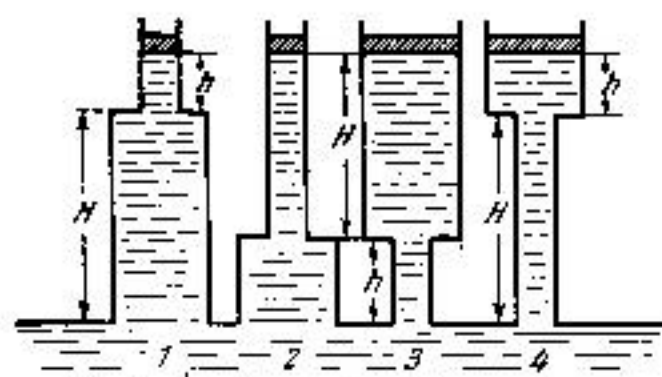


Fig. 116

Qual dos pistões é necessário puxar com maior força para mantê-lo em equilíbrio? O peso dos pistões é desprezado.

281. Sugeriu-se o seguinte projeto do perpetuum mobile (fig. 117). Dividia-se um recipiente hermético em

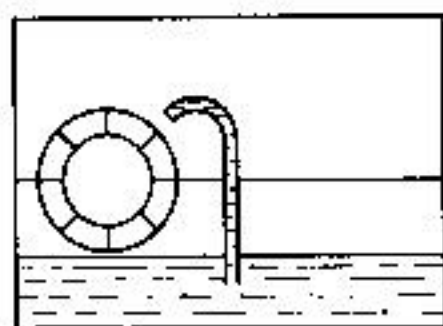


Fig. 117

duas partes por uma parede hermética, através da qual colocaram um tubo e uma turbina de água de construção especial. As câmaras da turbina têm tampas, que se abrem e fecham automaticamente. A pressão p_1 , na parte inferior do recipiente, é maior do que a pressão p_2 na parte superior, e a água sobe pelo tubo, enchendo a câmara aberta da turbina. Depois disto, a câmara fecha-se e a roda gira. Na parte infe-

rior do recipiente, a câmara abre-se automaticamente e a água volta. Depois, novamente, a câmara fecha-se hermeticamente, etc. Por que tal projeto não funcionará eternamente?

282. Sugeriu-se a seguinte variante da construção descrita no problema 281. As câmaras herméticas (fig. 118)

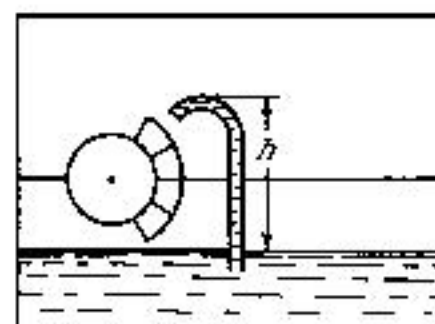


Fig. 118

enchem-se de água na parte direita de roda e descem. Em baixo, as câmaras abrem-se e diferenciando-se do projeto anterior, as paredes da câmara fecham internamente na roda. Na parte superior do recipiente, as paredes abrem-se e enchem-se de água. Nos demais detalhes o perpetuum mobile é construído como o descrito anteriormente. Por que este também não funcionará?

283. Por que, no período de ascensão de um globo estratosférico é obrigatório apanhar um lastre? O peso desnecessário em verdade diminui o «teto» do globo estratosférico.

§ 11. HIDRO E AERODINÂMICA

284. Na parede de um recipiente com água foram feitos dois orifícios, um sobre o outro, com área $S = 0,2 \text{ cm}^2$ cada um. A distância entre os orifícios é $H = 50 \text{ cm}$. No recipiente coloca-se, em cada segundo, $Q = 140 \text{ cm}^3$ de água. Encontrar o ponto de encontro dos jorros de água que saem dos orifícios.
285. Em uma superfície lisa localiza-se um recipiente amplo com água. O nível da água no recipiente é h , o peso do recipiente junto com a água é Q . Na parede lateral do recipiente, perto do fundo, existe uma abertura (com

bordas arredondadas), fechada por uma rolha de área S . Para qual valor do coeficiente de fricção, entre o fundo e a superfície da mesa, o recipiente entrará em movimento, ao tirarmos a rolha?

286. Na saída do jato de líquido de um recipiente, através de um orifício de área S_0 , a força, que atua na parede com orifício, é menor em $2pS_0$ do que a força, que atua na parede oposta (ver o problema 285). Se no orifício colocar um tubo, como mostra a fig. 119,

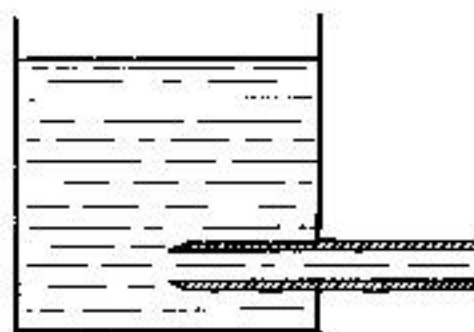


Fig. 119

então, a diferença de forças, que agem nas paredes opostas, torna-se, por exemplo, igual a pS_0 , uma vez, que graças ao tubo, o líquido não terá movimento junto à parede.

Por outro lado, a variação da quantidade de movimento do líquido, por unidade de tempo, na saída do recipiente, sempre é igual a $2pS$, onde S é a área da seção transversal do jato. Como relacionar entre si estes fatos?

287. Um jato de água, que sai de um tubo de diâmetro $d = 1$ cm com velocidade $v = 1$ m/s, choca-se com uma parede vertical. Determinar a força que age na parede, considerando, que tubo está dirigido perpendicularmente à parede e despreza-se a água que se espalha.
288. Em um tubo, dobrado em ângulo reto, de seção transversal S , passa um gás com velocidade v . A densidade do gás é ρ . Com que força o gás atua no tubo? A compressão do gás e a fricção são desprezadas.
289. Encontrar a força que age na pá inferior de uma roda (fig. 120) considerando, que o jato após o choque

com a pá continua o movimento com a velocidade da pá. A altura da pressão da água é h , o raio da roda é R , a velocidade angular de rotação da roda é ω e a área da seção transversal do jato é S .

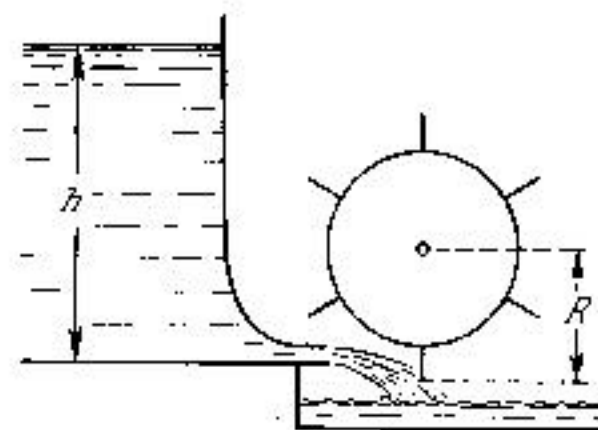


Fig. 120

290. Um navio sofreu uma grande ruptura, na parte submersa (fig. 121). Para qual lado deslocar-se-á como consequência disto?

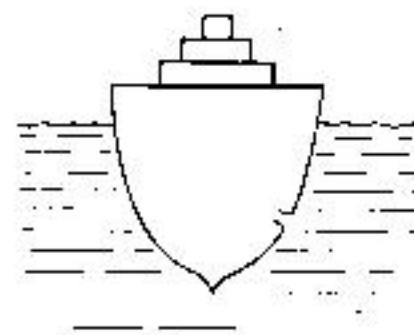


Fig. 121

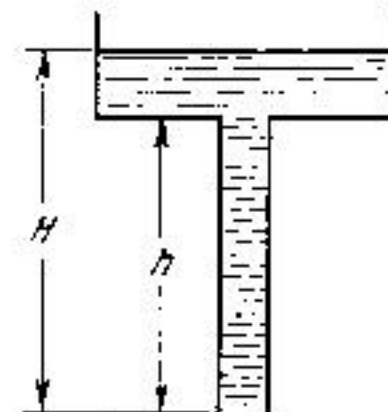


Fig. 122

291. De um recipiente largo, através de um tubo fino, começa a sair um líquido (fig. 122). Como estão distribuídas, pela vertical, a pressão e a velocidade do líquido no recipiente e no tubo?
292. Um recipiente com água, descrito no problema anterior, colocou-se em uma balança de tensão. A parte inferior do tubo está fechada por uma rolha. Como variará a

indicação dos pesos, no primeiro instante, quando tirou-se a colher e o líquido começou a escorrer?

293. Em um dos pratos de uma balança, existe um recipiente com água (fig. 123). A balança está em equilíbrio. Desequilibrar-se-á, caso abrimos a torneira? (A água que sai do recipiente, cai no mesmo prato, em que se encontra o recipiente.)



Fig. 123

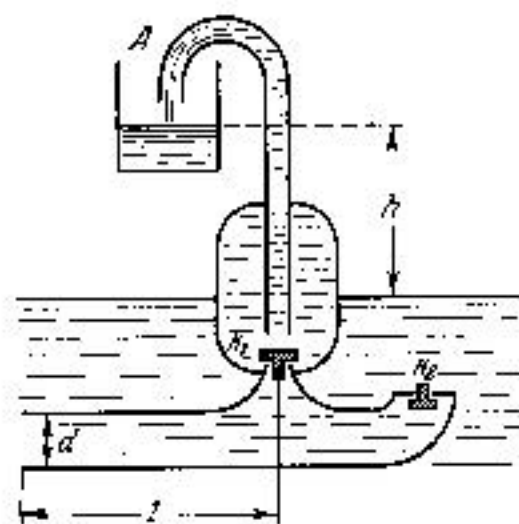


Fig. 124

294. Na fig. 124 está representada uma prensa hidráulica (é uma construção de autoelevação de água). O princípio do funcionamento baseia-se no fenômeno do choque hidráulico i.é., o crescimento brusco da pressão no líquido que corre por um tubo, pela sua parada rápida, por exemplo, ao fechar-se uma válvula, que permite a saída da água do tubo.

O tubo de comprimento $l = 2$ m e diâmetro $d = 20$ cm, foi colocado numa corrente, cuja velocidade é $v = 400$ cm/s. Suponhamos, que, inicialmente, a válvula K_2 esteja aberta e a válvula K_1 fechada. O aumento brusco da pressão obriga a válvula K_1 a abrir-se (então, a válvula K_2 fecha-se) e a água dirige-se para cima, em direção ao recipiente A. A pressão cai, a válvula K_1 fecha-se e a válvula K_2 abre-se. A água no tubo entra em movimento e repete-se a sequência anteriormente descrita. Determinar a quantidade de água, elevada pela prensa em 1 hora, a uma altura

$h = 30$ m, sabendo-se, que cada válvula abre-se 30 vezes por minuto.

295. Por ocasião das tempestades, quando a velocidade do vento atinge grandezas significativas, os tetos das construções rompem-se. Observaram-se dois tipos de ruptura de tetos: 1) Se o teto é mais forte nos pontos A e B, do que no ponto C, então a corrente de ar abre o teto pela linha que passa no ponto C (fig. 125, a). 2) Se o teto está bem fixo no ponto C e pior nos pontos A e B, então, as massas de ar inicialmente elevam o teto e depois deslocam-no para os lados (fig. 125, b). Como explicar este fenômeno?

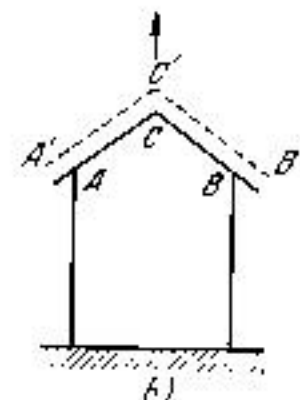
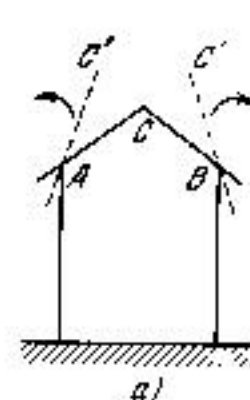


Fig. 125



Fig. 126

296. Por que uma bola leve de celulóide colocada em um jato de ar, ou de água, que sai com grande velocidade de um tubo, com um orifício pequeno, planará livremente neste jato (fig. 126)?
297. Um aparelho de demonstrações, representado na fig. 127, constitui-se de dois discos A e B. No centro do disco A existe um orifício ligado através de um tubo com um balão de ar comprimido. O disco B está pendurado em três barras pequenas, ao longo das quais ele pode deslocar-se livremente pela vertical. Caso se faça circular um jato de ar comprimido pelo tubo, então, o disco inferior começa a tocar o superior. Explicar o princípio deste fenômeno.

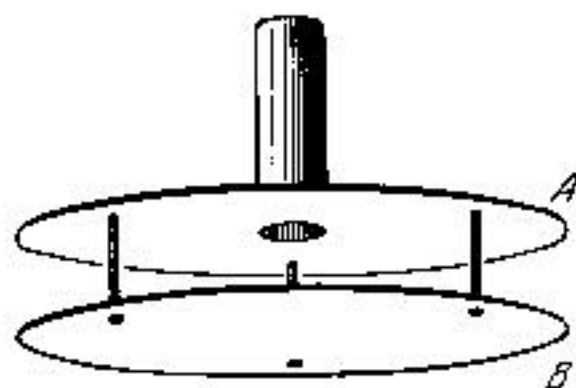


Fig. 127

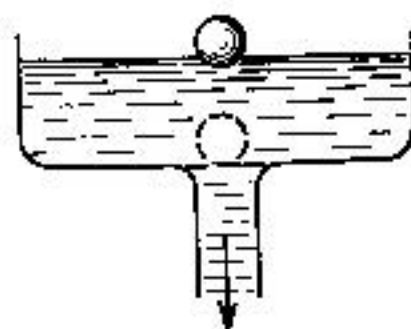


Fig. 128

298. No fundo de um recipiente amplo existe um tubo fino, pelo qual a água, que enche o recipiente, pode sair (fig. 128). Entre o recipiente e o tubo colocou-se uma rede. Se uma bola leve for colocada no fundo do recipiente, no momento, em que a água começa a escorrer, então, a bola não flutuará. Se pararmos o corrimento da água do tubo, então, a bola imediatamente flutua. Por que? (Esta experiência pode ser comprovada, facilmente, em uma pia de cozinha utilizando bolas de tênis de mesa).
299. Uma bomba constitui-se de um cilindro, situado horizontalmente, com um pistão de área S e orifício de saída, de área s , que se encontra no eixo do cilindro. Determinar a velocidade de saída do jato da bomba, se o pistão, sob ação da força F , desloca-se com velocidade constante. A densidade do líquido é ρ .
300. No problema 299 para $s \rightarrow S$, a velocidade v torna-se indefinidamente maior, mesmo para uma pequena força F . Explicar com que se relaciona este resultado paradoxal.
301. Os relógios de água (clepsidra), da antiga Grécia, constituíam-se de recipientes com um orifício pequeno O (fig. 129). O tempo marcava-se pelo nível da água no recipiente. Qual deve ser a forma do recipiente, a fim de que a escala do tempo fosse uniforme?
302. Um vaso cilíndrico com líquido gira com velocidade angular ω , em redor de um eixo vertical (fig. 130).

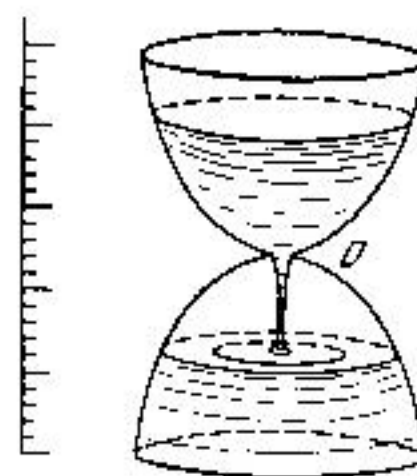


Fig. 129

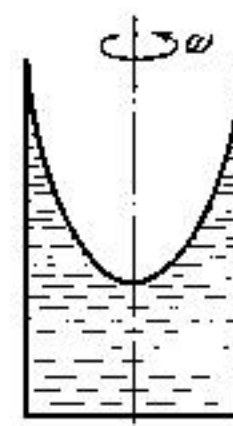


Fig. 130

Determinar a variação da pressão na seção horizontal do recipiente, em dependência da distância do eixo de rotação.

Indicação. Utilizar o método exposto na solução do problema 211.

303. Encontrar a forma da superfície de um líquido, em um recipiente cilíndrico, que gira com velocidade angular ω em redor do eixo vertical (i.é., encontrar a altura do nível do líquido, em dependência da distância do eixo de rotação).
304. Por que após mexer o chá com uma colher as folhas de chá juntam-se no meio do copo?

Capítulo II

Calor. Física molecular

§ 12. DILATAÇÃO TÉRMICA DOS CORPOS SÓLIDOS E LÍQUIDOS

305. Em uma roda de madeira de diâmetro 100 cm, é necessário adaptar um anel de ferro, cujo diâmetro é 5 mm menor, que o diâmetro de roda. Em quantos graus é necessário elevar a temperatura do anel? O coeficiente de dilatação linear do ferro é $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ graus⁻¹.
306. Por que nas construções de concreto, como armadura usa-se somente ferro (concreto armado), e outros metais, por exemplo, duralumínio, não são utilizados?
307. A fim de medir-se a temperatura do corpo humano, é necessário manter o termômetro debaixo do braço, durante de 5 a 8 min. Ao mesmo tempo, pode-se fazê-lo voltar à medida inicial, imediatamente após a medida da temperatura. Por que?
308. À temperatura t_1 , a altura da coluna de mercúrio, medida em uma escala de latão, é igual a H_1 . Qual é a altura H_0 , que terá a coluna de mercúrio para $t = 0^\circ \text{C}$? O coeficiente de dilatação linear do latão é α e o coeficiente de expansão volumétrica do mercúrio é β .
309. Como medir com um termômetro clínico a temperatura do corpo de um homem, se a temperatura do meio ambiente é -42°C ?
310. Determinar o comprimento de uma régua de ferro e de uma régua de cobre l'_0 e l''_0 , a $t = 0^\circ \text{C}$, se a diferença das mesmas para $t_1 = 50^\circ \text{C}$ e $t_2 = 450^\circ \text{C}$ são iguais em módulo e iguais a $l = 2$ cm. O coeficiente de dilatação linear do ferro é $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ graus⁻¹, do cobre é $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ graus⁻¹.
311. O período das oscilações de um pêndulo depende do comprimento, o qual varia com a temperatura. De

que modo poderia ser suspenso o pêndulo, a fim de que seu comprimento não variasse com a temperatura?

312. À temperatura $t_0 = 0^\circ \text{C}$, colocam em um balão de vidro $m_0 = 100$ g de mercúrio. Para $t_1 = 20^\circ \text{C}$ colocam no balão $m_1 = 99,7$ g de mercúrio. (Em ambos os casos considerar a temperatura do mercúrio igual à temperatura do balão.) Encontrar, por meio desses dados, o coeficiente de dilatação linear do vidro α , sabendo que o coeficiente de expansão volumétrica do mercúrio é $\beta_1 = 18 \cdot 10^{-5}$ graus⁻¹.
313. Um relógio, com pêndulo metálico, adianta $\tau_1 = 5$ s por dia a uma temperatura $t_1 = +15^\circ \text{C}$ e atrasa $\tau_2 = 10$ s por dia a uma temperatura $t_2 = 30^\circ \text{C}$. Encontrar o coeficiente α de dilatação térmica do metal do pêndulo, considerando, que o período de oscilação do pêndulo é $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (l é o comprimento do pêndulo, g é a aceleração da queda livre).

§ 13. LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA. CONDUTIBILIDADE TÉRMICA

314. Em um carrinho de massa M , que se move em uma reta com velocidade constante igual a v_0 , jogam para cima um ladrilho de massa m . Determinar a quantidade de calor desprendida.
315. Ao longo de um cordão de peso desprezível e de comprimento l_0 (fig. 131) desliza uma arruela. A força de atrito, que atua entre o cordão e a arruela, é constante e igual a f . O coeficiente de elasticidade do cordão é conhecido e igual a k . Encontrar a quantidade de calor desprendida Q .
316. Uma geladeira, que gasta w watts, em τ minutos, transformou em gelo q litros de água a uma temperatura de t graus. Qual é a quantidade de calor emitida pela geladeira ao quarto, nesse intervalo de tempo, considerando que a capacidade térmica da geladeira pode ser desprezada?
317. Diminuiria a temperatura no quarto, se abrissemos a porta da geladeira em funcionamento?
318. É mais fácil aquecer um quarto, utilizando a energia da corrente elétrica através de aparelhos de aquecimento elétrico. É esta a forma energética mais vantajosa?

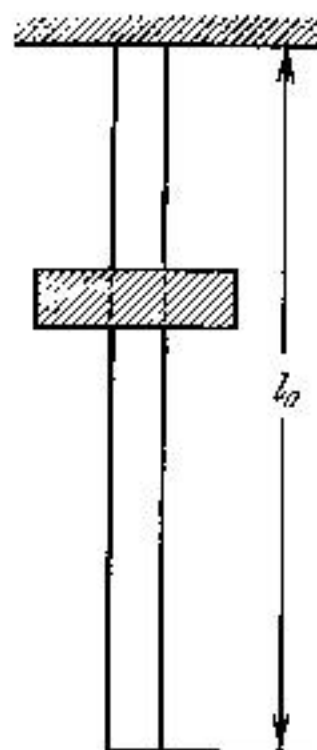


Fig. 131

319. Dissolvem-se quantidades iguais de sal, em dois vasos iguais com água. Em um caso, toma-se o sal em forma de um grande cristal e no outro caso, em forma de pó. Em que caso a temperatura da solução, após a total dissolução do sal, será maior, se, antes da dissolução do sal na água, ambos encontravam-se a uma mesma temperatura?

320. Sabe-se, que para aquecermos, ou esfriarmos a água, se levarmos em conta algumas medidas, então, obteremos água na forma líquida para temperaturas menores que 0°C e maiores do que $+100^\circ\text{C}$.

Em um calorímetro de capacidade térmica igual a $q = 1700\text{ J/grauss}$, encontra-se $m_1 = 1\text{ kg}$ de água resfriada até $t_1 = -10^\circ\text{C}$. Junto colocam $m_2 = 100\text{ g}$ de água, aquecida até $t_2 = +120^\circ\text{C}$. Qual é a temperatura estabelecida no calorímetro?

321. Uma lâmpada de aquecimento que gasta $N = 54\text{ watts}$, foi submersa em um calorímetro transparente que contém $V = 650\text{ cm}^3$ de água. Em $\tau = 3\text{ min}$ a água se aquece em $t = 3,4^\circ\text{C}$. Que parte da energia Q , gasta

pela lâmpada, é emitida ao exterior em forma de energia radiante pelo calorímetro?

322. A área de uma parede de ladrilhos, que sai à rua, é: $S = 12\text{ m}^2$ e a espessura é $d = 1\text{ m}$. A temperatura do ar exterior é $T = -15^\circ$ e a temperatura do ar no quarto é $T = +15^\circ$. Qual é a quantidade de calor, que se desprende do quarto no período de 24 horas? O coeficiente de condutibilidade térmica do ladrilho é $k = 1,3\text{ J/(m}\cdot\text{s}\cdot\text{graus)}$.

323. Uma parede constitui-se de duas lâminas sobrepostas, feitas de diferentes materiais. Os coeficientes de condutibilidade térmica e as espessuras das lâminas são iguais a k_1, d_1 e k_2, d_2 respectivamente (fig. 132). As temperaturas das superfícies externas das paredes são iguais a T_1 e T_0 ($T_0 > T_1$) e mantêm-se constantes. Determinar a temperatura T_2 na superfície de divisão das lâminas.

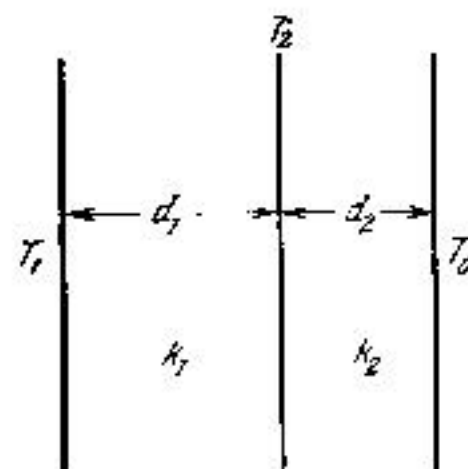


Fig. 132

324. Considerando, no problema 323, que as lâminas têm a mesma espessura d , determinar o coeficiente de condutibilidade térmica da parede.

325. Uma parede é composta por barras alternadas do comprimento d e coeficientes de condutibilidade térmica k_1 e k_2 (fig. 133). As áreas da seção transversal das barras são iguais. Determinar o coeficiente de condutibilidade térmica da parede.

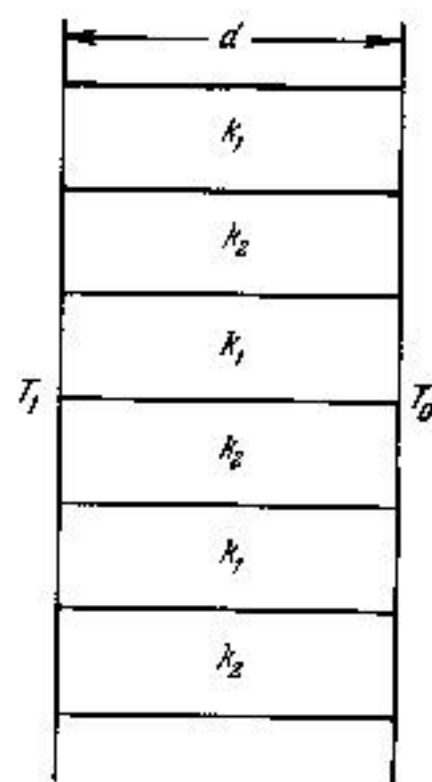


Fig. 133

326. Duas paredes *A* e *B*, de igual espessura, são feitas de diferentes materiais, como está indicado nas figuras 134 e 135. Em que caso o coeficiente de condutibilidade térmica é maior?

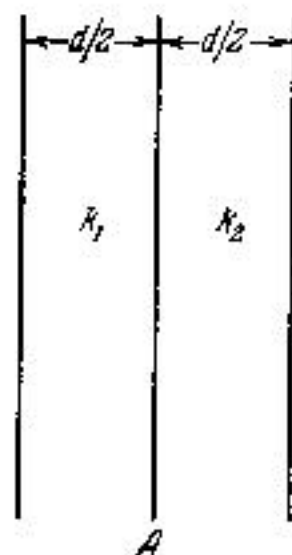


Fig. 134

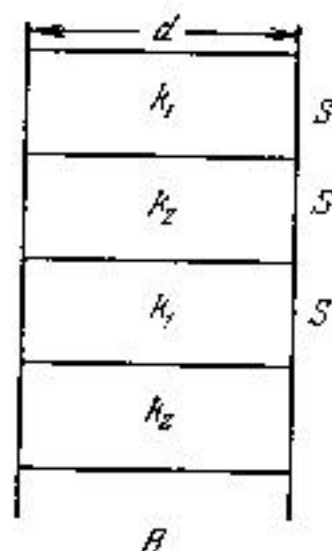


Fig. 135

327. Uma panela com água fervendo, em 1 segundo evapora m gramas de água. Considerando, que o calor é transmitido à água somente através do fundo da panela e desprezando a perda de calor pelas paredes da mesma e pela superfície da água ao meio ambiente, determinar a temperatura T da superfície do fundo da panela que está em contacto com o aquecedor. A área do fundo da panela é S , sua espessura é d e o coeficiente de condutibilidade térmica é k .

§ 14. PROPRIEDADES DOS GASES

328. Na parte trazeira de uma caneta automática normalmente faz-se um pequeno orifício. Caso este obstrua-se a caneta começa a vazar: a tinta sai pela parte de trás da pena. Qual é a causa deste fenômeno?
329. Um barômetro dá indicações falsas como consequência da presença de uma pequena quantidade de ar sobre a coluna de mercúrio. Para uma pressão $p_{01} = 755$ mm da coluna de mercúrio, o barômetro indica $p_1 = 748$ mm e para $p_{02} = 740$ mm, $p_2 = 736$ mm. Encontrar o comprimento l do tubo do barômetro (fig. 136).



Fig. 136

330. Um tubo de vidro, que tem comprimento $l = 50$ cm e seção transversal $S = 0,5$ cm² é soldado em um dos extremos. O tubo é submerso em água como indica a fig. 137. Qual é a força F , que é necessário aplicar a fim de manter o tubo sob a água, sendo a distância da superfície da água até o extremo soldado igual a $h = 10$ cm e a pressão atmosférica $p_0 = 760$ mm da coluna de mercúrio? O peso do tubo é $P = 15$ g.

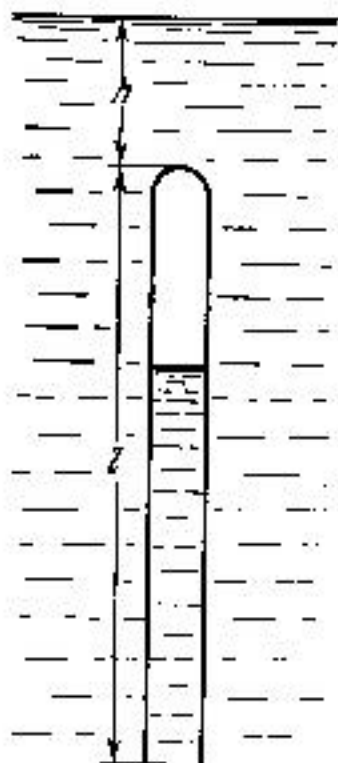


Fig. 137

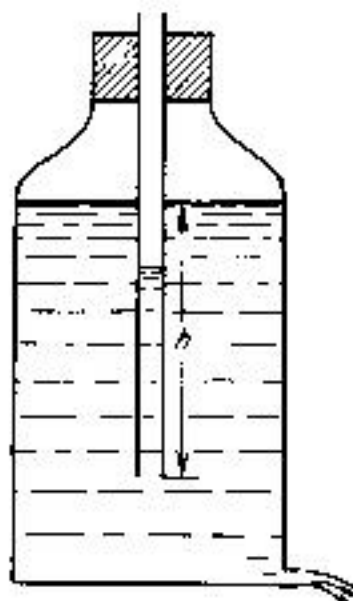


Fig. 138

331. Através da boca de um vaso com água coloca-se um tubo fino, aberto em ambos os lados e que não atinge o fundo do vaso. (Vaso de Mariotte desenhado na fig. 138.) Representar, graficamente, a dependência da pressão p do ar no vaso, em relação à quantidade de água Q emanada.
332. A bomba de um pistão, em cada bombeada tira um volume v_0 de ar. Para tirar o ar de um vaso de volume V , a bomba realizou n bombagens. A pressão inicial dentro do vaso é p e igual à atmosférica. Depois outra bomba, com o mesmo volume de trabalho v_0 , começou

a comprimir ar atmosférico, realizando também n bombagens. Que pressão foi estabelecida no vaso?

333. Na metade de um tubo de comprimento l , colocado horizontalmente e fechado em ambos os extremos, encontra-se uma coluna de mercúrio de comprimento l . Se colocarmos o tubo na posição vertical, então, a coluna de mercúrio desloca-se à distância Δl da sua posição inicial. A que distância, do meio do tubo, ficará o centro da coluna, se abrímos um dos extremos do mesmo na posição horizontal? Se abrímos o extremo superior do tubo na posição vertical? Se abrímos o extremo inferior na posição vertical? A pressão atmosférica é igual a H cm da coluna de mercúrio. A temperatura permanece constante.
334. Considerando que, segundo a lei de Avogadro, o volume de uma molécula-grama (um mol) de qualquer gás, nas condições normais (temperatura 0° C e pressão 1 atm), é igual a 22,4 l, determinar a constante, na equação do estado de um gás ideal (equação de Clapeyron-Mendeléiev), para uma quantidade de gás, igual a um mol e demonstrar que esta constante é igual para todos os gases.
335. Escrever a equação de estado para uma massa arbitrária de um gás ideal, cujo peso molar μ é conhecido.
336. Como variaria a pressão dentro de um gás, ou líquido, se a força de atração entre as moléculas momentaneamente desaparecesse?
337. Em um vaso encontra-se 1 litro de água à temperatura de 27° C. Qual seria a pressão dentro do vaso, se a força de interação entre as moléculas de água instantaneamente desaparecesse?
338. É igual a pressão dentro de um gás e junto das paredes do vaso que contém o mesmo?
339. É a mesma a concentração das moléculas de gás dentro do vaso e junto das paredes do mesmo?
340. Determinar a temperatura do gás que se encontra em um vaso fechado, se a pressão do gás aumenta em 0,4% em relação à pressão inicial pelo aquecimento do gás em 1° C.
341. Uma bola de borracha com paredes finas de peso $P = 0,5$ N, encheu-se de nitrogênio e foi submersa, em um lago, a uma profundidade $h = 100$ m.

Encontrar a massa de nitrogênio m , se a bola encontra-se em equilíbrio. Será o equilíbrio estável? A pressão atmosférica é $p = 760$ mm da coluna de mercúrio. A temperatura na profundidade do lago é $t = +4^\circ \text{C}$. A tensão da borracha é desprezada.

342. Duas esferas de vidro ôcas, unidas por um tubo, têm no meio do mesmo uma gota de mercúrio. Pode-se pela localização da gota prever a temperatura do meio ambiente?
343. Um cilindro fechado, em ambos os extremos é dividido em duas partes iguais (42 cm cada uma), por um pistão diatérmico. Em ambas as metades, encontram-se iguais massas de gás a uma temperatura de 27°C e pressão de 1 atm. Até quanto é necessário aquecer o gás em uma parte do cilindro, a fim de que o pistão se desloque em 2 cm? Encontrar a pressão p do gás após o deslocamento.
344. O ar atmosférico seco é composto de nitrogênio (78,09% do volume), oxigênio (20,95%), argon (0,93%) e gás carbônico (0,03%). Desprezando as partes insignificantes de outros gases (hélio, neon, kriptônio, xenônio), determinar (em %) a composição do ar em massa.
345. Encontrar o peso molar médio (efetivo) do ar atmosférico seco, supondo conhecidas as porcentagens dos componentes do ar (ver o problema 344).
346. A densidade do gás de uma combinação qualquer de carbono com hidrogênio é igual a 3 g/l para 43°C e 820 mm da coluna de mercúrio. Qual é a fórmula molecular dessa combinação?
347. Em que caso a variação da pressão de um gás será maior: pela compressão do mesmo em um envólucro diatérmico, ou pela compressão isotérmica?
348. Um gás, que ocupa um volume $V_1 = 1$ l à pressão $p_1 = 1$ atm, expandiu-se isotermicamente até o volume $V_2 = 2$ l. Para este volume, a pressão do gás diminuiu-se em duas vezes. Posteriormente, o gás expandiu-se a uma pressão constante até o volume $V_3 = 4$ l. Representar graficamente a dependência de p em relação a V e, utilizando este gráfico, estabelecer em qual dos processos descritos, o gás realizou o maior trabalho. Como variou a temperatura?
349. Com uma certa quantidade de gás ideal realiza-se um processo circular (ciclo) 1—2—3—1, cuja dependência

do volume, em relação à temperatura, está representada no gráfico (fig. 139). Representar o mesmo processo, através do gráfico da dependência da pressão em

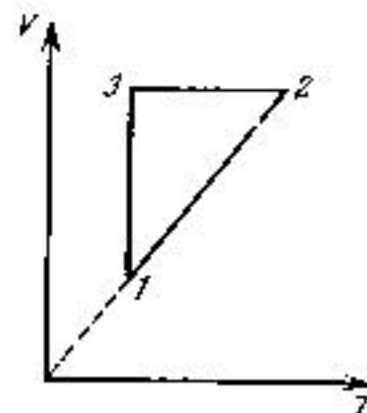


Fig. 139

- relação ao volume e indicar em quais estágios do processo, o gás recebeu e em quais transferiu calor.
350. Uma coluna de aquecimento à gás utiliza $V_0 = 1,8$ m³ de metano (CH_4) por hora. Determinar a temperatura t_2 da água, aquecida por esta coluna, se o jato emanado tem velocidade $v = 0,5$ m/s. O diâmetro do jato é $D = 1$ cm, a temperatura inicial da água e do gás é $t_1 = 11^\circ \text{C}$, a capacidade calorífica do metano é $r = 55\,000$ J/g. O gás no tubo encontra-se sob pressão $p = 1,2$ atm. O coeficiente de rendimento útil do aquecedor é $\eta = 60\%$.
351. Em um recipiente diatérmico fechado há ozônio (O_3) à temperatura $t_1 = 527^\circ \text{C}$. Depois de algum tempo o ozônio totalmente transformou-se em oxigênio (O_2). Determinar em quantas vezes aumenta a pressão no recipiente, se, na formação de uma molécula-grama de oxigênio do oxigênio, é necessário gastar $q = 142\,000$ J. A capacidade térmica de uma molécula-grama (um mol) de oxigênio a um volume constante considerar igual a $C_V = 21$ J/(mol·graus).
352. 20 g de hélio, encerradas em um cilindro por um pistão, muito lentamente passa do estado com volume $V_1 = 32$ l e pressão $p_1 = 4,1$ atm, ao estado com volume $V_2 = 9$ l e $p_2 = 15,5$ atm. Qual é a maior temperatura atingida pelo gás nesse processo, se no gráfico da depen-

dência da pressão em relação ao volume do gás, o processo é representado por uma linha reta (fig. 140)?

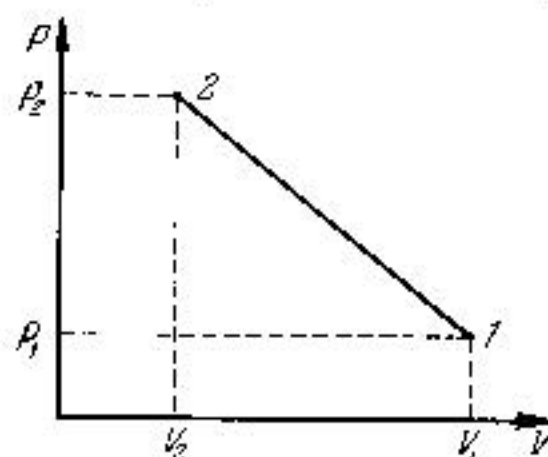


Fig. 140

353. Aumentará a energia do ar em um quarto, se no mesmo aquecermos um forno? (Indicação: A energia da unidade de massa do ar u , deve-se considerar proporcional à temperatura absoluta $u = cT$).
354. Em um quarto de volume 30 m^3 , a temperatura aumentou de 15°C até 25°C . Em que quantidade variou a massa de ar no quarto, se a pressão atmosférica é $p = 1 \text{ atm}$? A massa molar do ar (médio) considerar $\mu = 28,9 \text{ g/mol}$.
355. Em um recipiente cheio de água, com uma tela na parte superior, encontra-se um tubo de ensaio pequeno,

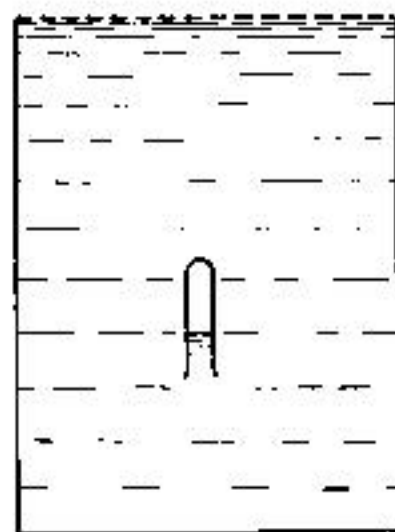


Fig. 141

cheio de ar e aberto na parte inferior, sendo que o mesmo não vira (fig. 141). Representar graficamente a dependência da profundidade de submersão do tubo de ensaio em relação à temperatura da água, supondo que a temperatura inicialmente eleva-se lentamente e depois começa a abaixar-se lentamente.

356. Em um cilindro, sob um pistão pesado, encontra-se $m = 20 \text{ g}$ de gás carbônico. O gás é aquecido da temperatura $t_1 = 20^\circ \text{C}$ até $t_2 = 108^\circ \text{C}$. Que trabalho ele realizou?
357. Qual é a quantidade de calor, que deve ser transferida ao gás carbônico (ver o problema 356), o qual se expende sob pressão constante como consequência do aquecimento? A capacidade térmica molar do gás carbônico (capacidade térmica de uma molécula-grama) para um volume constante é $C_V = 28,8 \text{ J/(mol} \cdot \text{graus)}$.

§ 15. PROPRIEDADES DOS LÍQUIDOS

358. O que é mais difícil comprimir até três atmosferas: um litro de ar, ou um litro de água?
359. De que modo, utilizando os fenômenos do humedecimento e do não humedecimento, pode realizar-se o mínimo e o máximo de um termômetro?
360. A camada superficial de um líquido frequentemente compara-se a uma película de borracha estendida. Em que aspecto esta analogia não corresponde à realidade?
361. Para tirar, da superfície de um tecido, uma mancha de gordura; recomenda-se molhar com um algodão embebido em gasolina os extremos da mancha. Molhar com gasolina imediatamente a própria mancha não se recomenda. Por que?
362. Por que um solo arado possibilita a conservação no mesmo da humidade?
363. A fim de que a graxa seja melhor absorvida, ao engraxarmos botas de esqui, as mesmas são aquecidas. Como é necessário esquentar as botas: externa ou internamente?
364. Por que com a ajuda de um ferro elétrico pode-se tirar uma mancha de gordura de um paletó?
365. Porque, quando seca-se lenha ao sol, no extremo de lenha, que se encontra na sombra, surgem gotas de água?

366. Um recipiente que tem um orifício circular de diâmetro $d = 0,1$ mm enche-se de água. Encontrar a altura máxima do nível de água h , para a qual ela ainda não se derrame. A água não molha o fundo do recipiente.
367. Em um arame dobrado na forma do retângulo na posição vertical, existe uma película de sabão (fig. 142). Quais forças mantêm a parte da película $abcd$ em equilíbrio?

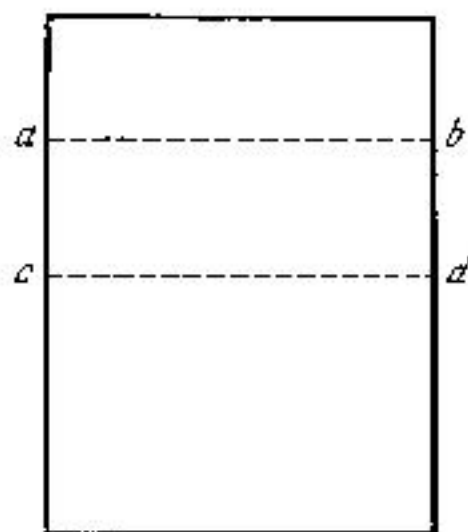


Fig. 142

368. Um cubo humedecido, de massa $m = 20$ g, flutua na superfície da água. A aresta do cubo tem comprimento $a = 3$ cm. A que distância da superfície da água encontra-se a aresta inferior do cubo?
369. O extremo de um tubo capilar de raio r foi colocado na água. Qual é a quantidade de calor dispendida pela elevação do líquido no capilar?
370. Colocou-se um capilar em um recipiente com líquido, no qual a pressão dos vapores pode ser desprezada. A densidade do líquido é ρ . O recipiente com o capilar encontra-se no vácuo da câmara de uma bomba de ar (fig. 143). Encontrar a pressão dentro do líquido no capilar, a uma altura h do nível do líquido no recipiente.

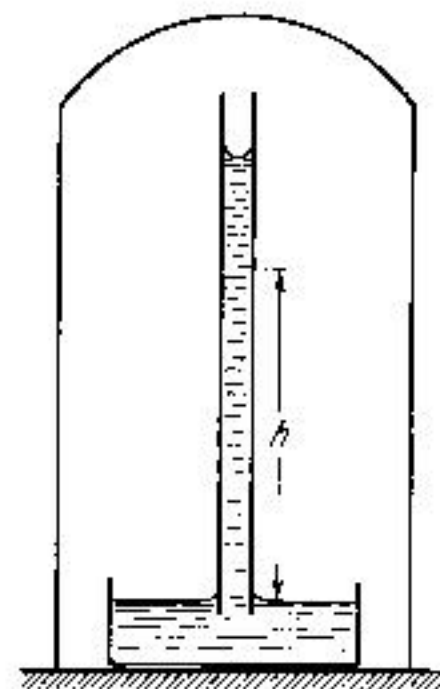


Fig. 143

371. Para demonstração da existência de energia potencial excedente nas moléculas da camada superficial de um líquido, normalmente, argumenta-se do seguinte modo: na molécula, que se encontra dentro do líquido, atuam forças de atração por parte das outras moléculas, que em média se compensam. Na molécula, que se encontra na superfície, a resultante das forças de atração está dirigida para dentro do líquido. Por isso, a molécula tende a dirigir-se para dentro do líquido e é necessário realizar certo trabalho para extrai-la do líquido e mantê-la na superfície. Por isso, cada molécula da camada superficial possui uma energia potencial excedente igual a este trabalho. Entretanto, a força média, que atua sobre qualquer molécula por parte das demais obrigatoriamente é igual a zero em um líquido em equilíbrio. Por isso, o trabalho para o deslocamento do líquido, de uma profundidade até a superfície, deverá ser igual a zero. De onde, em tal caso, surge a energia superficial?
372. O extremo de um tubo capilar de vidro de raio $r = 0,05$ cm, colocou-se na água a uma profundidade $h = 2$ cm. Que pressão é necessária para insuflar uma bolha de ar através da parte inferior do tubo?

373. Um tubo capilar de vidro, de diâmetro interno igual a 0,5 mm, foi colocado na água. O comprimento do tubo que sobressai da superfície da água é 2 cm. Que forma terá o menisco?

374. Em um tubo capilar, colocado verticalmente na água, a uma profundidade l , a água sobe até uma altura h (fig. 144). O extremo inferior do tubo fecha-se, tiram-no da água e novamente abrem. Determinar o comprimento da coluna de água que ficou no tubo.

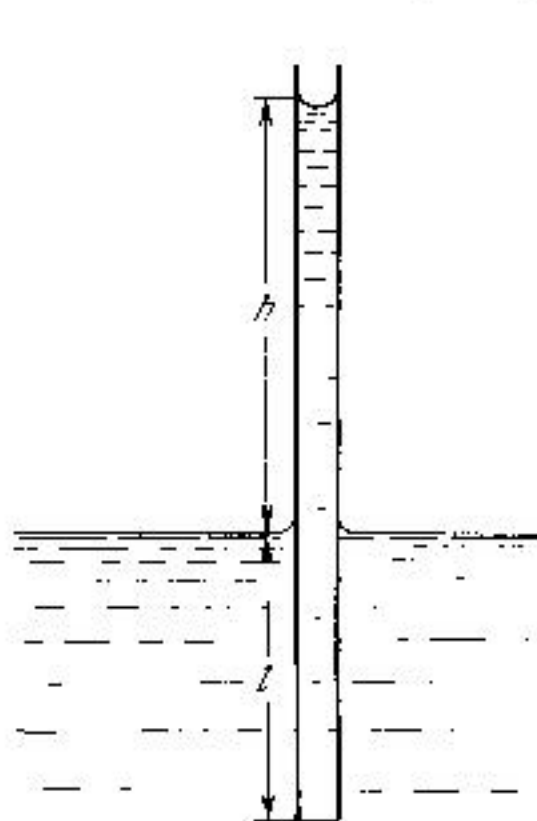


Fig. 144

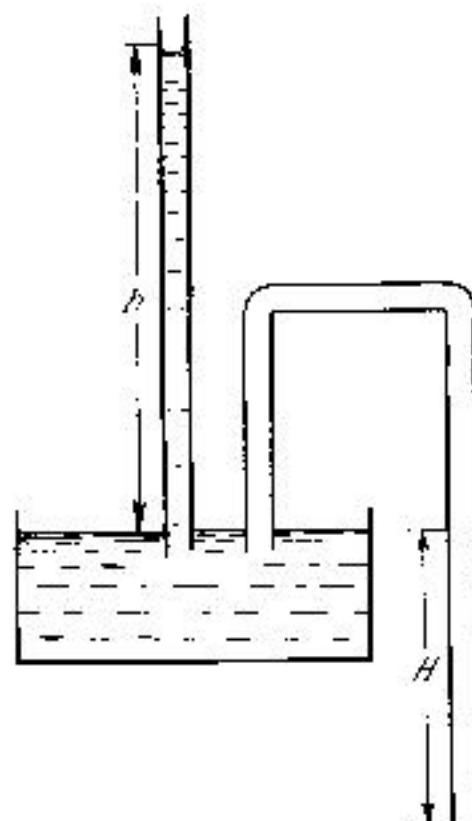


Fig. 145

375. Em um recipiente com água foram colocados dois capilares de igual seção (fig. 145). A água no capilar reto sobe até uma altura h . A que nível chega a água no capilar dobrado e qual forma toma nele o menisco? O extremo inferior do capilar dobrado foi colocado, abaixo do nível da água no recipiente, a uma distância H . Ver os cinco casos seguintes: 1) $H > h$; 2) $H = h$; 3) $0 < H < h$; 4) $H = 0$; 5) $H < 0$ (o extremo do capilar dobrado está acima do nível da água do recipiente).

376. Em uma bolha de sabão de raio R colocou-se outra bolha de raio r (fig. 146). Que forma tomará a película de sabão, que divide ambas as bolhas? Que ângulos formar-se-ão, entre as bolhas, nos locais de tangenciamento?

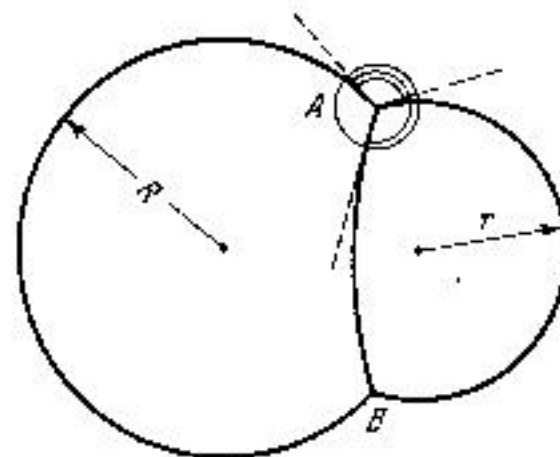


Fig. 146

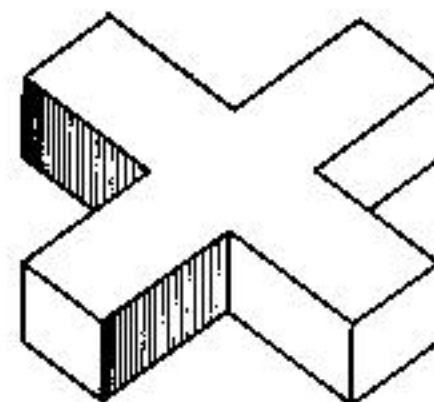


Fig. 147

377. Na água flutua uma cruz de madeira. Cada uma das partes da mesma está coberta em um lado com verniz (fig. 147). Como consequência de diferentes humedecimentos da madeira e verniz, a água nos dois lados de cada parte eleva-se a diferentes alturas; o ângulo de junção será diferente e, consequentemente, a componente horizontal da força de tensão superficial F será diferente em ambos os lados de cada parte (fig. 148). Como consequência disto, a cruz girará?

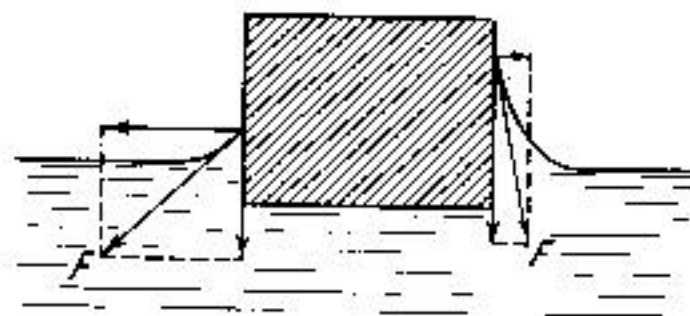


Fig. 148

378. Corpos leves humedecidos com água (por exemplo, dois fósforos), flutuando na superfície da água, atraem

um ao outro. O mesmo observa-se, caso os corpos não estejam humedecidos (por exemplo, fósforos, cobertos com uma camada fina de parafina). Se um corpo humedecer com água e outro não, então, os corpos repelir-se-ão. Como explicar estes fenômenos?

§ 16. TRANSFORMAÇÕES MÚTUAS DE CORPOS SÓLIDOS E LÍQUIDOS

379. A água congela em um copo a 0°C . Se dividirmos a água em pequenas gotas, então, pode-se resfriar a mesma até -40°C . Assim, por exemplo, as gotas de água, as quais constituem as nuvens, normalmente começam a congelar às temperaturas inferiores a -17°C . Como explicar estes fatos?
380. Um recipiente com 100 g de água a uma temperatura de 0°C suspendeu-se no meio de um quarto. Depois de 15 minutos a temperatura da água elevou-se até 2°C . Quando no recipiente colocou-se uma quantidade de gelo igual em peso, então, ele derreteu-se em 10 horas. Poder-se-ia por estes dados, determinar o calor específico de fusão do gelo?
381. Dois pedaços iguais de gelo flutuam, em direção um ao outro, com velocidades iguais e ao chocarem se transformam-se em vapor. Determinar a velocidade mínima possível dos pedaços de gelo, se, antes do choque, a temperatura dos mesmos era igual a -12°C .
382. Em um calorímetro há gelo. Determinar a capacidade térmica do calorímetro, se para aquecê-lo juntamente com o gelo contido, de 270° até 272°K exigem-se $Q_1 = 2\,100\text{ J}$ de 272° até 274°K exigem-se $Q_2 = 69\,700\text{ J}$.
383. Em um calorímetro encontra-se 400 g de água a uma temperatura $+5^\circ\text{C}$. Adicionaram ao mesmo outras 200 g de água a uma temperatura de $+10^\circ\text{C}$ e colocaram 400 g de gelo a uma temperatura de -60°C . Qual é a temperatura estabelecida no calorímetro?
384. Em um recipiente de cobre, aquecido até a temperatura $t_1 = 350^\circ\text{C}$, colocaram $m_2 = 600\text{ g}$ de gelo a uma temperatura $t_2 = -10^\circ\text{C}$. Como resultado no recipiente resultaram $m_3 = 550\text{ g}$ de gelo misturado com água. Encontrar a massa do recipiente. O calor específico do cobre é $c_1 = 420\text{ J/(kg}\cdot\text{graus)}$.

385. Ao introduzirmos em água sobrerresfriada um cristal de gelo, a mesma imediatamente começa a congelar.
- 1) Qual é a quantidade de gelo, que se forma de $M = 1\text{ kg}$ de água, sobrerresfriada até a temperatura $t = -8^\circ\text{C}$?

2) Que temperatura deverá ter a água sobrerresfriada para que totalmente transforma-se em gelo?

Não considerar a dependência da capacidade calorífica da água em relação à temperatura.

386. 100 g de gelo, à temperatura de 0°C , foram encerradas em um envólucro diatérmico e submetidas à compressão até a pressão $p = 1200\text{ atm}$. Encontrar a massa do gelo derretido, se a queda da temperatura de fusão é diretamente proporcional à pressão e para um aumento da pressão em 138 atm, a temperatura de fusão diminui em 1°C .

§ 17. ELASTICIDADE E SOLIDEZ

387. Em uma barra de aço de raio $R = 100,125\text{ cm}$ colocou-se um anel de cobre, que tem raio $r = 100\text{ cm}$ e área da seção transversal $S = 4\text{ mm}^2$. Com qual força F foi distendido o anel, se o módulo de elasticidade do cobre é $E = 12 \cdot 10^{10}\text{ N/m}^2$? A deformação da barra pode ser desprezada.
388. Qual trabalho pode realizar uma barra de aço, de comprimento l e área de seção transversal S , mediante o aquecimento em Δt graus?
389. Entre duas colunas suspendeu-se um fio de comprimento $2l$. Ao fio, exatamente no meio, pendurou-se

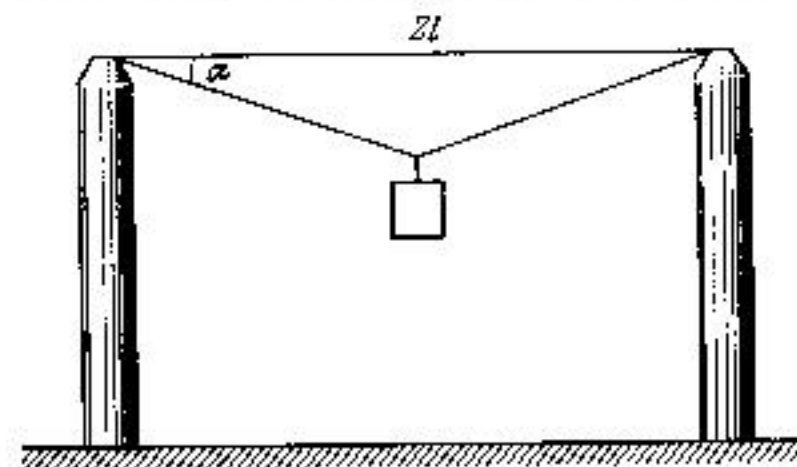


Fig. 149

um farol de massa M . A área da seção transversal do fio é S , o módulo de elasticidade é E . Determinar o ângulo α , formado pelo fio com a horizontal, considerando-o pequeno (fig. 149).

390. Entre duas paredes fixas, absolutamente rígidas, colocou-se sem jogo uma barra de aço de seção $S = 1 \text{ cm}^2$. Com qual força F a barra agirá na parede, se aquecermo-la em $\Delta t = 5^\circ \text{C}$? O coeficiente de dilatação linear do aço é $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ graus}^{-1}$ e o módulo de elasticidade, $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.
391. Entre duas paredes maciças foram colocadas duas barras de diferentes materiais (fig. 150). A seção das barras é S . Seus comprimentos são l_1 e l_2 . As barras são

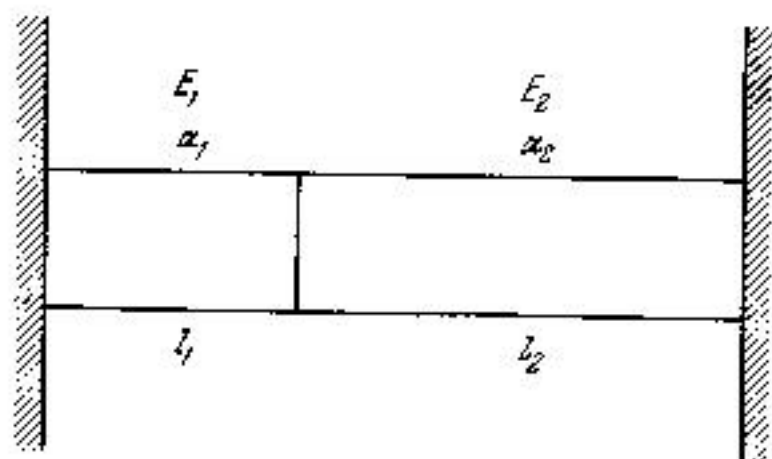


Fig. 150

aquecidas em Δt graus. Encontrar a força, com que as barras agem uma sobre a outra, se os coeficientes de dilatação térmica das barras α_1 e α_2 e os módulos de elasticidade do material das barras E_1 e E_2 são conhecidos. A deformação das paredes é desprezada.

392. Uma barra homogênea, de massa $m = 100 \text{ kg}$, está suspensa em três fios verticais de igual comprimento, distribuídos simetricamente (fig. 151). Determinar a tensão dos fios, se o fio do meio é de aço e os outros dois são de cobre. A área da seção transversal de todos os fios é igual. O módulo de elasticidade do aço é duas vezes maior, que o do cobre.

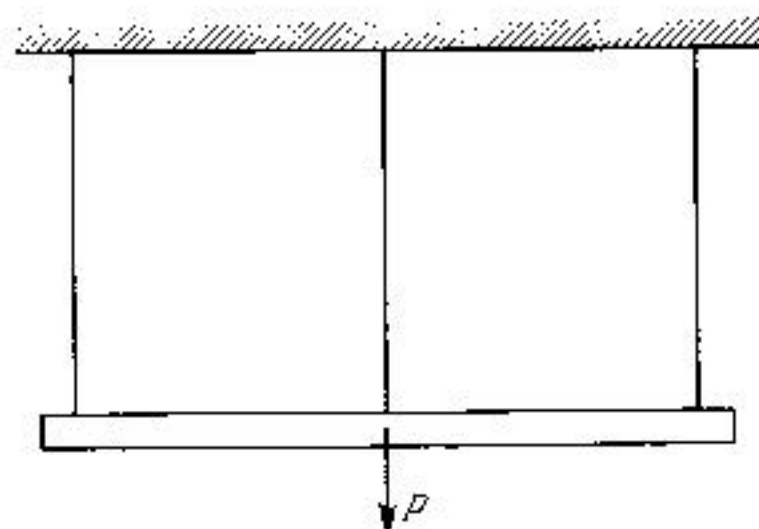


Fig. 151

393. Uma coluna de concreto armado pressiona-se com força P . Supondo, que o módulo de elasticidade do concreto E_c é $1/10$ do de ferro E_f , e que a área da seção transversal do ferro constitui $1/20$ a do concreto, encontrar, que parte da carga recai sobre o concreto.
394. Um macho de aço é colocado em um tubo de cobre, como mostra a fig. 152. Encontrar as forças, que surgem no macho e no tubo, devido à rotação da porca em uma volta, se o comprimento do tubo é l , o passo da rosca do macho é h e as áreas da seção transversal do macho e do tubo são iguais a S_m e S_t , correspondentemente.

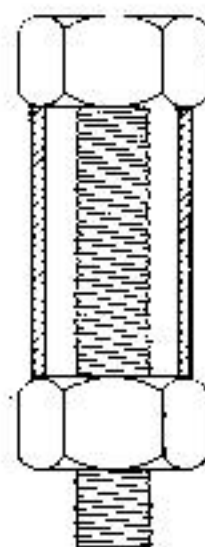


Fig. 152

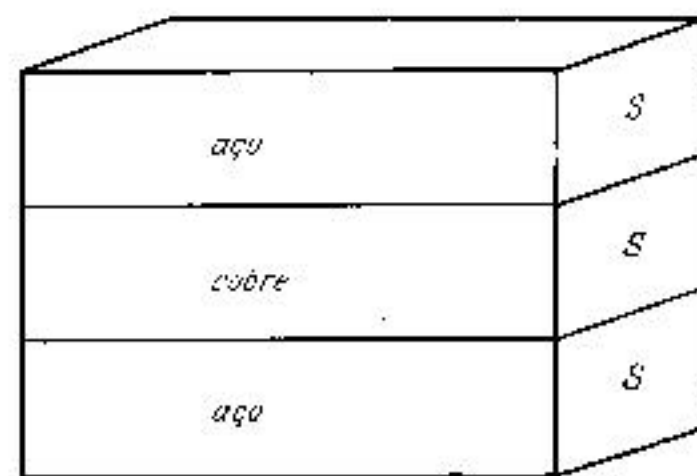


Fig. 153

395. Uma placa de cobre foi soldada com duas placas de aço como mostra a fig. 153. Que tensões surgem nas placas, pelo aumento da temperatura em $t^{\circ}\text{C}$? A área da seção transversal de todas as três placas é igual.
396. Determinar o valor máximo, permitido, da velocidade linear de rotação, de um anel fino de zinco, se a resistência do zinco tem o limite de resistência $P = 2000 \text{ N/cm}^2$ e densidade $\rho = 11,3 \text{ g/cm}^3$.
397. Uma barra de ferro AB está fixa em ambos os extremos. No meio da barra existe um orifício, no qual se fixa, com a ajuda de duas porcas, um gancho C

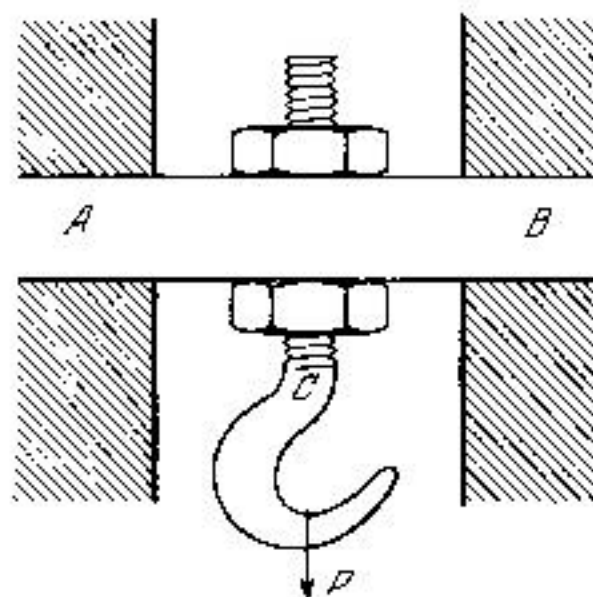


Fig. 154

(fig. 154). Aperta-se a barra pelas porcas com a força P_0 . Qual é a grandeza das forças, que agirão na porca superior e inferior por parte da barra, se no gancho suspendermos uma carga, cujo peso pode variar de zero até $P = 2P_0$? A flexão da barra e o peso de gancho são desprezados.

§ 18. PROPRIEDADES DOS VAPORES

398. Em um calorímetro, que contém 100 g de gelo a uma temperatura de -20°C , é colocado 150 g de vapor de água que tem uma temperatura de $+100^{\circ}\text{C}$. Que temperatura adquire o conteúdo do calorímetro, se sua capacidade calorífica é 300 J/graus?

399. Por que, no momento de apagar o fogo, da chaleira fervendo, imediatamente, sai um forte jato de vapor, apesar de que até este momento o vapor não é visto?
400. Demonstrar que a densidade do vapor de água, para temperaturas próximas à ambiente, expressa em g/m^3 , é aproximadamente igual à pressão do vapor de água expressa em milímetros da coluna de mercúrio.

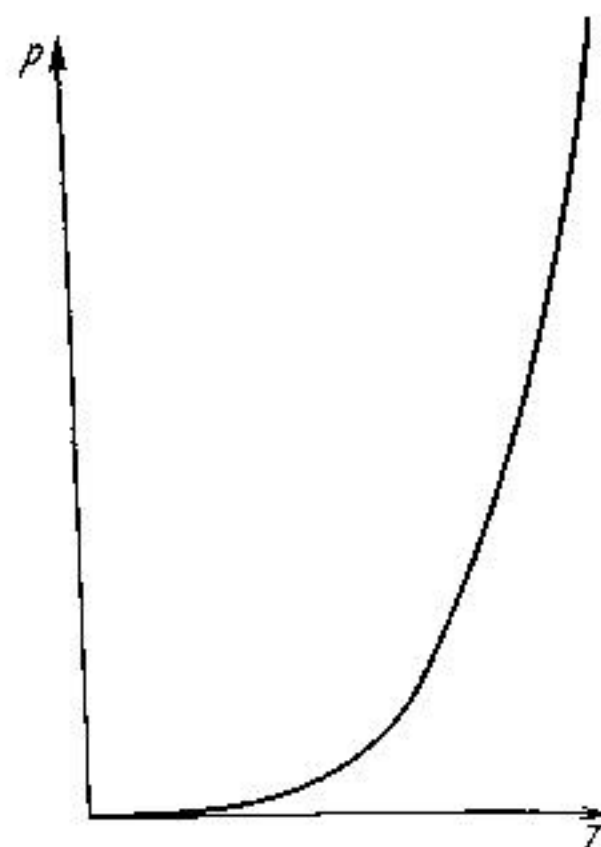


Fig. 155

401. A pressão do vapor de água saturado, em um recipiente hermeticamente fechado, aumenta com a temperatura, como mostra a fig. 155. A pressão de um gás ideal, em um volume constante, é diretamente proporcional à temperatura. Utilizando a tabela das propriedades do vapor de água saturado (ver a tabela I), verificar, se é válida a equação do estado de um gás ideal para determinação da densidade, ou volume específico do vapor de água saturado. Explicar o resultado obtido.
402. Em um cilindro de pistão comprimem-se isotermicamente 9 g de vapor de água a uma temperatura de

30° C. Para qual volume, o vapor começa a condensar-se? (Utilizar a tabela I).

Tabela I

Propriedades do vapor de água saturado

t (°C)	Pressão (atm)	Volume específico do vapor (m^3/kg)	t (°C)	Pressão (atm)	Volume específico do vapor (m^3/kg)
17,2	0,02	68,2	151,1	5	0,3818
45,4	0,1	14,06	158,1	6	0,3214
59,7	0,2	7,20	164,2	7	0,2778
75,4	0,4	4,071	169,6	8	0,2448
85,45	0,6	2,785	174,5	9	0,2189
93,0	0,8	2,127	179,0	10	0,1980
98,2	0,9	1,905	187,1	12	0,1663
99,1	1	1,726	194,1	14	0,1434
100	1,0333	1,674	200,4	16	0,1261
116,3	1,8	0,996	206,2	18	0,1125
119,6	2	0,902	211,4	20	0,1015
132,9	3	0,617	232,8	30	0,0679
142,9	4	0,4706	249,2	40	0,0506

403. Em um quarto, a uma temperatura de 15° C, a humidade relativa é igual a 10%. Como varia a humidade relativa, se a temperatura no quarto gradualmente elevar-se em 10° C?
404. Na rua, durante todo o dia chove. Em um quarto são penduradas as roupas lavadas. Secará mais rapidamente a roupa, se abrirmos a janela?

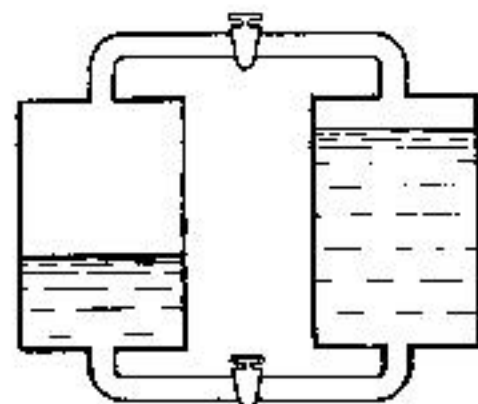


Fig. 156

405. Dois recipientes, unidos por tubos com torneiras, estão cheios de água até diferentes níveis (fig. 156). O ar dos recipientes é expelido. O que ocorrerá, se unirmos os recipientes: 1) abrindo a torneira do tubo inferior? 2) abrindo a torneira do tubo superior?
406. Qual é a humidade relativa do ar, a uma temperatura de $t_1 = 10^\circ \text{C}$, se a condensação da humidade deste ar, aquecido antecipadamente até $t_2 = 30^\circ \text{C}$, começou à pressão de 10 atm? A pressão inicial do ar é igual a 1 atm. (Utilizar os dados da tabela I)
407. Um corpo poroso foi colocado para secar na campânula de uma bomba de vácuo. A pressão sob a campânula foi mantida no nível de 6,5 mm da coluna de mercúrio no período de uma hora, e logo depois, bruscamente, caiu. O rendimento da bomba é de 60 l/min. A temperatura estabelecida na campânula da bomba é $t = 5^\circ \text{C}$. Qual é a quantidade de água, que continha o corpo?
408. Em um cilindro isolado termicamente, por um pistão de peso desprezível, encontra-se $m = 30 \text{ g}$ de água a uma temperatura de 0°C . A área do pistão é $S = 512 \text{ cm}^2$, a pressão externa é $p = 1 \text{ atm}$. A que altura eleva-se o pistão, se o aquecedor elétrico, que se encontra no cilindro, desprende $Q = 24\,200 \text{ J}$?

Eletricidade e magnetismo

§ 19. ELETROSTÁTICA

409. Com que força interagiriam duas cargas pontuais de um coulomb, situadas a uma distância de 1 km uma da outra?
410. Compare as forças de atração gravitacional e elétrica entre um elétron e um próton.
411. Suponhamos, que a força, que atua entre duas cargas pontuais, depende da distância, $1/r^\alpha$, onde 1) $\alpha > 2$; 2) $\alpha < 2$. O que ocorrerá com uma carga pontual, se a mesma for colocada dentro de uma esfera, carregada uniformemente? No momento inicial a carga pontual encontrava-se em repouso.
412. Duas esferas pequenas carregadas igualmente, mas com cargas de sinais opostos, estão fixas em um plano horizontal, a uma distância qualquer a , uma da outra. Uma terceira esfera carregada está suspensa em um fio. O ponto de suspensão é uma vez deslocado de tal modo que esta esfera fique em estado de equilíbrio, exatamente sobre a primeira esfera fixa, a uma distância a da mesma, e uma segunda vez, sobre a segunda. Encontrar os ângulos de desvio do fio, em relação à vertical, sabendo-se, que sobre a primeira esfera o ângulo de desvio é duas vezes maior do que o ângulo de desvio sobre a segunda esfera.
413. À distância d , de uma grande lâmina condutora, encontra-se uma carga elétrica pontual $+q$. Com que força a lâmina agirá sobre a carga?
414. Duas cargas iguais a $+Q$ estão fixas e localizadas a uma distância a , uma da outra. Ao longo de eixo de

simetria do sistema destas cargas, pode-se mover uma terceira carga $-q$, que possui massa m . Considerando pequena a distância da carga $-q$ até a reta, que une as cargas $+Q$, determinar o período de oscilações da carga $-q$.

415. Um anel de arame fino, de raio R é portador de uma carga elétrica q . No centro do anel localiza-se uma outra carga Q (q e Q são cargas de mesmo sinal), sendo $Q \gg q$. Determinar a força com que o anel é distendido.
416. Um corpo de massa m está suspenso por um fio de comprimento l (fig. 157). A uma distância h , abaixo do

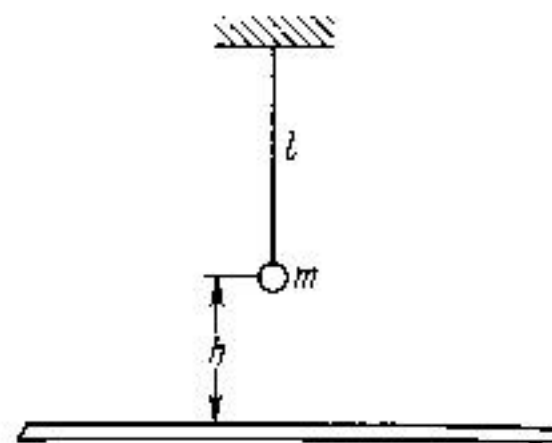


Fig. 157

mesmo, encontra-se uma lâmina metálica infinita. O corpo possui carga q . Determinar o período de oscilações livres deste corpo.

417. Determinar o período das pequenas oscilações de uma molécula polar em um campo elétrico homogêneo, cuja intensidade é $E = 3 \cdot 10^4$ V/m.
A molécula polar pode ser apresentada como um haltere de comprimento λ ($\lambda = 10^{-8}$ cm), nos extremos do qual encontram-se massas pontuais iguais a: m ($m = 10^{-24}$ g), portadoras de cargas $+q$ e $-q$, correspondentemente ($q = 15,7 \cdot 10^{-20}$ coulomb).
418. Três cargas positivas iguais a q , localizam-se nos vértices de um triângulo equilátero. Os lados do triângulo são iguais a a . Encontrar a intensidade do campo no vértice de um tetraedro regular, que tenha como base esse triângulo.

419. Duas cargas pontuais q_1 e q_2 encontram-se a uma distância d uma da outra. Encontrar a intensidade do campo elétrico no ponto, que se encontra a uma distância r_1 da carga q_1 e a uma distância r_2 da carga q_2 . Analisar os casos de cargas de mesmo sinal e de sinal contrário.

420. Encontrar a intensidade do campo de um dipolo elétrico, com momento igual a $p = ql$ no ponto, que se encontra a uma distância igual a r ($r \gg l$) do eixo do dipolo, em dois casos: 1) o ponto encontra-se em uma reta, que passa através do eixo do dipolo; 2) o ponto encontra-se em uma reta perpendicular ao eixo do dipolo.

Observação. Em um caso simples, o dipolo elétrico consiste de duas cargas iguais, mas de sinais contrários ($+q$ e $-q$). Uma característica importante do dipolo é o momento elétrico $p = ql$. Momento elétrico de um dipolo é o vetor dirigido da carga negativa à carga positiva e numericamente igual a $p = ql$, onde l é a distância entre as cargas que formam o dipolo.

421. Uma carga positiva Q , distribui-se uniformemente, por um anel condutor fino de raio R . Encontrar a intensidade do campo elétrico no eixo do anel, em dependência da distância r do centro do anel.

422. Um anel fino, de arame, tem raio R e possui carga elétrica igual a $+Q$. Como mover-se-á um corpo pontual de massa m , que possui carga igual a $-q$, se no momento inicial a carga estava em repouso em um ponto no eixo do anel, a uma distância $x \ll R$ de seu centro? O anel está fixo.

423. Partindo dos conceitos dimensionais, encontrar (evidentemente, com exatidão até de um coeficiente numérico) a intensidade de um campo elétrico criado: 1) por uma lâmina infinitamente estendida, carregada com densidade superficial σ ; 2) por um fio infinitamente longo, carregado com densidade superficial linear τ .

424. Uma lâmina metálica retangular, de lados iguais a a e b , possui carga igual a $+q$. A espessura da lâmina é muito menor do que a e b . Determinar a intensidade do campo, criado pela lâmina, carregada nos pontos do espaço, próximos ao centro da mesma.

425. Duas lâminas metálicas paralelas, cujas áreas são iguais a S , possuem cargas iguais a Q_1 e Q_2 . A distância

entre as lâminas é muito menor do que suas dimensões lineares. Determinar a intensidade do campo elétrico nos pontos A , B , C (fig. 158)

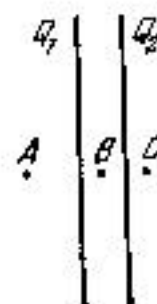


Fig. 158

426. Qual será a intensidade do campo elétrico, na superfície de um condutor, se a densidade superficial de carga é igual a σ ?

427. Todo o espaço, entre duas lâminas paralelas infinitas, está ocupado por uma carga, com densidade volumétrica constante igual a ρ . A distância entre as lâminas é a . Encontrar a dependência da intensidade do campo elétrico, relativamente à distância, considerada a partir do meio entre as lâminas.

428. Dentro de uma esfera de raio R existe uma carga volumétrica, com densidade constante igual a ρ . Encontrar a dependência da intensidade do campo elétrico em relação à distância até o centro da esfera.

429. Encontrar a intensidade do campo elétrico dentro e fora de um cilindro infinitamente longo, carregado com densidade volumétrica igual a ρ . O raio do cilindro é R .

430. Dentro de uma esfera carregada com densidade volumétrica constante igual a ρ , existe uma cavidade esférica. A distância entre o centro da esfera e o centro da cavidade é igual a a . Demonstrar que a intensidade E do campo elétrico dentro da cavidade é igual a $E = \rho a / 3\epsilon_0$ e tem o sentido da reta, que une os centros das esferas.

431. Dentro de um cilindro carregado, com densidade volumétrica constante igual a ρ , existe uma cavidade cilíndrica. A distância entre os eixos do cilindro e da cavi-

dado é igual a a . Demonstrar que a intensidade E do campo dentro da cavidade é igual a $E = \rho a / 2\epsilon_0$ e está dirigida paralelamente à perpendicular, que une os eixos.

432. Uma molécula encontra-se a uma distância r do eixo de um cilindro metálico infinitamente longo. O cilindro está carregado uniformemente de tal modo, que a carga existente, em uma unidade de seu comprimento, é igual a τ . A molécula tem a forma de um haltere de comprimento λ , nos extremos do qual encontram-se as cargas $+q$ e $-q$. Determinar a força, que atua na molécula.
433. A uma distância qualquer do eixo de um cilindro uniformemente carregado, encontram-se duas moléculas de igual massa. Uma molécula tem momento elétrico constante igual a $p = q\lambda$ (ver o problema 420). A distância, entre as cargas da outra molécula, determina-se pela relação $qE = k\lambda$, onde E é a intensidade média do campo que atua na molécula, e k é um coeficiente constante. Em um momento inicial, os momentos elétricos das moléculas são iguais e as velocidades das mesmas são iguais a zero. Qual molécula, sob a ação da força de atração, atingirá mais rapidamente a superfície do cilindro?
434. Uma lâmina metálica retangular, com lados a e b , foi carregada com carga $+q$. A espessura da lâmina c é muito menor do que os lados a e b . Ao centro da lâmina, a uma distância d desloca-se uma carga pontual $+Q$. A distância d é muito menor do que os lados da lâmina. Determinar a força, com que a lâmina age na carga $+Q$. Em que caso, uma lâmina carregada positivamente, atrairá uma carga positiva?
435. Dentro de uma esfera de raio R existe uma carga volumétrica com densidade constante ρ . Encontrar a dependência do potencial, relativamente à distância do centro da esfera.
436. A uma distância d de uma carga pontual q localiza-se o centro de uma esfera condutora de raio R sem carga. Qual é o potencial da esfera?
437. A uma distância R de uma carga pontual $+q$ encontra-se uma esfera condutora de raio r , unida por um arame fino e longo à terra. Determinar a grandeza da carga negativa induzida na esfera. A influência do arame pode ser desprezada.

438. Um elétron movimenta-se em um tubo metálico de seção variável (fig. 159). Como variará a velocidade do elétron, ao aproximar-se da parte mais estreita do tubo?

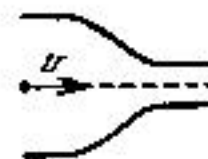


Fig. 159

439. Duas esferas metálicas concêntricas e descarregadas, de raios iguais a R_1 e R_2 , sendo $R_1 < R_2$, estão unidas por um fio fino. O fio passa por uma pequena abertura da esfera, localizada concentricamente, entre as duas primeiras esferas. Esta esfera tem raio R_2 e possui carga $+Q$, distribuída uniformemente pela mesma. Desprezando a influência do fio de união, determinar a carga induzida na esfera metálica interna.
440. Em uma reta encontram-se três cargas: uma positiva $+q$ e duas negativas $-Q$. Para qual relação de grandeza das cargas, as mesmas encontrar-se-ão em equilíbrio? Será o equilíbrio estável? Representar graficamente a dependência da energia potencial de cada carga, em relação à sua localização na reta, considerando as outras duas cargas fixas.
441. Poderá uma carga elétrica, colocada em um campo eletrostático, encontrar-se em estado de equilíbrio estável?
442. Uma esfera condutora, isolada, de raio R , tem carga $+Q$. Qual energia possui a esfera?
443. Duas esferas metálicas finas, concêntricas, de raios iguais a R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$), possuem cargas Q_1 e Q_2 , correspondentemente. Determinar a energia de tal sistema de cargas.
444. Existem n esferas metálicas concêntricas finas, cujos raios, em ordem crescente, são iguais a $r_1, r_2, \dots, r_n$. Estas esferas têm cargas iguais a $q_1, q_2, \dots, q_n$, correspondentemente. Determinar a energia de tal sistema de cargas.
445. As lâminas de um condensador plano de capacidade C , estão a uma distância l uma da outra e possuem cargas iguais a $+Q$ e $-Q$. Um elétron entrou no meio do con-

densador com velocidade v_0 , dirigida paralelamente às lâminas. Qual será a velocidade do elétron a uma distância suficientemente grande do condensador? Qual é o caráter da variação da velocidade do elétron (em grandeza absoluta) no movimento do mesmo dentro e fora do condensador? Considerar os casos, quando o elétron encontra-se no momento inicial: 1) a uma distância igual das placas do condensador; 2) a uma distância igual a $l/4$ da placa positiva; 3) a uma distância igual a $l/4$ da placa negativa.

446. Duas cargas pontuais de mesmo sinal q_1 e q_2 e massas iguais a m_1 e m_2 movimentam-se uma em direção à outra. Em um determinado momento, quando a distância entre as cargas é igual a r_1 , elas têm velocidades iguais a v_1 e v_2 . À que distância mínima r_2 aproximam-se as cargas?
447. Uma carga pontual $+q$ movimenta-se do infinito em direção a uma lâmina metálica. Determinar a energia de interação da carga e da lâmina e, também, a velocidade da carga no momento, quando a mesma se encontra a uma distância d da lâmina. Encontrando-se a uma distância infinitamente grande da lâmina, a carga tem velocidade igual a zero.
448. Em um anel fino de raio R está distribuída uniformemente uma carga $+q$. Determinar a velocidade de uma carga negativa pontual ($-q$) no momento em que a mesma passa pelo centro do anel, sendo que, inicialmente, a carga $-q$ encontrava-se em repouso suficientemente distanciada do anel, no ponto A do eixo (fig. 160). A massa da carga $-q$ é igual a m . O anel está fixo.

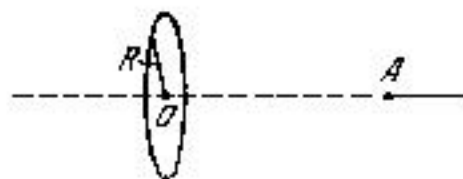


Fig. 160

449. Uma carga positiva $+Q$ está distribuída uniformemente em um anel, de arame fino, de raio igual a R . No centro do anel encontra-se uma carga pontual $-q$, de massa igual a m . À carga é dada uma velocidade inicial v ,

paralela ao eixo do anel. Determinar o caráter do movimento da carga, em dependência da grandeza da velocidade inicial. O anel está fixo.

450. Uma esfera metálica, de diâmetro igual a $2m$, encontra-se no centro de uma grande sala e está carregada com potencial de $100\,000\text{ V}$. Que quantidade de calor será irradiada, se unirmos a esfera através de um condutor com a terra?
451. Duas pequenas esferas são portadoras de cargas, diferentes em grandeza, mas do mesmo sinal. Uma das esferas está fixa. A segunda esfera, distanciando-se, sob ação das forças eletrostáticas de repulsão, pode realizar um trabalho mecânico A_1 . Se antes do início do movimento da segunda esfera, ambas forem unidas por um condutor, então, a segunda esfera distanciando-se, poderá realizar um trabalho mecânico igual a A_2 . Determinar a quantidade de calor irradiada pelo condutor que une as esferas; explicar que energia serve de fonte de irradiação deste calor e se varia o trabalho mecânico.
452. Um envoltório esférico de raio R está carregado uniformemente com carga Q . Encontrar a força de distensão que atua sobre uma unidade de área do envoltório.
453. Qual carga Q pode ser dada a uma gota de raio R , se o coeficiente de tensão superficial é igual a σ ?
454. Encontrar a capacidade C_0 da bateria de condensadores iguais (fig. 161).

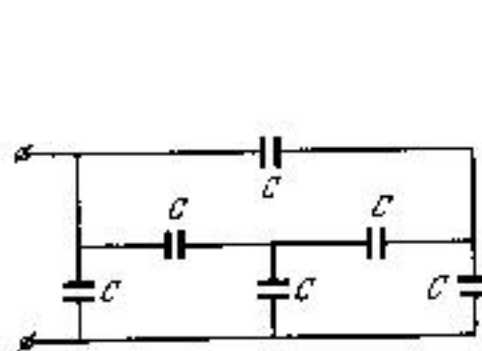


Fig. 161

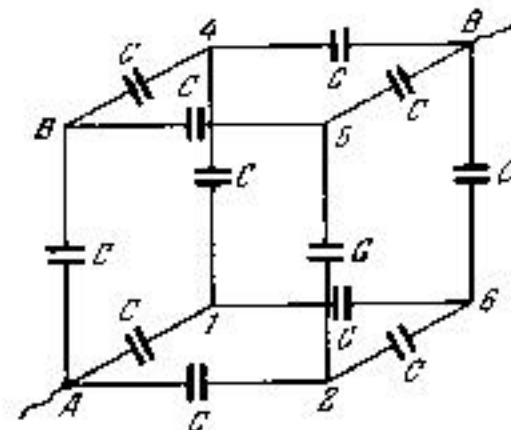


Fig. 162

455. Fez-se um cubo de arame, e em cada aresta do mesmo ligou-se um condensador de capacidade C (fig. 162).

Encontrar a capacidade da bateria dos condensadores, se a bateria foi ligada no circuito por condutores que unem os vértices opostos A e B do cubo.

456. Para a obtenção de altas tensões, de curta duração, pode ser utilizado o transformador -- condensador de faíscas de Arkadiev. O esquema do aparelho está representado na fig. 163.

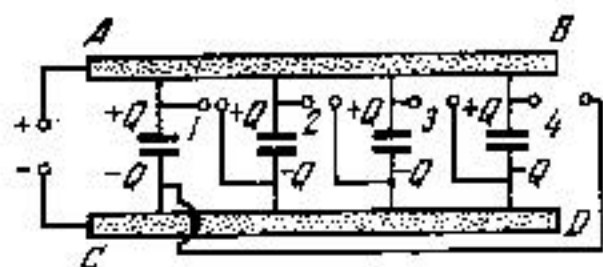


Fig. 163

Um grupo de condensadores, unidos paralelamente pelos condutores AB e CD de uma resistência muito grande, é ligado a uma fonte de alta tensão. A placa superior de cada condensador une-se, através de um intervalo disruptivo, com a placa inferior do condensador seguinte (intervalos 1, 2, 3, 4). Cada intervalo seguinte é maior do que o anterior. No momento, quando a diferença de potenciais entre as placas atinge o valor da tensão de abertura do primeiro intervalo, ocorre a descarga. Em seguida, serão abertos o segundo, o terceiro e o quarto intervalos. Que grandeza atingirá a diferença de potenciais pela abertura do último intervalo, se tivermos n condensadores e a tensão aplicada for igual a V_0 ?

457. As placas de um condensador plano carregado são ligadas à terra alternadamente. O condensador descarregar-se-á nesse caso?
458. Dois condensadores planos de capacidades C_1 e C_2 são carregados com diferença de potenciais iguais a U_1 e U_2 , correspondentemente ($U_1 \neq U_2$). Demonstrar que pela união paralela destes condensadores, a energia eletrostática comum dos mesmos diminuirá. Por que isto ocorre?
459. Sabe-se, que pedaços alongados de um dielétrico, lo-

calizar-se-ão longo das linhas de força de um campo elétrico. Entretanto as moléculas isoladas de um dielétrico, não polar, aparentemente deveriam, estender-se ao longo do campo e não girar. Em um dielétrico, constituído de moléculas dipolares, o número médio das moléculas que giram, ao ligarmos o campo no sentido horário, é igual ao número de moléculas, que giram em sentido anti-horário. Por que, então, o pedaço de dielétrico girará?

460. Uma esfera dielétrica de raio R está polarizada homogeneamente, i.é., os momentos elétricos dipolares de todas as moléculas são iguais e paralelos uns aos outros. Encontrar a tensão do campo elétrico dentro do dielétrico, se por unidade de volume existem N moléculas, cujo momento dipolar é igual a $p = ql$.
461. Coloca-se uma esfera dielétrica em um campo elétrico homogêneo, de intensidade igual a E . A permeabilidade dielétrica do material da esfera é ϵ . Encontrar a tensão do campo, dentro da esfera, assim como nos pontos A , B , C e D (fig. 164), que se situam fora da esfera.
462. Encontrar a lei de distribuição superficial de carga em uma esfera, sabendo que esta carga cria dentro da esfera um campo homogêneo com intensidade igual a E .
463. Uma esfera metálica de raio R , que tem carga $+Q$, foi colocada em um campo elétrico homogêneo com intensidade E . Encontrar a dependência da densidade superficial de carga, relativamente ao ângulo θ , assim como a tensão do campo elétrico nos pontos A , B , C e D (fig. 164), que se encontram fora da esfera.
464. Um cilindro infinito, de material com permeabilidade dielétrica igual a ϵ , está polarizado homogeneamente na direção perpendicular ao seu eixo. O raio do cilindro é igual a R . O momento dipolar da molécula é igual a p . O número de moléculas por unidade de volume é igual a N . Encontrar a intensidade do campo elétrico dentro do cilindro.
465. Um cilindro infinito, de raio R , fabricado com material de permeabilidade dielétrica igual a ϵ , é colocado em um campo elétrico homogêneo, cuja intensidade E está dirigida perpendicularmente ao eixo do cilindro. Determinar a tensão do campo dentro do cilindro, assim como nos pontos A , B , C e D fora do cilindro (fig. 164).

466. Um cilindro metálico carregado, de raio R , é colocado em um campo elétrico homogêneo, cuja intensidade E está dirigida perpendicularmente ao eixo do cilindro. A carga existente por unidade de comprimento do cilindro, é igual a λ . Encontrar a dependência da densidade de carga em relação ao ângulo θ , assim como a tensão do campo elétrico nos pontos A , B , C e D (fig. 164), que se encontram fora do cilindro.

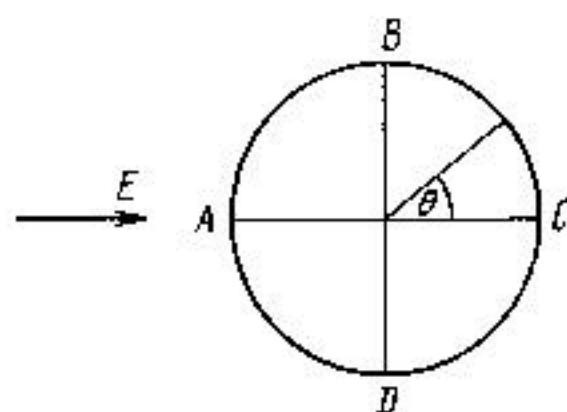


Fig. 164

467. Uma esfera carregada uniformemente com carga q , é colocada em um dielétrico isotrópico, ilimitado e homogêneo com permeabilidade dielétrica igual a ϵ . Determinar a carga de polarização no limite do dielétrico com a esfera.
468. O espaço entre duas esferas concêntricas de raios iguais a r_1 e r_2 está cheio de dielétrico com permeabilidade dielétrica igual a ϵ . No centro das esferas encontra-se uma carga pontual $+Q$. Encontrar a tensão e o potencial em função da distância até o centro da esfera e a grandeza das cargas de polarização.
469. O espaço entre duas esferas metálicas concêntricas, finas, está cheio de dielétrico com permeabilidade dielétrica igual a ϵ . Os raios das esferas são iguais a r_1 e r_2 . As cargas das esferas metálicas, interna e externa, são iguais a $+Q$ e $-Q$, correspondentemente. Encontrar a diferença de potenciais, a densidade das cargas de polarização e a capacidade de tal condensador esférico.
470. O espaço entre as placas de um condensador plano está cheio de dielétrico de permeabilidade dielétrica igual

a ϵ , como mostra a fig. 165. A área das placas do condensador é igual a S . Determinar a capacidade do condensador em ambos os casos.

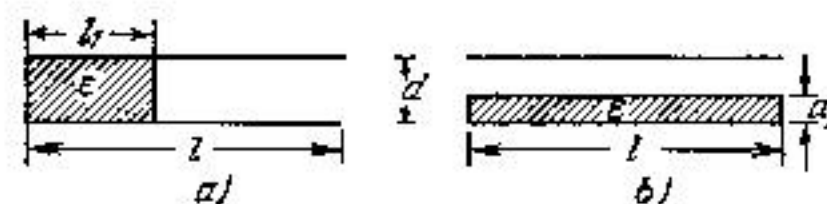


Fig. 165

471. Um condensador plano, cujas placas estão carregadas com cargas $+q$ e $-q$, foi colocado em um líquido com permeabilidade dielétrica igual a ϵ até a metade da altura das placas. Qual é a densidade das cargas de polarização do dielétrico, se a área das placas é igual a S ?
472. Um dielétrico constitui-se de moléculas, cada uma das quais pode ser concebida com duas cargas $+q$ e $-q$, localizadas a distância x uma da outra. Nesse caso, a distância x depende da intensidade do campo E , que atua sobre as cargas da seguinte forma: $kx = qE$, onde k é um coeficiente constante. Suponhamos, que por unidade de volume, no dielétrico existam n moléculas. Determinar a intensidade do campo E , dentro do condensador, onde encontra-se tal dielétrico, se, antes de colocarmos o mesmo, a intensidade do campo era igual a E_0 . Determinar a permeabilidade dielétrica do dielétrico.
473. Um condensador encontra-se repleto de dielétrico, cujas propriedades estão descritas no problema 472. Encontrar a energia acumulada no dielétrico como consequência de sua polarização.
474. Duas placas metálicas situam-se paralelamente, estando as mesmas carregadas com cargas iguais a $+q_1$ e $-q_2$, sendo: $q_1 > q_2$. O espaço, entre as duas placas, está repleto de um dielétrico homogêneo e isotrópico com permeabilidade dielétrica ϵ . Determinar a força que age por unidade de área na superfície do dielétrico. A área de cada placa é igual a S .
475. Determinar a energia de um condensador plano, cujo espaço entre as placas está preenchido por um dielétrico.

São conhecidas a carga do condensador e a diferença de potenciais entre suas placas.

476. Duas lâminas retangulares, de comprimento l e área S , são colocadas paralelamente uma à outra a uma distância d . As lâminas estão carregadas com uma diferença de potenciais igual a U . No espaço, entre as lâminas, é colocado um dielétrico com permeabilidade dielétrica igual a ϵ . A espessura do dielétrico é igual a d , sua largura é igual a largura das placas e o seu comprimento é maior do que l (fig. 166). Encontrar

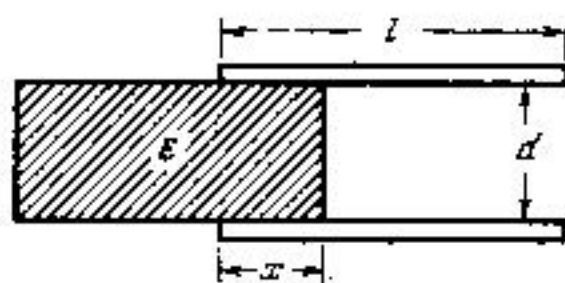


Fig. 166

a dependência da força, que atua no dielétrico, por parte do campo a uma distância x .

477. Resolver o problema 476, no caso em que a diferença de potenciais entre as lâminas seja mantida constante e igual a U .
478. Sobre a superfície de um líquido, colocado em um grande recipiente, encontram-se as placas verticais de um condensador que tangenciam a superfície do líquido. A área de cada placa do condensador é igual a S , a distância entre as placas é igual a d e a altura das mesmas é l . Liga-se o condensador a uma bateria com f.e.m. igual a U . A densidade do líquido é ρ , e sua permeabilidade dielétrica é ϵ .

Encontrar a altura máxima, na qual eleva-se o líquido no processo de oscilação, assim como a altura na qual se estabelece o nível do líquido.

479. No fundo de um recipiente encontra-se uma lâmina metálica fina de área igual a S , sendo que a área da mesma é muito menor do que a área do fundo do recipiente. No recipiente coloca-se um líquido com permeabilidade dielétrica igual a ϵ . A profundidade do

líquido é muito menor do que as dimensões lineares da lâmina. O que ocorrerá com o líquido, se carregarmos a lâmina com uma carga igual a $+Q$?

§ 20. CORRENTE ELÉTRICA CONTÍNUA

480. Na superfície de um cilindro, infinitamente longo, as cargas estão distribuídas de tal modo, que a metade situada à direita da seção OO' , está carregada com cargas positivas e a metade da superfície do cilindro localizada à esquerda, está carregada com cargas nega-

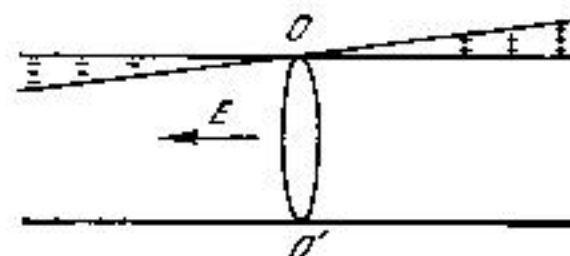


Fig. 167

tivas (fig. 167). Em ambas as direções, a densidade de cargas aumenta diretamente proporcional à distância da seção OO' . Demonstrar que em todos os pontos dentro do cilindro, a intensidade do campo elétrico será igual e estará dirigida ao longo do eixo do cilindro, como indica-se na figura por uma seta.

481. Existirá nas proximidades da superfície de um condutor, pelo qual passa corrente contínua, um campo elétrico?
482. Representar graficamente a distribuição das linhas de força de um campo elétrico, ao longo de um condutor homogêneo, dobrado em forma de um arco (fig. 168). Pelo condutor passa corrente contínua.



Fig. 168

483. Dois condutores, com coeficientes de temperatura da resistência α_1 e α_2 , possuem a 0°C resistências iguais

a R_{01} e R_{02} . Determinar o coeficiente de temperatura do circuito constituído destes condutores, se os condutores forem unidos em série e se forem unidos paralelamente.

484. Determinar a resistência do circuito, que se vê na fig. 169. As resistências dos fios de união $AC'C$ e $BC''D$ podem ser desprezadas.

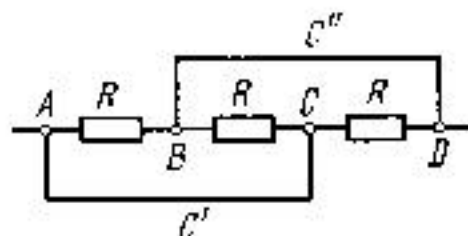


Fig. 169

485. De um fio de comprimento L e de resistência R , é necessário fazer um aquecedor para ser ligado a uma rede com tensão U . Sabe-se, que pelo fio pode passar, sem risco de danificá-lo, uma corrente não maior do que I_0 . Qual é a maior quantidade de calor q , que poderá ser obtida por unidade de tempo com a ajuda do aquecedor? Para a confecção do aquecedor, o fio pode ser cortado em pedaços e depois unido em série ou paralelamente.
486. Encontrar a resistência do tetraedro $ABCD$, feito de seis fios de resistência R cada um. Os fios condutores estão unidos aos vértices A e B .

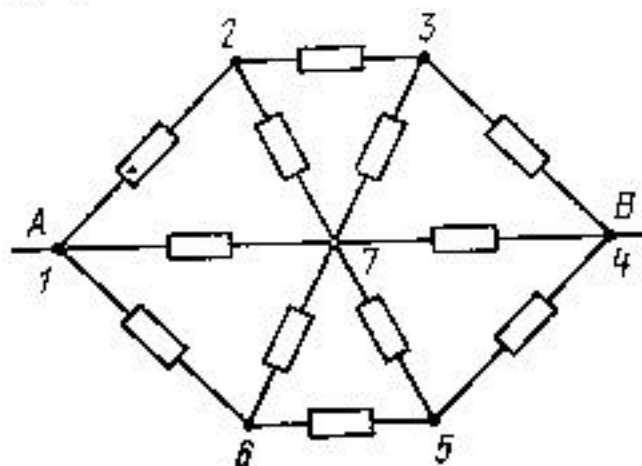


Fig. 170

487. Achar a resistência do hexágono, representado na fig. 170, sendo que o mesmo foi ligado ao circuito

entre os pontos A e B . A resistência de cada condutor do circuito é igual a R .

488. Determinar a resistência de um cubo, feito de arame, ao ligarmos o mesmo em um circuito entre os pontos A e B (fig. 171). A resistência de cada aresta do cubo é igual a R .

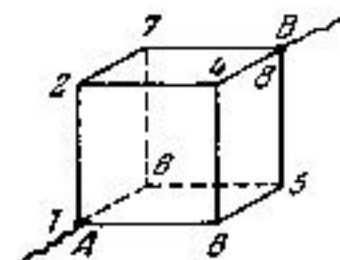


Fig. 171

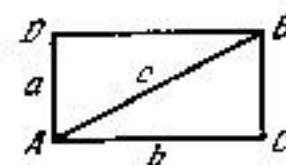


Fig. 172

489. Aos condutores de uma mesma seção S e uma mesma resistência específica ρ , foi soldado um retângulo $ADEC$, com a diagonal AB feita de um fio de mesma seção e material (fig. 172). Determinar a resistência entre os pontos A e B e a resistência entre os pontos C e D , se $AD = BC = a$, e $AC = BD = b$.
490. Na fig. 173 está representado o circuito da ponte de Wheatstone, para medição de resistências. R_x é a resistência desconhecida, R_0 é a resistência padrão, G é o galvanômetro unido ao contato deslizante D com um fio homogêneo de grande resistência AB (reocorda). Demonstrar que na ausência de corrente, no galvanôme-

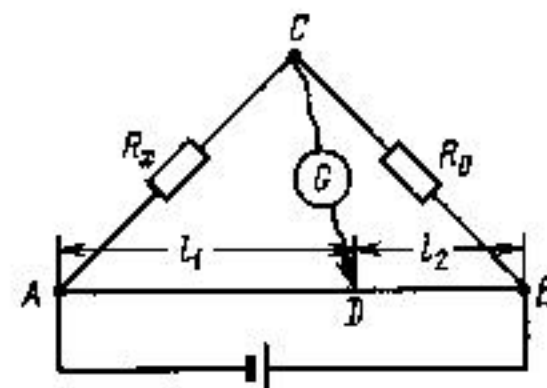


Fig. 173

tro verifica-se a relação $R_x/R_0 = l_1/l_2$. A resistência dos fios de união pode ser desprezada.

491. Que resistência é necessário ligar entre os pontos C e D (fig. 174), a fim de que a resistência de todo o circuito (entre os pontos A e B) não dependa do número de malhas elementares?

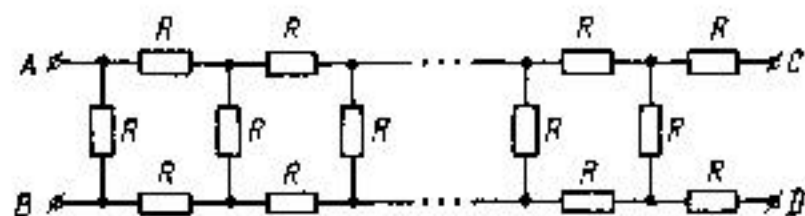


Fig. 174

492. Nos circuitos de saída dos geradores, para a diminuição da tensão, em um determinado número de vezes desejado, utiliza-se um dispositivo chamado atenuador. O atenuador tem a forma de um redutor de tensão, montado segundo o circuito da fig. 175. Um comutador

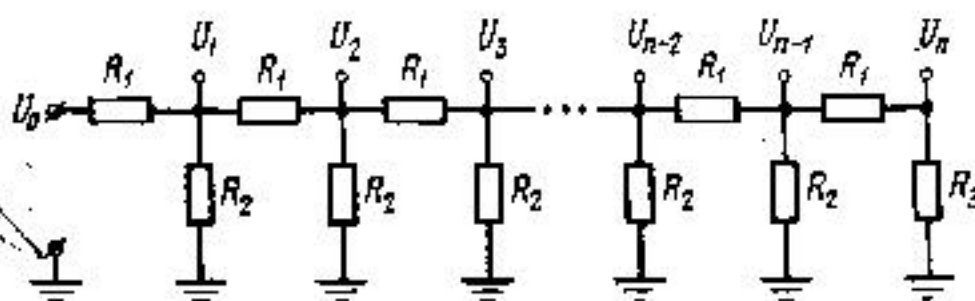


Fig. 175

- especial dá a possibilidade de unir com o terminal de saída, ou o ponto com potencial U_0 , que é elaborado pelo gerador, ou qualquer dos pontos $U_1, U_2, \dots, U_n$, cujo potencial é menor do que o potencial do anterior em k vezes ($k > 1$). O segundo terminal de saída e os extremos inferiores da resistência estão ligados à terra. Determinar a relação das resistências $R_1 : R_2 : R_3$, se o número de malhas do atenuador pode ser qualquer um.
493. De quais aparelhos necessita-se dispor, a fim de verificar experimentalmente a lei de Ohm, i.é., demonstrar que a intensidade da corrente é diretamente proporcional à diferença de potenciais?

494. A dois condensadores planos iguais, unidos paralelamente, foi transmitida uma carga Q . No momento de tempo $t = 0$, a distância entre as placas do primeiro condensador começa a aumentar uniformemente, segundo a lei $d_1 = d_0 + vt$, e a distância entre as placas do segundo condensador começa a diminuir uniformemente segundo a lei $d_2 = d_0 - vt$. Desprezando as resistências dos fios de ligação, encontrar a intensidade da corrente do circuito no período de movimento das placas dos condensadores.

495. Encontrar o trabalho realizado por um campo electrostático (ver condições do problema 494), para aumento da distância entre as placas do primeiro condensador e a diminuição da distância entre as placas do segundo condensador, simultaneamente, em uma grandeza a .

496. Durante o trabalho com um galvanômetro sensível um pesquisador, sentado em uma cadeira junto de uma mesa, descobriu um fenômeno curioso. (O galvanômetro estava fixo na parede e os extremos de seu enrolamento, ligados a uma chave aberta, localizada na mesa). Levantando-se da cadeira e tocando a mesa com a mão, o pesquisador observou um deslocamento considerável do galvanômetro. Se o pesquisador tocava a mesa sentado na cadeira, então, tal deslocamento não se observava. De igual modo, a imagem do galvanômetro não se deslocava, quando o pesquisador tocava a mesa, não sentando-se anteriormente na cadeira. Como é possível explicar este fenômeno?

497. Em um galvanômetro muito sensível, com o circuito aberto, foi descoberto o seguinte efeito. Se aproximamos a um dos extremos do enrolamento do galvanômetro um corpo carregado, então, haverá um deslocamento. Se aproximamos este corpo ao outro extremo do enrolamento, então, o deslocamento ocorrerá no mesmo sentido. Como explicar este fenômeno?

498. Como está distribuído o potencial na pilha de Daniel, estando aberto o circuito externo?

499. Representar, graficamente, a variação do potencial ao longo dos circuitos fechados, representados na fig. 176. Determinar a intensidade da corrente para cada circuito e a diferença de potenciais entre os pontos A e B . Desprezar a resistência dos fios de união.

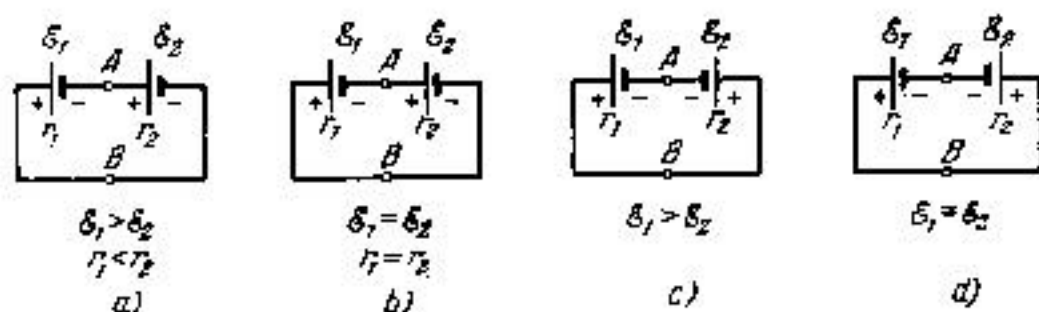


Fig. 176

500. Quando mistura-se um mol de zinco com ácido sulfúrico são emitidos cerca de $445 \cdot 10^3$ J de calor, e para a liberação de um mol de cobre de uma solução de sulfato de cobre, utilizam-se cerca de $235 \cdot 10^3$ J. Encontrar por estes dados a f.e.m. da pilha de Daniel.
501. Duas pilhas de Daniel com resistências internas $r_1 = 0,8$ ohm e $r_2 = 1,3$ ohm e mesma f.e.m. estão unidas paralelamente e carregadas por uma resistência externa R . Determinar a relação das quantidades de zinco, que se dissolvem nessas pilhas em um determinado intervalo de tempo.
502. Uma pilha de Daniel é feita de materiais absolutamente limpos. Determinar o gasto de zinco e dos cristais de sulfato de cobre $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, se a pilha dá uma corrente de 0,1 A no período de 8 horas.
503. Em uma pilha de Daniel o cobre foi substituído por cera, coberta por uma camada de grafite. Descrever o fenômeno que ocorrerá nessa pilha, se unirmos por um fio o zinco com a camada de grafite.
504. Como variará a f.e.m. da bateria, que se vê na fig. 177, se tirarmos a parede entre os recipientes? A solução do ácido sulfúrico é utilizada como eletrólito.

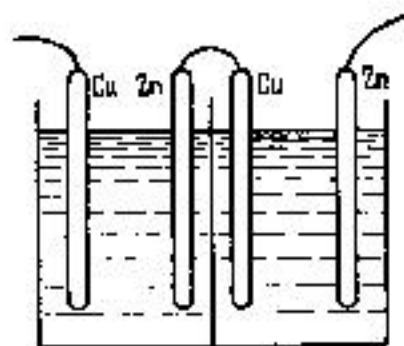


Fig. 177

505. Uma barra de carvão homogênea encontra-se no fundo de um recipiente com eletrólito. Aos extremos da barra ligou-se um voltímetro, que possui grande resistência. No meio da barra de carvão, apoia-se uma barra de zinco. O que mostrará o voltímetro, se a barra de zinco estiver na posição vertical? Como variará a indicação do mesmo, se a barra de zinco inclinar-se para a direita, ou para a esquerda?
506. Uma esfera condutora ôca, de raio $R = 5$ cm foi colocada em uma banheira eletrolítica cheia de uma solução de sulfato de cobre. Na superfície da esfera existe uma abertura de raio $r = 0,5$ mm. Em quanto aumentará o peso da esfera, se o depósito de cobre dura $t = 30$ m, para uma densidade de corrente no eletrólito igual a $j = 0,01$ A/cm²?
507. Se um condensador, que tem carga igual a Q , for descarregado dentro de uma banheira eletrolítica com água acidada, haverá um desprendimento de gás oxídrico. Segundo a lei de Faraday a quantidade de substância depositada por eletrólise, depende somente da quantidade de eletricidade que circula. Isto significa, que se descarregarmos o condensador dentro de N banheiras unidas em série, então, desprender-se-á N vezes mais gás oxídrico. N pode tornar-se suficientemente grande e obter qualquer quantidade de gás. Queimando este gás, obteremos certa quantidade de energia, o que contradiz claramente a lei de conservação de energia, uma vez que a energia inicial do condensador carregado, não é infinitamente grande. O que ocorre então?
508. Pela explosão de um gás oxídrico, em cada grama de hidrogênio reagente, emitem-se $145 \cdot 10^3$ joules de calor. Utilizando estes dados, encontrar para que menor valor da f.e.m. de uma bateria, pode ocorrer a eletrólise da água?
509. Na eletrólise, os íons positivos e negativos continuamente neutralizam-se nos eletrodos correspondentes. Que causas mantêm a concentração dos íons nos eletrólitos em um nível constante? Em que partes do eletrólito ocorre a reposição dos íons neutralizados?
510. A densidade total de corrente nos eletrólitos determina-se como a soma de duas correntes: a corrente dos

ions positivos e a corrente dos íons negativos, i.e.,

$$j = e(n_+v_+ + n_-v_-),$$

onde e é a carga do íon, n e v são a concentração e a velocidade dos íons positivos e negativos. Por que a quantidade de substância depositada, por exemplo no cátodo, considera-se proporcional à corrente total e não à corrente en_+v_+ ?

511. A temperatura das extremidades quentes de uma termobateria é igual a $t_1 = 127^\circ \text{C}$ e das extremidades frias é igual a $t_2 = 27^\circ \text{C}$, a f.e.m. da bateria é igual a $\mathcal{E} = 4 \text{ V}$. Para a manutenção de uma temperatura constante nas extremidades quentes, são transmitidas às mesmas, por unidade de tempo, duas calorias. À bateria foi ligada uma banheira eletrolítica, com solução de sulfato de cobre. Qual é a maior quantidade de cobre (teoricamente) que pode ser depositada no cátodo por unidade de tempo?
512. Duas esferas metálicas de raios iguais a $r_1 = 1 \text{ cm}$ e $r_2 = 2 \text{ cm}$, que se encontram a uma distância $R = 100 \text{ cm}$ uma da outra, foram unidas a uma bateria, com força eletromotriz $\mathcal{E} = 3000 \text{ V}$. Encontrar a força de interação das esferas. A interação dos fios de ligação pode ser desprezada.
513. As placas de um condensador plano foram unidas a uma bateria, cuja f.e.m. é igual a $\mathcal{E}$. Calcular o trabalho mecânico realizado pelo campo elétrico para o deslocamento das lâminas, se, inicialmente, a distância entre as lâminas era igual a d_1 e no final igual a d_2 , sendo que $d_2 < d_1$. A irradiação do calor na bateria e nos fios condutores pode ser desprezada.
514. Determinar as tensões U_1 e U_2 nos condensadores (fig. 178), se $\mathcal{E}_1 = 12 \cdot 10^3 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 13 \cdot 10^3 \text{ V}$, $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 7 \mu\text{F}$. A condutibilidade dos dielétricos pode ser desprezada.
515. Uma das placas de um condensador, que está unido a uma bateria, com força eletromotriz igual a $\mathcal{E}$, está unida à terra (fig. 179). Variarão os potenciais das lâminas do condensador relativamente a terra, se desligarmos o fio que une a placa do condensador à terra?

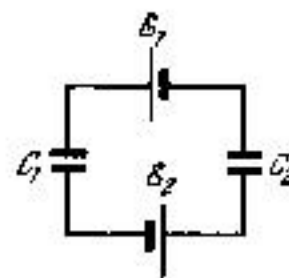


Fig. 178

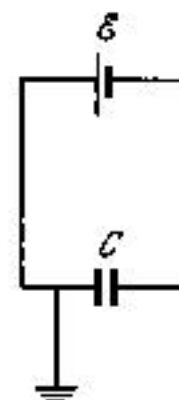


Fig. 179

516. Através de um acumulador com resistência interna r e f.e.m. $\mathcal{E}$, passa uma corrente igual a I . Qual é a diferença de potenciais nos terminais do acumulador?
517. Por que uma pilha galvânica, com f.e.m. de alguns volts, produz uma corrente considerável e uma máquina eletrostática, com f.e.m. de milhares de volts, produz uma corrente insignificante?
518. Em qual caso, duas pilhas galvânicas unidas em série e carregadas com uma resistência externa, darão menos corrente do que uma destas pilhas ligada à mesma resistência?
519. Para determinação do lugar de ruptura do isolamento entre os fios de uma linha telefônica dupla, de comprimento $L = 5,6 \text{ km}$, ao extremo da mesma liga-se uma bateria com f.e.m. igual a $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$. Depois verifica-se que: se os fios do outro extremo da linha estão abertos, então a corrente através da bateria é igual a $I_1 = 1,5 \text{ A}$, se estiverem curto-circuitados, então, a corrente através da bateria será igual a $I_2 = 2 \text{ A}$. A corrente de curto-circuito da bateria é $I_s = 96 \text{ A}$. A resistência de cada condutor da linha é igual a $r = 7 \text{ ohm}$. Determinar a resistência do isolamento R no lugar de ruptura.
520. As pilhas galvânicas com f.e.m. $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$ e $\mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ V}$ estão unidas segundo o esquema representado na fig. 180, a. Um voltímetro, cujo valor zero encontra-se no meio da escala, mostra a tensão $U_1 = 1 \text{ V}$, sendo que seu ponteiro inclina-se para o lado, em que a chave K está aberta. Que mostrará o volti-

metro, se unirmos os aparelhos pelo circuito que se vê na fig. 180, b? A corrente que passa no voltímetro, pode ser desprezada.

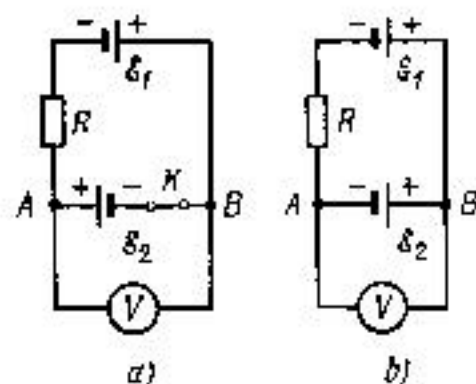


Fig. 180

521. Resolver o problema 520, considerando que a chave K está fechada (fig. 180, a) e que o ponteiro do voltímetro inclina-se para o lado oposto da chave aberta.
522. Duas pilhas com f.e.m. $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$ e $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ V}$ estão ligadas segundo o circuito representado na fig. 181.

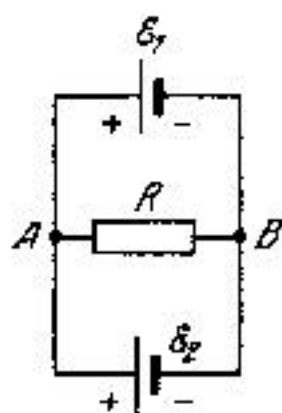


Fig. 181

A resistência é $R = 0,5 \text{ ohm}$. As resistências internas das pilhas são iguais a 1 ohm cada uma. Determinar as intensidades das correntes que passam através das pilhas e da resistência R . A resistência dos fios condutores não é necessário considerar.

523. Para qual valor da resistência R , no circuito do problema 522, não passará corrente, através da pilha galvânica com f.e.m. $\mathcal{E}_2$? Para quais valores de R ,

a corrente através desta pilha dirigir-se-á em sentido oposto à f.e.m. da mesma?

524. Poder-se-ia unir, em grupos separados, 24 acumuladores, tendo cada um f.e.m. $\mathcal{E}_0 = 2 \text{ V}$ e resistência interna $r = 0,3 \text{ ohm}$, e obter, no circuito externo por uma resistência $R = 0,2 \text{ ohm}$, uma corrente $I = 21 \text{ A}$?
525. Um fogão elétrico, com capacidade para uma tensão de 220 V , necessita de reparo, a fim de ser utilizado para uma tensão de 110 V , não trocando e não diminuindo as espiras, a fim de que sua potência permaneça a mesma. O que é necessário fazer para isto?
526. Por que ao ligarmos à rede um aparelho de aquecimento de grande potência (por exemplo, um ferro elétrico), o fio incandescente das lâmpadas em um apartamento imediatamente diminuem de intensidade, e depois de um intervalo de tempo pequeno aumentam novamente atingindo aproximadamente a intensidade anterior?
527. Uma chaleira elétrica tem dois enrolamentos. Ao ligarmos um deles, a água ferverá em um tempo t_1 , e se ligarmos o outro, então, ferverá a mesma quantidade de água em um tempo t_2 . Depois de quanto tempo ferverá a mesma quantidade de água, se ligarmos os dois enrolamentos ao mesmo tempo em série, ou paralelamente?
528. Um aquecedor elétrico tem três enrolamentos. Se unirmos dois enrolamentos paralelamente, ligando aos mesmos o terceiro em série, então, para diferentes combinações dos enrolamentos, a água em um recipiente ferve correspondentemente em 20, 40 e 16 minutos. Em quanto tempo ferverá a água, se unirmos todos os enrolamentos 1) em série? 2) em paralelo?
529. Para transmissão de energia elétrica a grandes distâncias com a ajuda de um transformador, aumentam a tensão de tal modo, que a potência permanece a mesma e a intensidade da corrente torna-se menor. Segundo a lei de Joule-Lentz, a quantidade de calor, irradiada nos fios, é igual a $Q = I^2 R t$ e, conseqüentemente, a perda de energia irradiada será pequena para correntes pequenas. Por outro lado, $Q = \frac{U^2}{R} t$, i. é., a quantidade de calor irradiada, aumenta com o aumento da tensão.

Explicar: por que o aumento de tensão conduz à economia de energia elétrica para transmissão da mesma a grandes distâncias.

530. Um acumulador com f.e.m. $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ e resistência interna $r = 1 \text{ ohm}$ está carregado com uma resistência externa R e dissipa na mesma uma potência $W = 9 \text{ W}$. Determinar a diferença de potenciais U nos terminais do acumulador. Qual é a causa de resultados diferentes?
531. Dois fogões elétricos, ligados paralelamente à rede urbana, gastam uma potência comum igual a N . Se ligarmos-os em série, a potência será maior do que a potência de qualquer outro par de fogões elétricos unidos em série do que utilizam uma potência N , ao serem ligados em paralelo. Que potências gastam estes fogões ao serem ligados na rede em separado?
532. Qual a maior potência útil (potência dissipada em uma resistência externa), que pode produzir um acumulador com f.e.m. $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ e resistência interna igual a $r = 1 \text{ ohm}$? Qual deverá ser, neste caso, a resistência externa do circuito?
533. Determinar o coeficiente de rendimento útil η do acumulador mencionado nos problemas 530 e 532. De que modo o coeficiente de rendimento útil dependerá da resistência externa, permanecendo constante a resistência interna? Como variará, nesse caso, a potência útil? Poderá ser η igual à unidade?
534. O carregamento de um acumulador, com força eletromotriz inicial igual a $\mathcal{E}$, é realizado por uma estação de carregamento, onde a tensão da rede é igual a U . A resistência interna do acumulador é igual a r . Determinar a potência útil, utilizada no carregamento do acumulador e a potência gasta na irradiação de calor no acumulador.
535. Ultrapassaria a potência útil, empregada no carregamento de um acumulador, a quantidade do calor irradiado?
536. Por um condutor passa uma corrente $I = 10 \text{ A}$. A área da seção transversal do condutor é $S = 5 \text{ cm}^2$, e o número de elétrons livres em 1 cm^3 do mesmo é $n = 10^{23}$. Determinar a direção da velocidade dos elétrons v , considerando-a igual para todos os elétrons.

537. Um paralelepípedo metálico, retangular, de lados iguais a d , b , c ($d \gg c$; $b \gg c$), move-se com aceleração a em direção ao lado menor (fig. 182). Encontrar a intensidade do campo elétrico, que surge como consequência da aceleração do movimento do paralelepípedo metálico, assim como, a densidade das cargas elétricas nas superfícies laterais do paralelepípedo, perpendiculares à direção da aceleração.

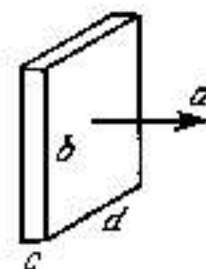


Fig. 182

538. Um cilindro metálico, maciço, de raio R , gira com velocidade angular constante igual a ω . Encontrar a dependência da intensidade do campo, em relação a uma distância até o eixo do cilindro e a diferença de potenciais entre a superfície do cilindro e o eixo.
539. Tem-se um disco metálico de raio R (fig. 183), que gira com velocidade angular ω . O disco foi ligado a

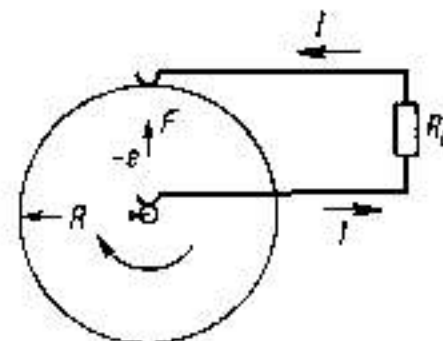


Fig. 183

um circuito elétrico, com a ajuda de contatos deslizantes que tangenciam o eixo do disco e sua borda. A resistência do disco é insignificante em comparação com a resistência da carga R_0 . Determinar a quantidade de calor irradiada por unidade de tempo. Explicar, sob o ponto de vista da teoria eletrônica dos metais, o que freia o disco.

540. Duas partículas, com massas m_1 e m_2 , sofrem um choque central não elástico. A energia necessária para ionizar a segunda partícula é igual a $\mathcal{E}_i$. Qual é a energia mínima, que deve possuir a primeira partícula até o momento do choque, a fim de que ocorra a ionização? A segunda partícula, até o momento do choque, encontrava-se em repouso.
541. Na fig. 184 está representado o contador de partículas elementares de Geiger-Müller. Entre o corpo do tubo A e um fio fino cria-se uma alta tensão, somente um pouco menor do que a tensão crítica, que é necessária para a descarga explosiva. Uma partícula carregada rápida, atingindo o contador, provoca a ionização das moléculas de gás, iniciando, assim, a descarga. A passagem da corrente, pelo circuito, é acompanhada pela queda da tensão na grande resistência R . Esta queda de tensão, registra-se depois da amplificação pelos aparelhos correspondentes. A fim de que o contador corresponda a sua designação, há necessidade da extinção rápida da descarga, provocada pela partícula. Qual é a causa da extinção da descarga no circuito da fig. 184?

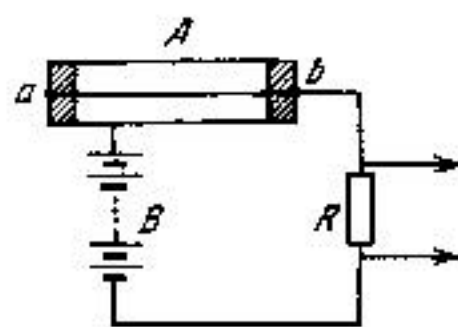


Fig. 184

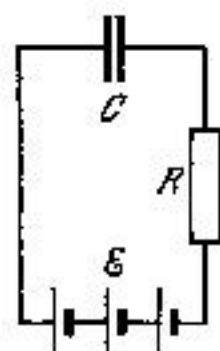


Fig. 185

542. A uma fonte de alta tensão, através de uma resistência $R = 10^3$ ohm ligou-se um condensador $C = 10^{-11}$ farad, cuja distância entre as placas é $d = 3$ mm (fig. 185). O ar no espaço entre as placas do condensador é ionizado por raios X, de tal modo que em 1 cm^3 formam-se $n = 10^4$ pares de íons, por segundo. A carga de cada íon é igual à carga do elétron. Encontrar a queda

da tensão na resistência R , considerando que todos os íons atingem as placas do condensador, não conseguindo recombinar.

543. Um ionizador cria, por unidade de tempo, em um volume unitário de gás Δn_0 íons de ambos os sinais. Em determinado momento de tempo, em um volume unitário do gás, existem n_0 íons positivos e a mesma quantidade de íons negativos. O gás encontra-se entre dois eletrodos planos e paralelos, de área S cada um e a distância entre os mesmos é igual a l . A intensidade da corrente entre os eletrodos é I . Considerando que o número de íons, que se recombinam por unidade de tempo, no volume unitário, é igual a: $\Delta n_0 = \gamma n_0^2$, onde γ é um coeficiente denominado constante de recombinação; determinar, em que condições a concentração dos íons, entre os eletrodos, não mudará com o tempo. A carga de um íon é igual a q .
544. Suponhamos, que no problema anterior o gás ionizado encontre-se entre os eletrodos em um campo elétrico, de intensidade igual a E . Demonstrar que a condição $I/qSt \ll \gamma n^2$ para a condutibilidade dependente é válida a lei de Ohm. Para isto é necessário considerar, que as velocidades do movimento dirigido dos íons positivos e negativos, são iguais a $u_+ = b_+ E$ e $u_- = b_- E$ correspondentemente, onde b_+ e b_- são coeficientes constantes (denominados mobilidade dos íons do gás).
545. Demonstrar que a densidade de corrente dos íons, no problema 543 para a condição $\gamma n_0^2 \ll I/qSt$ não depende da diferença de potenciais entre os eletrodos. Explicar por que a densidade de corrente é tanto maior, quanto maior for a distância entre os eletrodos.
546. Representar graficamente a distribuição da tensão na decomposição da descarga.
547. Descrever o comportamento de diferentes partes da decomposição da descarga: 1) pelo deslocamento do ânodo em direção ao cátodo; 2) pelo deslocamento de cátodo em direção ao ânodo.
548. O que ocorrerá com um arco volático ligado, se, bruscamente, esfriarmos o carvão negativo? O que ocorrerá, se esfriarmos o carvão positivo?
549. A uma máquina eletrostática foram ligadas, paralelamente, uma garrafa de Leyden e um descarregador. A corrente da máquina eletrostática é $I = 10^{-5}$ A.

A capacidade da garrafa de Leyden é $C = 10^{-8}$ farad. A fim de que ocorra a descarga disruptiva, a máquina deve trabalhar um tempo $t = 30$ s. A duração da descarga é $\tau = 10^{-6}$ s. Determinar a grandeza da corrente na descarga I_{des} e a tensão do contato da descarga disruptiva U_{con} . A capacidade do descarregador pode ser desprezada.

550. O descarregador de uma máquina eletrostática, cujo disco gira com velocidade constante, é ligado à armadura da garrafa de Leyden. Entre as esferas do descarregador em intervalos de tempo iguais τ_0 passam faíscas. Depois de quais intervalos, de tempo τ , passarão faíscas, se ao descarregador forem ligadas duas garrafas de Leyden, unidas entre si, uma vez paralelamente e outra vez em série? A capacidade de cada garrafa de Leyden é a mesma que no primeiro caso.
551. Que energia em ergs adquire um elétron, que percorre, no vácuo, uma diferença de potenciais igual a 1 V? (Em física atômica esta energia tem medida unitária de elétron-volt*).
552. Coincide a trajetória do movimento de uma partícula carregada em um campo eletrostático com as linhas de força?
553. Entre um fio incandescente, que emite elétrons, e um anel condutor foi criada a diferença de potenciais U (fig. 186). Os elétrons movimentam-se, aceleradamente,

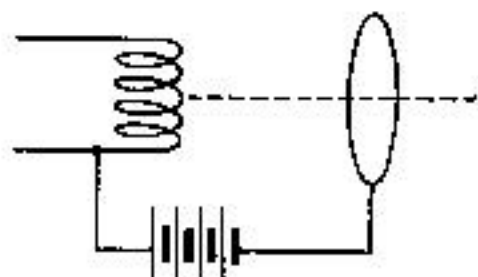


Fig. 186

ao longo do eixo do anel. Graças a isto, a energia cinética dos mesmos aumenta, ao mesmo tempo em que a bateria, a qual cria a diferença de potenciais U , não realiza trabalho, uma vez que não passa corrente no circuito. (Supõe-se, que os elétrons não atingem o

anel) Como relacionar isto com a lei de conservação da energia?

554. Um triodo, que tem o fio incandescente reto, está ligado a um circuito como mostra a fig. 187. A f.e.m. da bateria do ânodo é $\mathcal{E}_1 = 80$ V, da bateria do fio incandes-

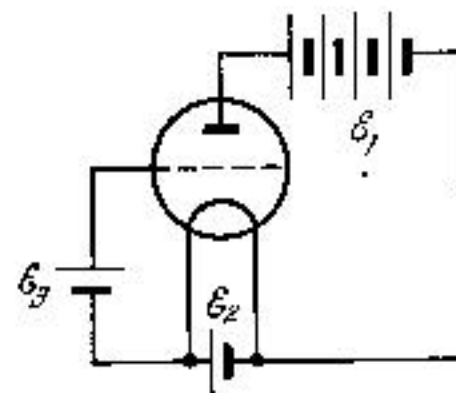


Fig. 187

cente é $\mathcal{E}_2 = 6$ V e da bateria da rede é $\mathcal{E}_3 = 2$ V. Com que energia os elétrons atingirão o ânodo da válvula? Como variará a energia dos elétrons, que atingem o ânodo, se $\mathcal{E}_3$ variar em grandeza, ou mesmo mudando o sinal? A corrente do ânodo considerar pequena, em relação à corrente do fio incandescente.

555. A corrente do ânodo de um diodo, em um determinado intervalo de tensões, pode ser relacionada com a diferença de potencial U_a , entre os eletrodos pela equação $I_a = AU_a + BU_a^2$. Encontrar a corrente do ânodo, se o diodo for ligado em série com a resistência $R_a = 2 \cdot 10^4$ ohm, no circuito da bateria de f.e.m. $\mathcal{E} = 120$ V. Para tal diodo $A = 0,15$ mA/V, $B = 0,005$ mA/V². A resistência interna da bateria pode ser desprezada.
556. Duas válvulas eletrônicas são unidas paralelamente e ligadas a um circuito de uma bateria com f.e.m. $\mathcal{E} = 300$ V em série com a resistência $R = 4 \cdot 10^3$ ohm (fig. 188). A dependência da corrente do ânodo i em relação à tensão do ânodo U_a , para cada uma das válvulas pode ser aproximadamente representada pela fórmula: $i = AU_a + BU_a^2$, onde para uma das válvulas $A_1 = 0,07$ mA/V, $B_1 = 0,05$ mA/V² e para a outra válvula $A_2 = 0,03$ mA/V, $B_2 = 0,01$ mA/V². Deter-

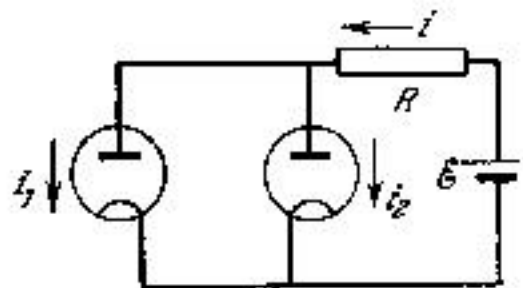


Fig. 188

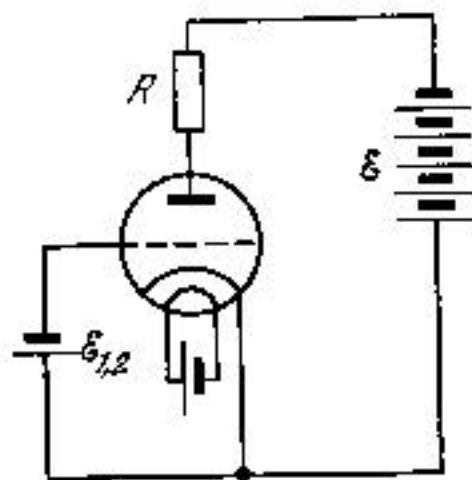


Fig. 189

minar a corrente do ânodo das válvulas. A resistência interna da bateria pode ser desprezada.

557. Uma válvula eletrônica foi ligada ao circuito de uma bateria de f.e.m. $\mathcal{E} = 250$ V em série com a resistência $R = 10^4$ ohm (fig. 189). A rede da válvula está unida com o polo negativo da bateria ($\mathcal{E}_1 = 3$ V), e o cátodo, com o polo positivo. A queda de tensão na resistência R , nessas condições, atinge $U_1 = 95$ V. Se no circuito da rede colocar-se uma bateria $\mathcal{E}_2 = 6$ V, então, a diferença de potenciais na resistência R será $U_2 = 60$ V. Qual será a diferença de potenciais entre o ânodo e o cátodo da válvula, se fecharmos em curto-circuito a rede e o cátodo? (No campo de variação do potencial da rede examinado, considerar a característica da rede da válvula como uma linha reta.)

558. Três diodos iguais, cujas características do ânodo podem ser, aproximadamente, representadas pelos segmentos das retas:

$$I_a = 0 \quad \text{para } U_a \leq 0,$$

$$I_a = kU_a \quad \text{para } U_a > 0,$$

onde $k = 0,12$ mA/V, foram ligados a um circuito como mostra a fig. 190. Representar, graficamente, a dependência da corrente I no circuito, em relação à tensão V , se $\mathcal{E}_1 = 2$ V, $\mathcal{E}_2 = 5$ V, $\mathcal{E}_3 = 7$ V, e V pode variar de -10 V até $+10$ V.

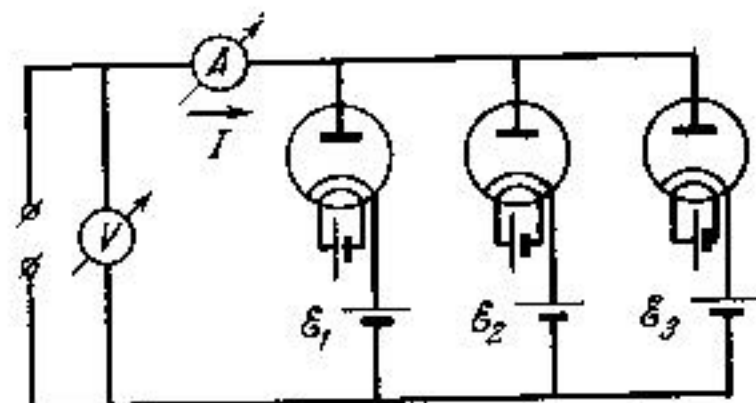


Fig. 190

559. Determinar a sensibilidade de um tubo catódico, em relação à tensão, i.e., a grandeza de inclinação da mancha na tela provocada pela diferença de potenciais em 1 V, nas placas dirigentes. O comprimento das placas dirigentes é l , a distância entre elas é d , a distância do extremo da placa até a tela é L e a diferença de potenciais aceleradora é U_0 .

§ 22. O CAMPO MAGNÉTICO DA CORRENTE.

AÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO NA CORRENTE E NAS CARGAS EM MOVIMENTO

560. Partindo de conceitos dimensionais, determinar a intensidade do campo magnético na distância r de: 1) um fio infinitamente longo pelo qual passa a corrente I ; 2) de um plano infinito, pelo qual passa uma corrente superficial de densidade j .
561. Em um tubo retilíneo infinito e de paredes finas, passa a corrente I . Determinar a indução do campo magnético em um ponto arbitrário dentro do tubo.
562. Considerando que a indução do campo magnético dentro de um condutor cilíndrico longo é $B = k \cdot 2\pi jr$, onde j é a densidade da corrente, r é a distância do eixo do condutor, k é o coeficiente, que depende da escolha do sistema de unidades, determinar a indução do campo magnético em um ponto arbitrário dentro de uma cavidade cilíndrica longa, cortada paralelamente, ao eixo do condutor. No condutor passa corrente de densidade j . A distância entre os eixos do condutor e da cavidade é d .

563. Representar a distribuição das linhas de indução do campo magnético na cavidade do condutor, descrito no problema 562.
564. Em um contorno, com forma de um círculo de raio R , passa corrente. Determinar a indução do campo magnético no centro do círculo, se a intensidade da corrente é igual a I .

Observação. Para determinação da indução do campo magnético pode-se utilizar a lei de Biot-Savart-Laplace. Esta lei afirma que um elemento de contorno Δl , pelo qual passa a corrente I , cria, em um ponto arbitrário A do espaço, um campo magnético, cuja indução é igual a:

$$\Delta B = k \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2},$$

onde r é a distância do elemento Δl até o ponto A ; α é o ângulo, formado pelo raio vetor r com o segmento Δl ; k é o coeficiente que depende da escolha do sistema de unidades. A direção de ΔB determina-se pela regra do saca-rolhas; a direção de rotação da cabeça do saca-rolhas corresponde à direção da corrente I , no segmento do contorno Δl . O vetor ΔB é perpendicular ao plano que contém o segmento Δl e o raio vetor r .

565. Em um contorno, com forma de anel de raio R , passa uma corrente I . Determinar a indução do campo magnético, em um ponto arbitrário localizado na perpendicular, traçada ao plano do anel partindo do seu centro.
566. Em um condutor, infinitamente longo ABC , dobrado em ângulo reto, passa uma corrente I (fig. 191). Em

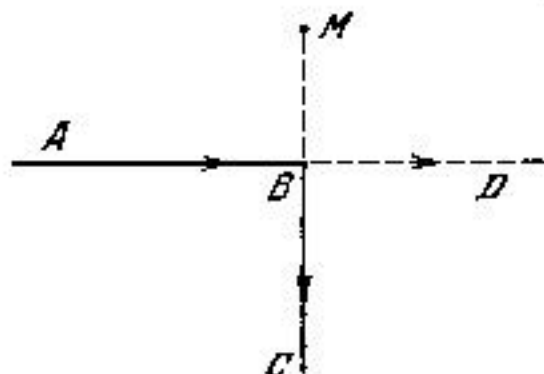


Fig. 191

quantas vezes variará a intensidade do campo magnético no ponto M , se ao ponto B unirmos um condutor

reto, infinitamente longo BD , de tal modo que a corrente I , ramifica-se no ponto B em duas partes iguais, e a corrente no condutor AB continue a mesma de antes?

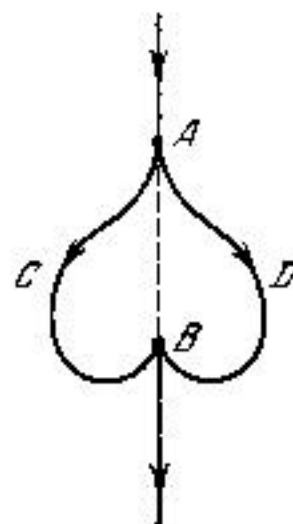


Fig. 192

567. Por um condutor, colocado em um plano, como mostra a fig. 192, passa uma corrente. Encontrar a indução do campo magnético, em um ponto arbitrário da linha AB que é o eixo de simetria do condutor.
568. Sob um aro horizontal longo, em duas molas iguais, (o coeficiente de elasticidade de cada mola é igual a k) foi suspenso um condutor de comprimento l . Quando, pelo aro e pelo condutor, não passa corrente, a distância entre eles é h . Encontrar a distância entre o aro e o condutor, se no aro passa uma corrente I e no condutor i . O condutor não pode sair do plano vertical.
569. Determinar a força, com que atua um condutor reto, infinitamente longo, em um contorno com forma de retângulo, localizado no plano do condutor. Sabe-se, que pelo condutor passa uma corrente I e pelo contorno I_1 . Os lados do contorno AD e BC têm comprimento a e são paralelos ao condutor. A distância de AD ao condutor é x . O comprimento do lado $AB = DC = h$. A direção das correntes indica-se na fig. 193 por setas.

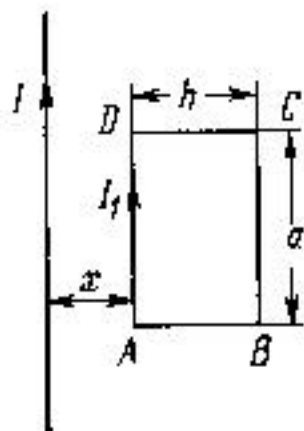


Fig. 193

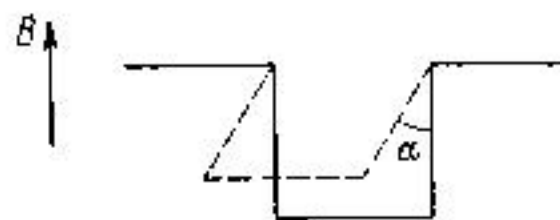


Fig. 194

570. Um condutor de cobre, de área S está dobrado de tal modo que forma três lados de um quadrado, e o mesmo pode girar ao redor de um eixo horizontal (fig. 194). O condutor encontra-se em um campo magnético uniforme, dirigido verticalmente. Quando, pelo condutor, passa uma corrente I , o mesmo inclina-se em um ângulo α , em relação à vertical. Determinar a indução do campo. A densidade do cobre é igual a ρ .
571. No centro de um solenóide longo, em cada centímetro do qual existem n espiras, encontra-se uma bobina curta, constituída de N espiras e de seção S . O eixo desta bobina é perpendicular ao eixo do solenóide longo e está dirigido verticalmente. A bobina interna está fixa ao extremo de uma balança, a qual, na ausência de corrente, encontra-se em equilíbrio. Quando por ambas as bobinas passa uma mesma corrente I , para equilibrar a balança na parte direita da mesma (fig. 195), é necessário colocar um peso P . O compri-

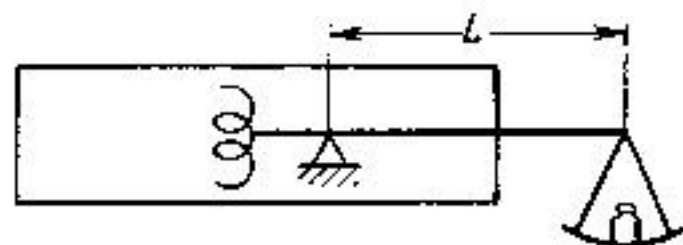


Fig. 195

mento da barra direita da balança é igual a L . Determinar a intensidade da corrente I .

Observação. A indução do campo magnético, nas proximidades do centro do solenóide longo, é igual a: $B = \mu_0 n I$, onde n é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide e I é a intensidade da corrente, que passa pelo solenóide.

572. Em um anel de arame, de raio R , suspenso por dois condutores flexíveis, passa uma corrente I . O anel é colocado em um campo magnético uniforme com indução B . As linhas de indução são horizontais. Com que força é distendido o anel?
573. Um anel condutor, de raio R , encontra-se em um campo magnético não uniforme, cujas linhas de indução formam, com os pontos de interseção com o anel, um

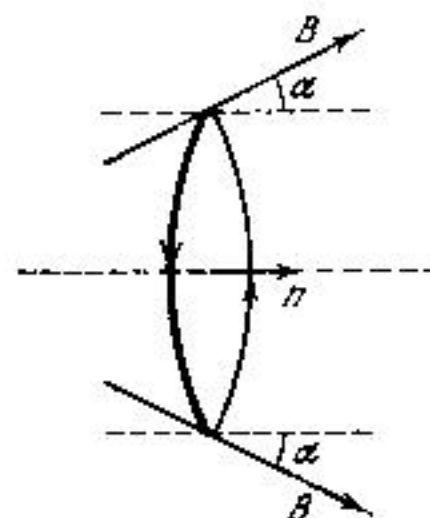


Fig. 196

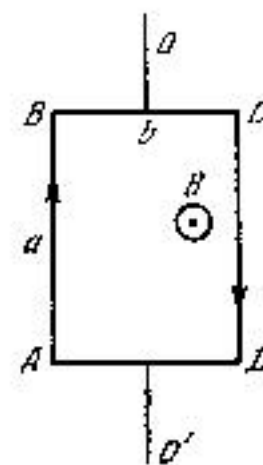


Fig. 197

ângulo α relativamente à normal ao plano do anel (fig. 196). A indução de um campo magnético, que age no anel, é igual a B . Pelo anel passa uma corrente I . Com que força o campo magnético age no anel?

574. Um contorno retangular $ABCD$, cujos lados tem comprimento a e b , encontra-se em um campo magnético uniforme de indução B e pode girar em redor do eixo OO' (fig. 197). No contorno passa uma corrente constante I . Determinar o trabalho, realizado pelo campo magnético, ao girar o contorno em 180° , se, inicialmente, o plano do contorno estava perpendicular ao campo magnético e localizado como mostra a fig. 197.

575. Como mover-se-á, em um campo magnético uniforme, um elétron, se, no momento inicial, sua velocidade forma um ângulo α com as linhas de indução do campo?
576. Em uma fita metálica de largura $AB = a$ passa uma corrente I . A fita é colocada em um campo magnético, cuja indução é perpendicular à mesma (fig. 198). Determinar a diferença de potenciais entre os pontos A e B da fita.

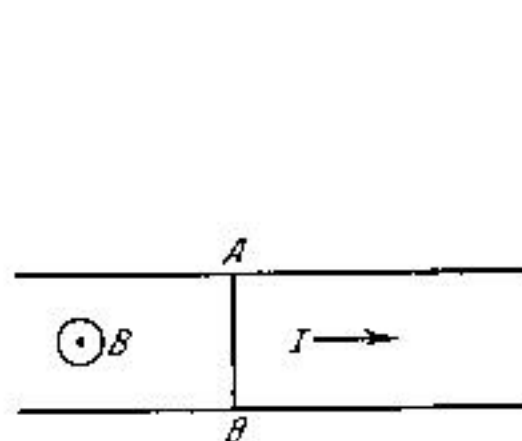


Fig. 198

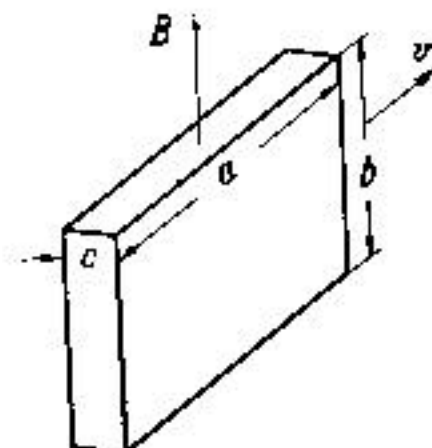


Fig. 199

577. Uma barra metálica descarregada, tem a forma de um paralelepípedo retangular com lados a , b , c ($a \gg c$, $b \gg c$). A barra move-se em um campo magnético, na direção do lado a , com velocidade v . A indução do campo magnético é B e perpendicular à base da barra, com lados a e c (fig. 199). Determinar a intensidade do campo elétrico na barra e a densidade das cargas elétricas nas superfícies laterais do paralelepípedo formadas pelos lados a , b .
578. Um cilindro metálico descarregado, de raio r , gira em um campo magnético com velocidade angular ω em redor de seu eixo. A indução do campo magnético está dirigida paralelamente ao eixo do cilindro. Qual deverá ser o valor da indução do campo magnético, a fim de que no cilindro não surja um campo eletrostático?
579. Encontrar a intensidade do campo eletrostático no cilindro (ver o problema 578), se a indução do campo magnético é igual a B .
580. Um feixe de íons de carga igual atinge uma região do espaço, onde existe um campo elétrico não uniforme

com tensão $E = 100$ N/coulomb e um campo magnético homogêneo com indução $B = 0,02$ N/(A·m). Os campos elétrico e magnético estão dirigidos perpendicularmente um ao outro e ambos perpendicularmente ao feixe. Os íons passam pelos campos elétrico e magnético sem desviação e, através de uma abertura, atingem região de um campo magnético homogêneo com indução $B' = 0,09$ N/(A·m) dirigida perpendicularmente ao movimento dos íons. Se os íons têm a forma de uma mistura de massas, iguais a 20 e 22 unidades de massa atômica, então, a que distância um do outro estes íons encontrar-se-ão, percorrendo a metade de um círculo?

§ 23. INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA. CORRENTE ALTERNADA

581. Um avião a jato, cujas asas medem 20 m, voa diretamente ao norte com velocidade 960 km/h e a tal altura, onde a componente vertical da indução do campo magnético da terra, é $6 \cdot 10^{-5}$ T. Qual é a diferença de potenciais entre os extremos das asas? Em qual asa o potencial é maior?
582. Em dois trilhos metálicos orientados move-se, sem atrito, com velocidade constante, um condutor de comprimento l e resistência elétrica igual a r . Os trilhos são unidos por um condutor fixo de resistência R . Todos os condutores estão distribuídos em um único plano e encontram-se em um campo magnético uniforme de indução igual a B , dirigida perpendicularmente ao plano dos condutores (fig. 200). A resistência

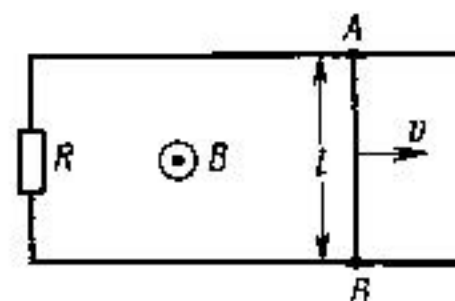


Fig. 200

elétrica dos trilhos é pequena em relação a r e R . Determinar a diferença de potenciais do campo elétrico

entre os pontos A e B . Explicar a causa do surgimento da corrente elétrica.

583. Em dois trilhos verticais AB e CD , unidos pela resistência R , pode escorregar, sem atrito, um condutor de comprimento l e massa m . O sistema encontra-se em um campo magnético uniforme de indução B , dirigida perpendicularmente ao plano da figura (fig. 201). Como movimentar-se-á o condutor móvel, no campo da força da gravidade, se desprezarmos a resistência do próprio condutor e dos trilhos?

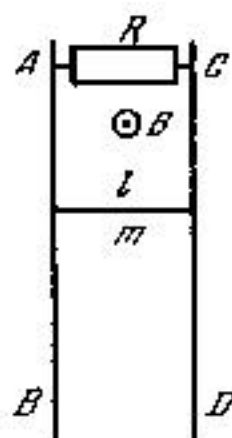


Fig. 201

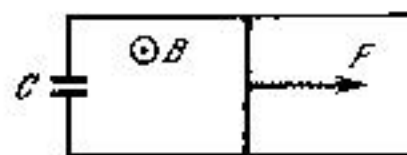


Fig. 202

584. Em dois trilhos metálicos paralelos, situados em um plano horizontal e carregados por um condensador de capacidade C , pode mover-se, sem atrito, um condutor de massa m e comprimento l . Todo o sistema encontra-se em um campo magnético uniforme de indução B , que está dirigida para cima. No meio do condutor, perpendicularmente ao mesmo e paralelamente aos trilhos, é aplicada a força F (fig. 202). Determinar a aceleração do condutor móvel, se a resistência dos trilhos, dos fios que os unem e do condutor móvel é igual a zero. Em quais tipos de energia transforma-se o trabalho da força F ? Considerar que no momento inicial a velocidade do condutor é igual a zero.

585. Um contorno retangular está localizado, no plano de um condutor retilíneo infinito no qual circula uma corrente, sendo que os lados AD e BC são paralelos ao condutor (fig. 203). No meio do lado DC está ligado

um aparelho, que mede a quantidade de carga que passa pelo contorno (na fig. não está representada). O contorno pode ser colocado em uma nova posição, representada na fig. 203 pelas linhas pontilhadas por dois métodos: 1) deslocando-a paralelamente a si mesma; 2) girando-a em 180° em redor do lado BC . Em qual caso a quantidade de carga, que passa através do aparelho, será maior?

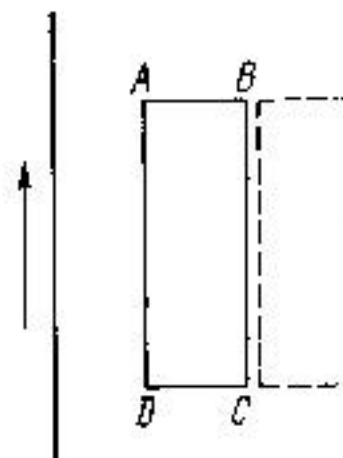


Fig. 203

586. Uma bobina de n espiras foi ligada a um galvanômetro balístico. A área de cada espira é S . (O galvanômetro balístico mede a quantidade de cargas elétricas, que passam pelo mesmo). A resistência de todo o circuito é R . Inicialmente, a bobina encontra-se entre os polos de um ímã, na região, onde o campo magnético é uniforme e sua indução é B , perpendicular à área das espiras. Depois a bobina é deslocada para um espaço onde não existe campo magnético. Qual é a quantidade de eletricidade que passa pelo galvanômetro?
587. Um contorno retangular $ABCD$ desloca-se, progressivamente, em um campo magnético de uma corrente I , que passa por um condutor retilíneo longo OO' . Os lados AD e BC são paralelos ao condutor. Determinar a grandeza e a direção da corrente induzida no contorno, se o mesmo desloca-se com uma velocidade constante v . $AD = BC = a$, $AB = DC = b$. A resistência do contorno é R (fig. 204).

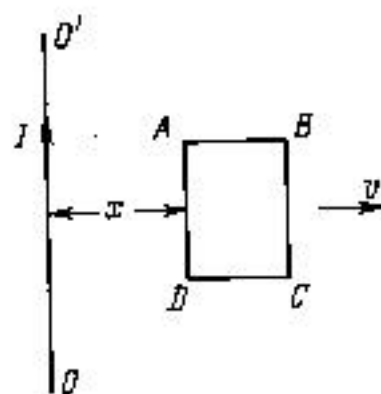


Fig. 204

588. Um anel condutor, de raio r , encontra-se em um campo magnético, cuja indução é perpendicular ao plano do anel e varia com o decorrer do tempo, segundo a lei $B = kt$. Determinar a intensidade do campo elétrico na espiral.
589. Um anel de seção retangular (fig. 205) foi feito de um material, com resistência específica ρ . O anel encontra-se em um campo magnético uniforme. A indução do campo magnético está dirigida segundo o eixo do anel

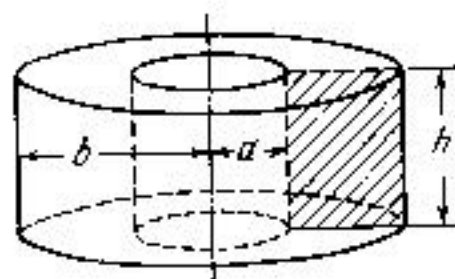


Fig. 205

e aumenta proporcionalmente com o tempo $B = kt$. Encontrar a intensidade da corrente, induzida no anel.

590. A metade de um anel condutor de raio r tem resistência R_1 e a outra metade R_2 . O anel encontra-se em um campo magnético uniforme, cuja indução é perpendicular ao plano do anel e varia, no decorrer do tempo, segundo a lei $B = B_0 + kt$ (B_0 é uma grandeza constante). Achar a intensidade do campo eletrostático no anel.

591. Determinar a intensidade da corrente nos condutores do circuito desenhado na fig. 206, se a indução do campo magnético uniforme é perpendicular ao plano do desenho e varia, no decorrer do tempo, segundo a lei $B = kt$. A resistência por unidade de comprimento dos condutores é igual a r .

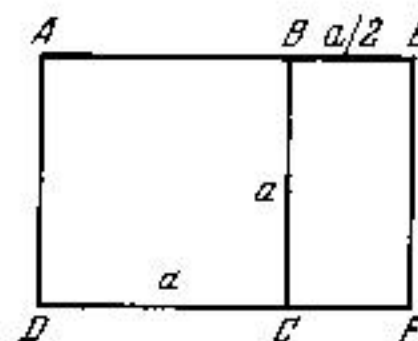


Fig. 206

592. Em um anel condutor, circular e uniforme, foi criada uma corrente contínua de indução I . O campo magnético variável, que cria esta corrente, é perpendicular ao plano do anel e está concentrado nas proximidades do seu eixo de simetria, o qual passa através do centro do anel (fig. 207). Qual é a diferença de potenciais entre os pontos A e B? O que mostrará um eletrômetro, ligado a estes pontos?

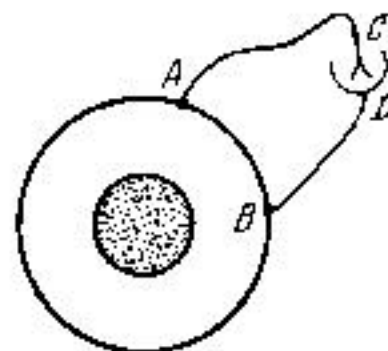


Fig. 207

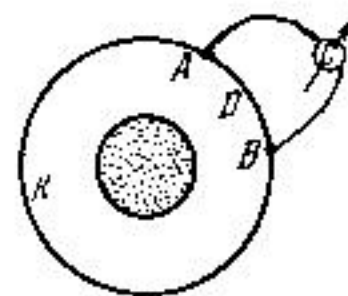


Fig. 208

593. Um campo magnético variável cria em um condutor circular $ADBKA$, uma força eletromotriz constante $\mathcal{E}$ (ver o problema 592). As resistências dos condutores ADB , AKB e ACB (fig. 208) são iguais, corresponden-

temente, á R_1 , R_2 e R_3 . Que intensidade da corrente indicará o amperímetro C ? O campo magnético está concentrado no eixo do condutor circular.

594. A resistência do condutor ACB (ver o problema 593) é $R_3 = 0$. Encontrar as intensidades das correntes I_1 , I_2 e I_3 e a diferença dos potenciais $U_A - U_B$.
595. Em dois trilhos metálicos, paralelos, fechados pela resistência R , move-se um condutor de comprimento l . A velocidade de deslocamento do condutor é igual a v . Todo o sistema encontra-se em um campo magnético uniforme, cuja indução é dirigida perpendicularmente ao plano, no qual situam-se os trilhos e varia com o tempo, segundo a lei $B = B_0 + kt$. No momento inicial, a área $abcd$ é igual a S_0 . Determinar a intensidade da corrente no circuito (fig. 209).

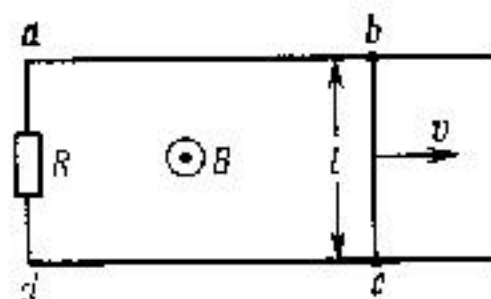


Fig. 209

596. Em um campo magnético uniforme encontra-se um anel condutor, capaz de girar em redor do diâmetro, perpendicular às linhas de indução magnética. A indução do campo começa a crescer. Encontrar as possíveis posições de equilíbrio do anel e indicar a posição de equilíbrio estável. O que variará, se a indução começar a decrescer?
597. Em um cilindro de material não magnético estão enroladas N espiras de arame (solenóide). O raio do cilindro é r e seu comprimento é l ($r \ll l$). A resistência do arame é R . Qual deve ser a tensão nos extremos do arame, a fim de que a corrente cresça, diretamente proporcional ao tempo, i.é., a fim de satisfazer a igualdade $I = kt$?
598. O solenóide (ver o problema 597) está unido a uma bateria, cuja f.e.m. é igual a $\mathcal{E}$. No momento de tempo

$t = 0$ liga-se a chave. Qual será a intensidade da corrente no circuito do solenóide, se desprezarmos as resistências R do solenóide, da bateria e dos fios de união?

599. Calcular o trabalho da bateria (ver o problema 598) no tempo τ . Em que tipo de energia transforma-se este trabalho?
600. O anel de um supercondutor é colocado em um campo magnético uniforme, cuja indução cresce de zero até B_0 . O plano do anel é perpendicular às linhas de indução do campo magnético. Determinar a intensidade da corrente induzida que surge no anel. O raio do anel é r , a indutância é L .
601. Em um campo magnético uniforme com indução B , encontra-se um anel supercondutor de raio r . As linhas da indução magnética são perpendiculares ao plano do anel. No anel não circula corrente. Encontrar o fluxo magnético, que penetra no anel, depois de ter sido desligado o campo magnético.
602. Ante o polo de um eletroímã, um fio longo, foi suspenso um anel supercondutor (fig. 210). O que ocor-

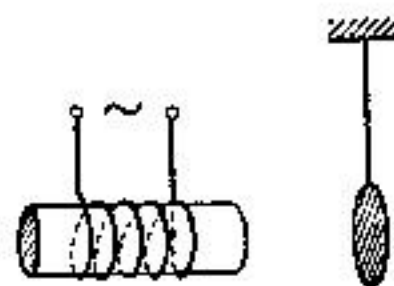


Fig. 210

rerá com o anel, se, no enrolamento do eletroímã, passarmos corrente alternada?

603. Com um condutor de comprimento l foi feito um solenóide de comprimento l_0 . O diâmetro do solenóide é $d \ll l_0$. Determinar a indutância do solenóide.
604. Através de um solenóide de comprimento l m que possui 2000 espiras, de 10 cm de diâmetro, passa uma corrente de 1 A. O solenóide uniformemente distende-se com a velocidade de 40 cm/s, sendo que a diferença de potenciais aplicada ao solenóide, varia, continuamente, de tal modo, que a corrente permanece constante.

Qual será a variação da diferença de potenciais, no momento em que o solenóide distendeu-se em duas vezes? A variação do diâmetro do solenóide pela distensão pode ser desprezada.

605. Um campo magnético, dentro de um solenóide aberto, é uniforme e sua indução varia com o tempo, segundo a lei $B = B_0 \cos \omega t$. Determinar a tensão U , nos extremos do solenóide, que surge como consequência disto. O solenóide tem N espiras e seu raio é igual a r .
606. Um solenóide que tem N espiras e raio r é ligado, em série, a uma resistência ômica R . O campo magnético dentro do solenóide é uniforme, e a indução do mesmo varia com o tempo segundo a lei $B = B_0 \cos \omega t$. Determinar a tensão U_{AB} , entre os pontos A e B , e a corrente I no circuito (fig. 211).

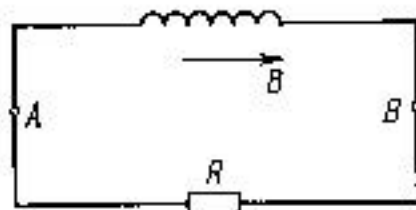


Fig. 211

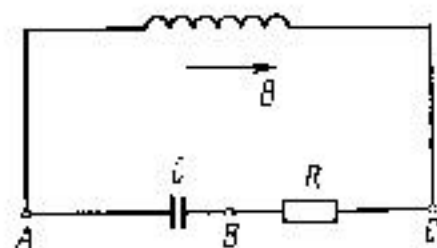


Fig. 212

607. Com um solenóide foi ligado em série um condensador de capacidade C e resistência ômica R . O solenóide tem N espiras de raio r . O campo magnético dentro do solenóide é uniforme e sua indução varia com o tempo segundo a lei $B = B_0 \cos \omega t$. Determinar a tensão U_{AB} , entre os pontos A e B , e a tensão U_{BC} , entre B e C , assim como, a corrente I no circuito (fig. 212).
608. 1) Do meio de uma bobina, com núcleo de ferro (a bobina é feita de um condutor de cobre grosso, com um grande número de espiras) foi feita uma derivação C (fig. 213). Entre os pontos B e C cria-se uma tensão constante U_1 . Encontrar a tensão U_2 , entre os pontos A e B .
- 2) Entre os pontos B e C foi aplicada uma tensão alternada, (por exemplo, da rede urbana) com amplitude U_1 . Encontrar a amplitude U_2 da tensão alternada entre os pontos A e B .

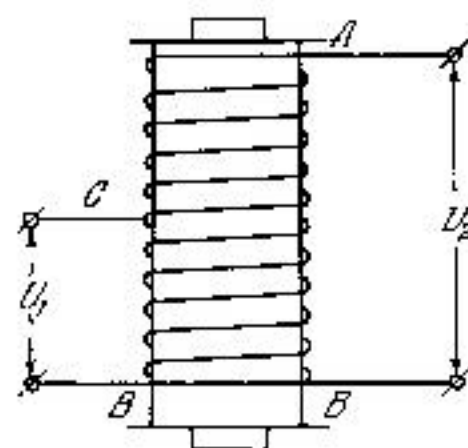


Fig. 213

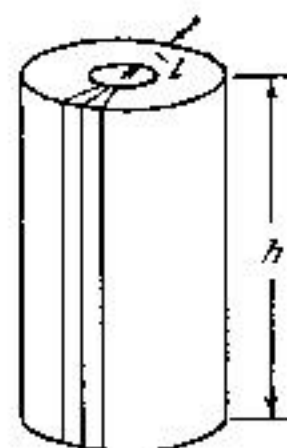


Fig. 214

609. O enrolamento de um autotransformador foi feito em um núcleo de ferro, que tem a forma de uma toróide retangular (fig. 214). Para a proteção contra fluxos de corrente (correntes de Foucault), o núcleo foi construído de placas finas de ferro, isoladas uma da outra por uma camada de verniz. Isto pode-se fazer de diferentes modos: 1) Montando o núcleo de anéis finos, empilhados um sobre o outro; 2) enrolando uma fita, que tenha uma largura h ; 3) construindo-o de placas retangulares de dimensões $l \times h$, distribuindo-as ao longo dos raios dos cilindros.
- Qual método é o melhor?
610. Em uma bobina, que não tem resistência ômica, passa uma corrente alternada sinusoidal. A indutância da bobina é L . Representar, graficamente, a variação do produto da corrente pela tensão (potência instantânea), em relação ao tempo. Explicar o caráter da curva. Qual é a potência média utilizada pela bobina em um período?
611. Encontrar o valor efetivo da corrente alternada, se a mesma varia segundo a lei:

$$I = I_0 \quad \text{para} \quad 0 < t < \frac{T}{8};$$

$$I = 0 \quad \text{para} \quad \frac{T}{8} < t < \frac{T}{2};$$

$$I = -I_0 \quad \text{para} \quad \frac{T}{2} < t < \frac{5}{8} T;$$

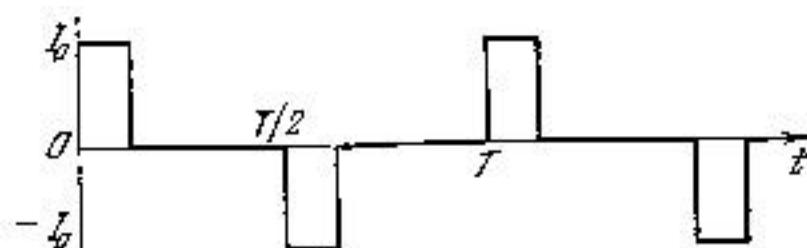


Fig. 215

$$I = 0 \quad \text{para} \quad \frac{5}{8}T < t < T;$$

$$I = I_0 \quad \text{para} \quad T < t < \frac{9}{8}T,$$

etc. (fig. 215).

612. Por que, a presença de uma tensão muito alta no enrolamento secundário de um transformador aumentador não conduz a grandes perdas de energia na emissão de calor no próprio enrolamento?
613. Por que, nos circuitos de corrente alternada, que contêm um grande número de aparelhos elétricos, de indutância considerável (por exemplo, bobinas), ligam-se paralelamente os condensadores?
614. Para a determinação da potência, transmitida por uma corrente alternada a uma bobina, com coeficiente de autoindução L e resistência ômica R_L , às vezes, utiliza-se o método dos três voltímetros, que encerra-se no seguinte: liga-se uma resistência conhecida R e três voltímetros como mostra a fig. 216; medindo, atra-

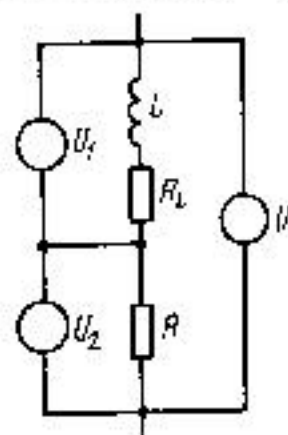


Fig. 216

vés destes voltímetros a tensão efetiva: U_1 — na bobina, U_2 — na resistência R e U , entre os terminais da

bobina e a resistência, determina-se a potência procurada W . Qual é essa potência?

615. Acima de um solenóide longo, que tem N_1 espiras, comprimento l e área da seção S , foi enrolada, compactamente, em todo o comprimento, um segundo solenóide, que, tem N_2 espiras e a mesma seção S . Determinar o coeficiente de indução mútua dos solenóides. (O coeficiente de indução mútua L_{12} , de dois contornos, é numericamente igual ao fluxo da indução magnética, que penetra no segundo contorno, no caso de passar pelo primeiro uma corrente $I = 1$ A).
616. Acima de um solenóide longo foi enrolada densamente uma bobina. A corrente no solenóide cresce diretamente proporcional ao tempo. Qual é o caráter da dependência da corrente na bobina em relação ao tempo?

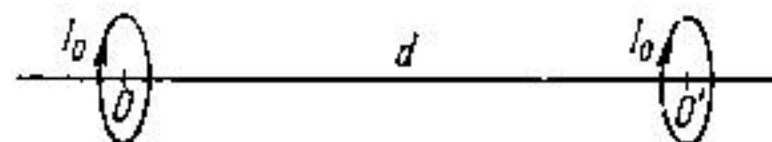


Fig. 217

617. Dois anéis supercondutores, de raio r , encontram-se a uma distância d um do outro, sendo, que: $d \gg r$. Os centros dos anéis estão em uma reta OO' , perpendicular aos planos de ambos os anéis. Os anéis podem deslocar-se, somente, ao longo desta reta. No momento inicial, pelos anéis passam, em uma mesma direção, correntes de igual grandeza I_0 . Quais correntes são estabelecidas nos anéis, depois que os mesmos são colocados muito juntos? (fig. 217).
618. Descrever o caráter do movimento dos anéis do problema 617, se, em um momento inicial, passam pelos mesmos correntes de diferentes intensidades. Examinar somente as forças de interação magnética.
619. Demonstrar que se desprezarmos a corrente de um transformador sem carga e a resistência ômica de seu enrolamento, verifica-se a relação $I_1/I_2 = N_2/N_1$, onde I_1 e I_2 são as correntes nos enrolamentos, e N_1 e N_2 os números de espiras, nos mesmos. Os enrolamentos são considerados como bobinas de uma mesma seção transversal.

620. Sobre um solenóide longo, que tem comprimento l , seção S e número de espiras N_1 , compactamente, em todo o comprimento, enrola-se um segundo solenóide, que tem um número de espiras N_2 e a mesma seção S , que a primeira. No primeiro solenóide passa a corrente I_1 , no segundo passa a corrente I_2 . Achar a energia do campo magnético deste sistema.

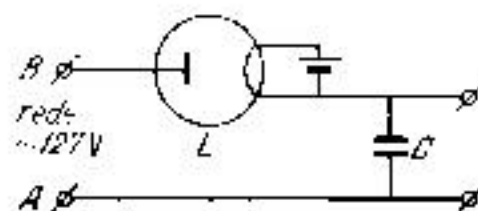


Fig. 218

621. Para quais tensões, de ruptura, devem ser calculados o condensador C e o diodo L , se o retificador (fig. 218) pode trabalhar tanto sob ação de carga como sem ela?

§ 24. MÁQUINAS ELÉTRICAS

622. A resistência de carga no circuito de um gerador de corrente alternada aumentou. Como deverá variar a potência do motor que aciona o gerador, a fim de que a frequência, da corrente alternada continue a mesma?
623. Aos terminais de um gerador, de f.e.m. sinusoidal e amplitude constante, são ligados os condensadores C_1 e C_2 . A primeira vez os condensadores são ligados entre si paralelamente e a segunda vez em série. Em quantas vezes deverá variar a frequência do gerador, a fim de que a corrente, através do mesmo, seja a mesma em ambos os casos? A resistência interna do gerador pode ser desprezada.
624. A força, que age, em uma partícula carregada em movimento, por parte de um campo magnético (força de Lorentz), sempre é perpendicular à velocidade; consequentemente, esta força não realiza trabalho. Por que, em tal caso, trabalha um motor elétrico? De fato a força, que age sobre um condutor com corrente, surge como resultado da ação do campo sobre partículas carregadas isoladas, cujo movimento forma a corrente.

625. Poderá um motor de conexão em série, de corrente contínua, ao ser ligado a um circuito de tensão $U = 120$ V, desenvolver uma potência $W = 200$ watts, se a resistência do seu enrolamento é $R = 20$ ohm?
626. Um motor de conexão em série que se alimenta de uma fonte de tensão constante, trabalha em um regime, que permite a obtenção de uma máxima potência mecânica W . Qual é a quantidade de calor, por unidade de tempo, que se dissipa no motor, caso seu eixo parar (enguiçar)?
627. Que parâmetros de um circuito, determinariam a potência de um motor elétrico de corrente contínua, ligado nesse circuito, caso seu enrolamento fôsse feito de um supercondutor?
628. Determinar o coeficiente de rendimento útil de um motor de conexão em série e de um motor derivado, nas condições em que, a potência desenvolvida pelos mesmos, é máxima. A tensão nos terminais é U ; as resistências do enrolamento do rotor é R_1 e do estator é R_2 , sendo as mesmas iguais em ambos os motores e conhecidas.
629. Por que um motor, de conexão em série ligado a um circuito sem carga, acelera-se, i.é., seu rotor adquire uma velocidade que ameaça à resistência mecânica do motor?
630. O rotor, de um modelo de motor de corrente contínua, é constituído de uma espira, que tem a forma retangular. A indução do campo magnético B , criada por um ímã constante (à esquerda está o norte, à direita está o sul), está dirigida segundo o raio, uma vez que o espaço, entre as peças polares e o cilindro de ferro A , é muito pequeno (fig. 219). A espira, que tem área S

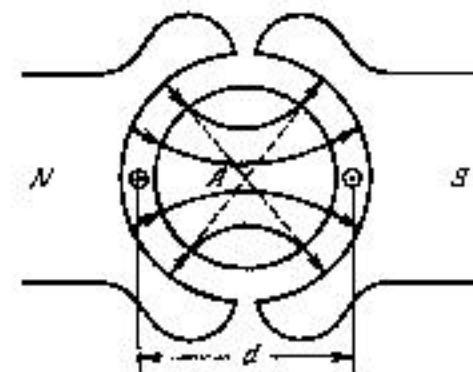


Fig. 219

a resistência R , foi aplicada uma diferença de potenciais U . Determinar a potência do motor como função da velocidade angular ω . Para qual velocidade angular ω a potência será máxima? Qual será, neste caso, a intensidade da corrente?

631. Utilizando a condição do problema anterior, determinar a dependência do momento giratório M da velocidade angular.
632. Determinar o caráter da dependência da potência de um modelo de motor de corrente contínua (ver o problema 630), e o caráter da indução do campo magnético B , para determinado número de rotações. Para qual valor de B a potência será máxima?
633. Determinar a indução do campo magnético, no modelo de um motor de corrente contínua (ver o problema 630), no qual o momento giratório M é máximo. O número de rotações do rotor é conhecido.
634. Um motor elétrico derivado de corrente contínua, que tem, aplicada nos terminais, uma tensão $U = 120$ V, desenvolve uma potência mecânica $W = 160$ watts. O número de rotações por segundo, do rotor do motor, é $n = 10$ r.p.s. Determinar o número de rotações, máximo possível, do motor, para a tensão dada. A resistência do rotor é $R = 20$ ohm.
635. Um motor derivado de corrente contínua, tendo nos terminais, uma tensão aplicada $U = 120$ V, possui velocidade angular de rotação do rotor $\omega = 100$ rad/seg. A resistência do enrolamento do rotor é $R = 20$ ohm. Qual a força eletromotriz que atinge este motor, utilizado como gerador, se girá-lo com a mesma velocidade angular? A tensão no enrolamento do estator é mantida constante e igual a 120 V. O momento mecânico no eixo do motor para a velocidade indicada é $M = 1,6$ N·m.
636. Como variará a velocidade de rotação, de um motor derivado, pelo aumento da intensidade da corrente no enrolamento do estator, se a tensão no rotor é U e é aplicado ao eixo do rotor o momento mecânico M que permanece constante?
637. Demonstrar, que se o valor das induções dos campos magnéticos criados por três pares de ímãs elétricos, são iguais em amplitude e defasadas em $2\pi/3$ (fig. 220), então, o campo magnético resultante pode ser repre-

sentado por um vetor, que gira com velocidade angular constante ω em redor do ponto O . Cada par de ímãs elétricos, cria campos magnéticos dirigidos nos sentidos dos diâmetros correspondentes do anel: B_1, B_2, B_3 .

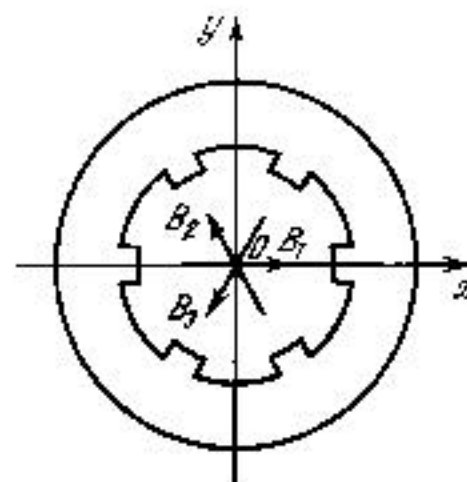


Fig. 220

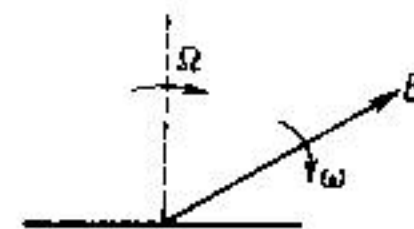


Fig. 221

Os ímãs elétricos são alimentados por corrente alternada de frequência ω .

638. Um campo magnético de indução B gira, no plano do desenho, com velocidade angular ω . Neste campo encontra-se um quadro de lados iguais a a e b . A normal, ao plano do quadro, gira no plano do desenho com velocidade angular Ω . Encontrar a intensidade da corrente induzida no quadro (fig. 221).
639. Encontrar o momento das forças, aplicadas no quadro descrito no problema 638.

Capítulo IV

Oscilações e ondas

§ 23. OSCILAÇÕES MECÂNICAS

640. Uma tábua encontra-se sobre um cilindro circular, fixo, de raio R , como mostra a fig. 222. A espessura da tábua é h . Encontrar as condições, segundo as quais depois de uma inclinação em um pequeno ângulo da

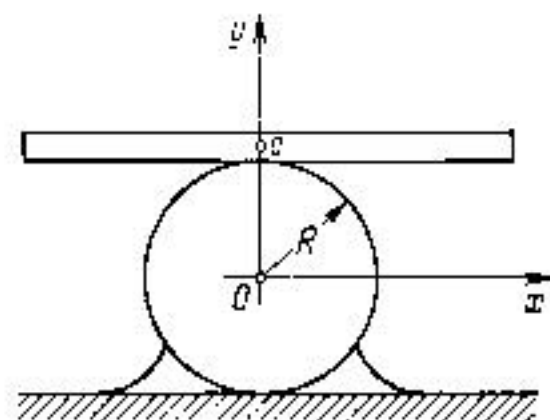


Fig. 222

horizontal, a tábua oscilará na proximidade da posição de equilíbrio. Não existe escorregamento.

641. Determinar com precisão, até um coeficiente adimensional o período de oscilações de um corpo, de massa m , fixo a uma mola com coeficiente de rigidez k .
642. Demonstrar que o período de oscilações de um pêndulo simples aumenta, com o aumento de ângulo máximo de desvio, em relação à posição de equilíbrio.
643. Partindo dos conceitos dimensionais, determinar o período de oscilações de um pêndulo simples.

644. Dois blocos, de massas m_1 e m_2 , são ligados por uma mola de rigidez k . A mola está comprimida com a ajuda de dois fios, como mostra a fig. 223. Os fios são queimados. Determinar o período de oscilações dos blocos.



Fig. 223

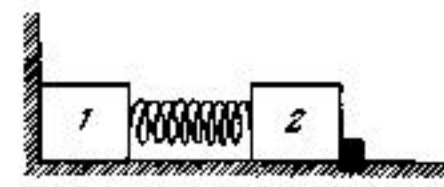


Fig. 224

645. Dois pesos, com massas m_1 e m_2 , são unidos por uma mola com coeficiente de rigidez k . Inicialmente, a mola está comprimida em uma grandeza x , de tal modo que o primeiro peso está encostado na parede (fig. 224), e o segundo peso é mantido por um apoio. Como mover-se-ão os pesos se tirarmos o apoio?
646. Como variará o período de oscilações verticais de um peso, suspenso por duas molas iguais, se substituírmos a união em série das molas por uma união paralela?
647. Dois pêndulos simples de comprimento l cada um, estão ligados por uma mola de peso desprezível, como mostra a fig. 225. O coeficiente de elasticidade da mola

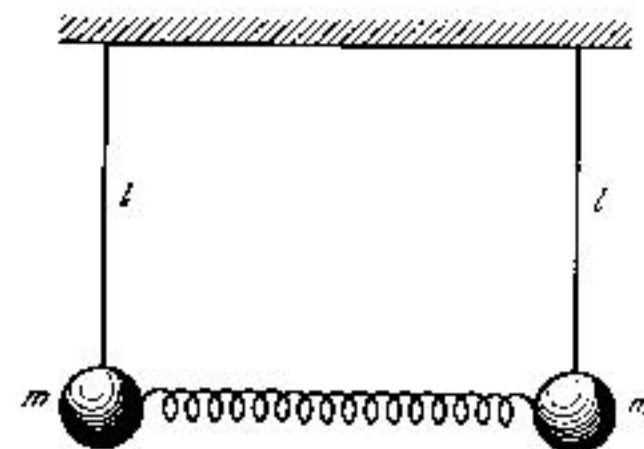


Fig. 225

é igual a k . Em equilíbrio, os pêndulos estão na posição vertical e a mola não se deforma. Determinar a frequência das pequenas oscilações, de dois pêndulos unidos, nos casos: quando os pêndulos forem inclinados, em um mesmo plano, em ângulos iguais, para um

mesmo lado (oscilações em fase) e para lados diferentes (oscilações em fase oposta).

648. Um peso, preso em um fio longo, pode realizar oscilações em um plano vertical, inclinando-se em um ângulo α em relação à vertical (pêndulo simples). Este mesmo peso pode girar em círculos, descrevendo um cone (pêndulo cônico). Em qual caso, a tensão do fio, inclinado no ângulo α , em relação à vertical, será maior?
649. Um relógio de pêndulo funciona com precisão na superfície da terra. Em qual caso, este relógio atrasará mais, diariamente: caso o elevarmos a uma altura de 200 m, ou se o colocarmos em uma mina de profundidade igual a 200 m?
650. Nos extremos de uma barra, de peso desprezível e de comprimento $d = 1$ m, são fixas duas pequenas esferas de massas $m = 1$ g. A barra é suspensa, por uma articulação, de tal modo, que pode girar sem atrito, junto de seu eixo vertical, que passa pelo meio da mesma. Em uma mesma reta que a barra, são fixas duas esferas grandes com massas $M = 20$ kg. A distância entre os centros das esferas grande e pequena é $L = 16$ cm (fig. 226). Determinar o período de pequenas oscilações descritas pelo pêndulo giratório.

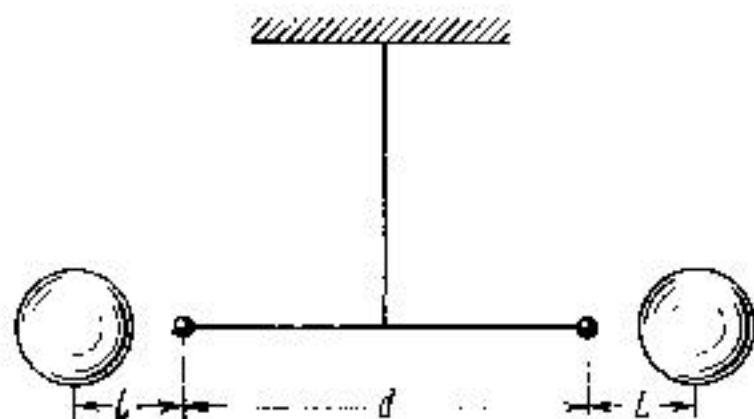


Fig. 226

651. Qual é o período de oscilações de um pêndulo simples, que se encontra em um vagão, que se move com aceleração a horizontalmente?
652. Determinar o período de oscilações de um pêndulo, em um elevador, que se move, verticalmente, com aceleração a , dirigida para cima.

653. Resolver o problema anterior, no caso em que a aceleração a é dirigida para baixo.
654. Um cubo pequeno realiza pequenas oscilações, em um plano vertical, movendo-se, sem atrito, na superfície interna de uma taça esférica. Determinar o período de oscilações do cubo, se o raio interno da taça é R , e a aresta do cubo é muito menor que R .
655. Como varia o período de oscilações de um cubo pequeno em uma taça (ver condições do problema 654), se na taça, além da força de gravidade, atua, também, a força F , dirigida verticalmente para cima? A massa da taça M é muito maior que a massa m do cubo.
656. Como variará o período de oscilações de um cubo, em uma taça (ver o problema 654), se a taça está situada em uma superfície horizontal lisa, pela qual a mesma pode movimentar-se sem atrito?
657. Um aro de massa m e raio r pode girar, sem escorregamento, pela superfície interna de um cilindro de raio R (fig. 227). Determinar o período de oscilações do aro, considerando o ângulo φ pequeno.

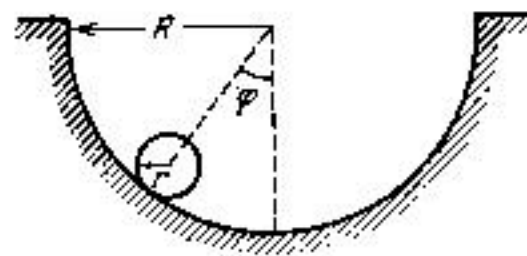


Fig. 227

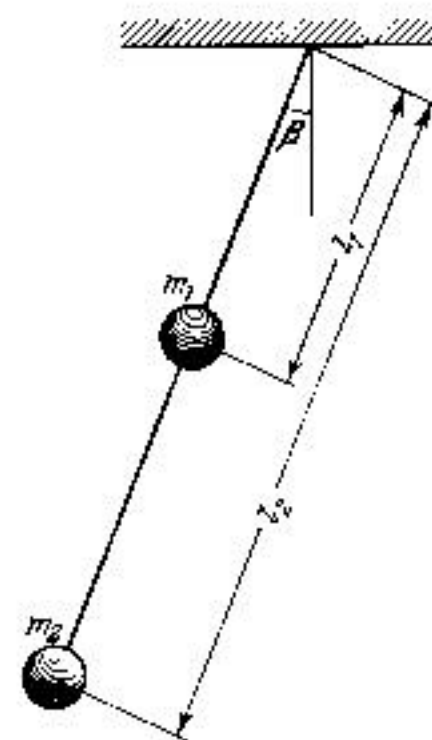


Fig. 228

658. Encontrar o período de oscilações do pêndulo, representado na fig. 228. A barra, na qual estão suspensas as massas m_1 e m_2 , considerar de peso desprezível.
659. Determinar o período de oscilações de um pêndulo, constituído de um semianel fino e homogêneo, de raio r suspenso pelos fios de peso desprezível OA e OB , como mostra a fig. 229.

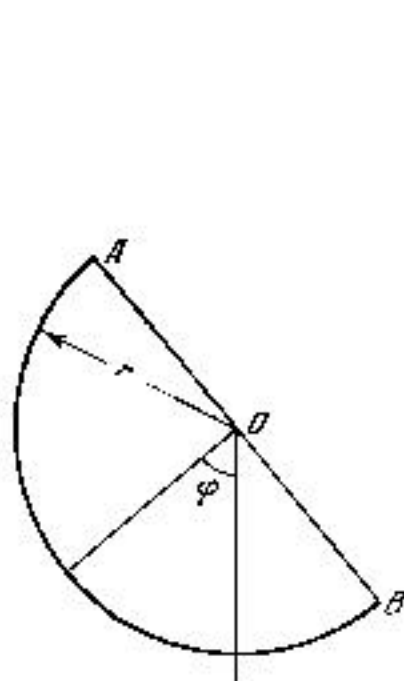


Fig. 229

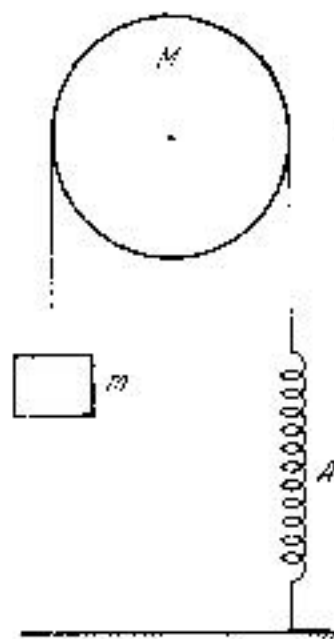


Fig. 230

660. Na fig. 230 está representado um sistema mecânico, constituído de um peso de massa m , da mola A com coeficiente de elasticidade k e da roldana de massa M . O peso, suspenso pelo fio, que passa pela roldana é unido à mola. Encontrar o período de oscilações do peso, se a roldana tem a forma de um cilindro de paredes finas.
661. Com qual frequência oscilará um bastão, de massa $m = 2 \text{ kg}$ e área da seção transversal $S = 5 \text{ cm}^2$, que flutua na superfície da água, na posição vertical? (Prestar atenção ao fato de que o período de oscilações do peso na mola, é dado pela expressão: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, onde k é o coeficiente de elasticidade da mola).
662. Em vasos cilíndricos comunicantes foi colocado mercúrio. Determinar o período de oscilações do mercúrio,

se a área da seção transversal de cada vaso é $S = 0,3 \text{ cm}^2$, a massa do mercúrio é $m = 484 \text{ g}$. A densidade do mercúrio é $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$.

663. Suponhamos a existência de uma mina que penetre na terra por um de seus diâmetros. Depois de quanto tempo, um corpo lançado nesta mina, atingirá o centro da terra? Não existe resistência ao movimento.

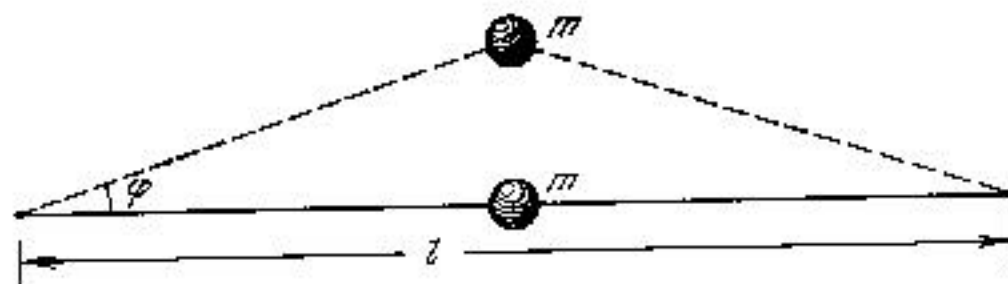


Fig. 231

664. Uma corda, fixa nos extremos, é distendida com a força f . No meio da corda é fixo um peso pequeno de massa m (fig. 231). Determinar o período das oscilações pequenas do peso fixo. (Desprezar a massa da corda e não considerar a força da gravidade).

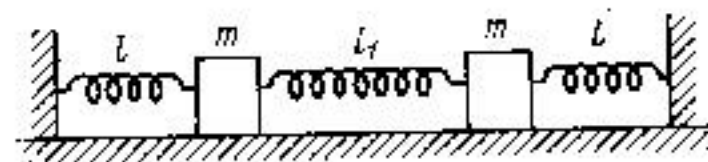


Fig. 232

665. Dois pesos iguais, de massa m , estão presos por molas, como mostra a fig. 232, e situados em uma superfície absolutamente lisa e horizontal. As molas são distendidas por uma força F . Os pesos deslocam-se na direção perpendicular ao comprimento das molas, em uma mesma distância pequena e igual a x fora da posição de equilíbrio (fig. 233, a). Determinar o período de oscilações dos pesos.
666. Pesos de massa m , estão presos por molas, como mostra a fig. 232, e localizam-se em uma mesa absolutamente horizontal e lisa. As molas são distendidas por uma força F . Os pesos deslocam-se, a uma mesma distância

pequena x , na direção perpendicular ao comprimento das molas, para os lados opostos da posição de equilíbrio e soltam-se (fig. 233, b). Determinar o período de oscilações dos pesos.

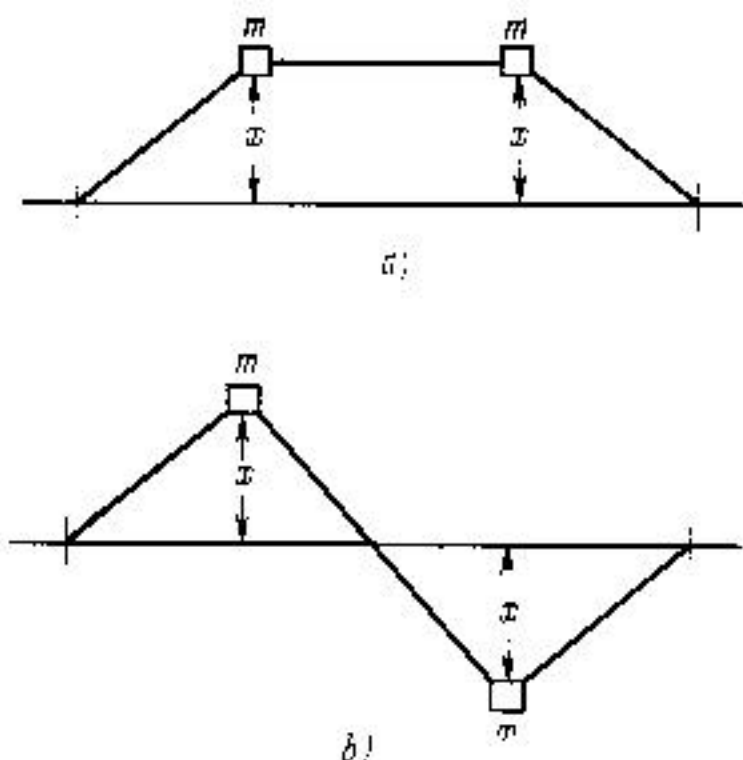


Fig. 233

667. A fim de manter em equilíbrio uma porta aberta, nas estações do metrô (a porta abre-se para ambos os lados e volta à situação de equilíbrio por meio de molas), é necessário aplicar à maçaneta da porta uma força de 50 N. Seria possível abrir a porta com uma força de 1 N, aplicada à mesma maçaneta? O atrito nas corrediças da porta pode ser desprezado.
668. A uma roldana de peso desprezado e raio r está fixa rigidamente, uma barra de peso desprezado e comprimento l . No extremo da barra encontra-se um corpo de massa m (fig. 234). Na roldana enrolou-se um fio, sendo, que no extremo livre do mesmo, foi preso um corpo de massa M . Em quais condições o movimento do sistema terá um caráter oscilatório, se, no momento inicial, o ângulo α entre a barra e a vertical é igual a zero?

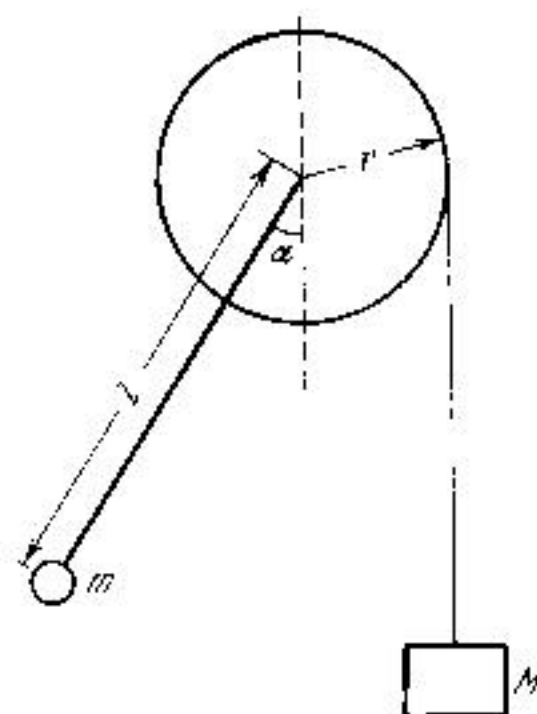


Fig. 234

669. Determinar a relação das frequências das oscilações para três moléculas: hidrogênio, deutério e trítio.
- Observação.* À posição de equilíbrio de dois prótons na molécula, corresponde uma determinada distância entre eles. Se estes dois prótons aproximarem-se, ou afastarem-se, então, surge uma força, que os retorna à posição de equilíbrio. Ela é proporcional à grandeza do deslocamento.
670. Encontrar as frequências das oscilações longitudinais, de uma cadeia linear infinita, de átomos iguais. Na posição de equilíbrio a distância entre os átomos é igual a a . A massa de cada átomo é m . O coeficiente de rigidez da ligação entre os átomos é k .

§ 26. OSCILAÇÕES ELÉTRICAS

671. Por que no auscultador telefônico há necessidade de um ímã permanente? Por que a intensidade do campo magnético, deste ímã, deve ser maior, que a intensidade máxima do campo magnético, criado pela corrente, que passa pelo enrolamento da bobina do aparelho telefônico?

672. Encontrar a frequência das oscilações próprias, em um circuito, constituído por um solenóide de comprimento $l = 15$ cm, de área da seção transversal $S_1 = 1$ cm² e de um condensador plano, cujas placas têm área $S_2 = 6$ cm², sendo a distância entre as mesmas $d = 0,1$ cm. O número de espiras do solenóide é $N = 1000$.
673. Um circuito elétrico constitui-se de um condensador de capacidade constante e de uma bobina, na qual pode-se introduzir um núcleo. O núcleo é feito de pó de um composto de ferro magnético (ferrito) e é isolante. Outro núcleo é feito de cobre. Como variará a frequência das oscilações próprias do circuito, se introduzirmos na bobina: 1) um núcleo de cobre? 2) um núcleo de ferrito?
674. O que ocorrerá, se unirmos um condensador carregado através de um supercondutor, com um condensador do mesmo tipo descarregado?
675. Nas placas verticais de um oscilógrafo aplicou-se uma tensão $V_1 = V_{10} \cos \omega t$ e nas placas horizontais uma tensão $V_2 = V_{20} \cos (\omega t - \varphi)$. Achar a trajetória de um raio eletrônico, na tela do oscilógrafo, se as diferenças de fase entre as tensões nas placas são $\varphi_1 = \pi/2$ e $\varphi_2 = \pi$.
676. Na fig. 235 está representado um circuito, constituído por uma bateria E , uma lâmpada néon N , um condensador C e uma resistência R . A característica da lâmpada néon (dependência da corrente na lâmpada em relação à tensão) vê-se na fig. 236. Para tensões peque-

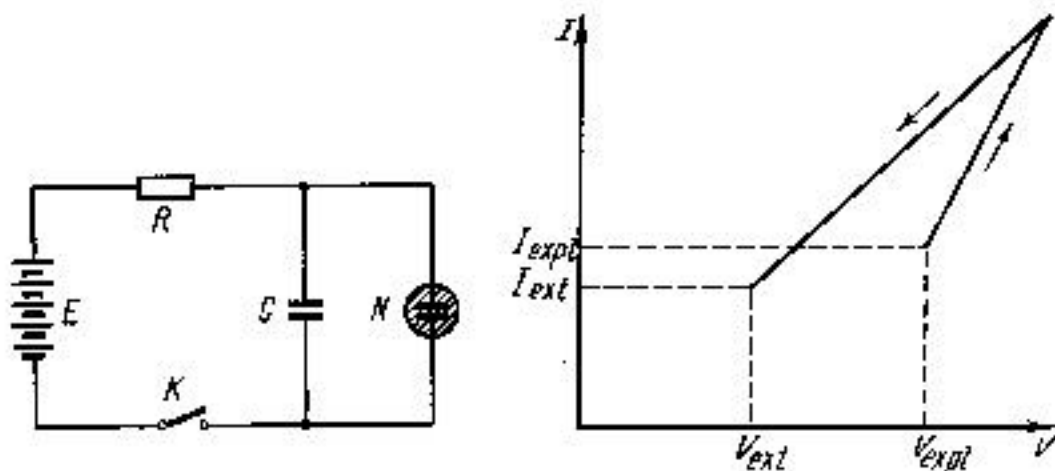


Fig. 235

Fig. 236

nas, não passa corrente na lâmpada. Quando o potencial na lâmpada atinge a grandeza V_{ext} (potencial de explosão), a lâmpada acende, então, a corrente, de um salto, atinge a grandeza I_{expt} e, posteriormente, cresce proporcionalmente a V . Com a diminuição da tensão, a queda da corrente ocorre mais lentamente, do que ocorreu o seu crescimento. A lâmpada apaga-se, ao atingir o potencial de extinção V_{ext} . Representar, graficamente, a dependência da variação da tensão, no condensador, em relação ao tempo, para o fechamento da chave K .

677. Como variará o período de relaxamento das oscilações, no circuito da lâmpada néon (ver o problema 676) com a variação da capacidade do condensador C e da resistência R ?
678. Um condensador plano, que faz parte de um circuito oscilatório é tal, que suas placas podem deslocar-se, uma em relação à outra. De que maneira, por meio do movimento das placas, pode realizar-se a amplificação paramétrica do circuito?

§ 27. ONDAS

679. Usando conceitos dimensionais, determinar a velocidade de propagação das ondas, na superfície de um líquido, considerando somente a força de gravidade (ondas gravitacionais longas). Supõe-se, que a profundidade do líquido no recipiente é $H \gg \lambda$ e a amplitude de oscilação das partículas é $a \ll \lambda$ (λ é o comprimento de onda).
680. Usando conceitos dimensionais, determinar a velocidade de propagação das ondas, na superfície de um líquido, considerando somente as forças de capilaridade (ondas de pequeno comprimento). Supõe-se, que a profundidade do líquido no recipiente é $H \gg \lambda$ e a amplitude das oscilações das partículas na onda é $a \ll \lambda$ (λ é o comprimento de onda). A densidade do líquido é ρ .
681. Na fig. 237, está representada a seção transversal de um recipiente infinitamente grande com um líquido. Da esquerda, do meio que tem uma profundidade h_1 , e sob um ângulo φ_1 , em relação ao limite de divisão, movimenta-se uma onda plana, cujo comprimento é $\lambda \gg h_1$. Que ângulo com o limite de divisão formará esta

onda ao propagar-se no meio, cuja profundidade do líquido é h_2 ? Sabe-se, que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais longas, em um recipiente infinitamente grande, é igual a $c = k\sqrt{gh}$, onde k é

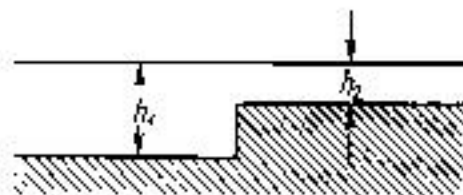


Fig. 237

um coeficiente constante de proporcionalidade, e h é a profundidade do recipiente.

682. Usando conceitos dimensionais, determinar com precisão até um coeficiente adimensional, a velocidade de propagação das ondas longitudinais, em um meio elástico de densidade ρ , cujo módulo de elasticidade é igual a E .
683. Uma corda fina foi substituída por outra de mesmo material, mas que tem um diâmetro duas vezes maior. Em quantas vezes deverá ser aumentada a tensão da corda, a fim de que a frequência das oscilações da mesma não varie?
684. Encontrar as frequências próprias da oscilação de uma corda de aço de comprimento $l = 50$ cm, de diâmetro $d = 1$ mm, se a tensão da corda é $T = 0,1$ N. A densidade do aço é $\rho = 7,8$ g/cm³.
685. Encontrar as frequências próprias das oscilações de uma coluna de ar, em um tubo fechado em ambos os extremos, que tem o comprimento $l = 3,4$ m.
686. Sobre um recipiente cilíndrico de 1 m de altura, soa um diapasão, que tem frequência própria de oscilação $\nu = 340$ Hz. No recipiente coloca-se, lentamente, água. Para quais posições do nível da água no recipiente, o som do diapasão amplia-se consideravelmente?
687. Qual forma tem a frente de uma onda de choque, que surge no ar, em consequência do movimento de uma bala, com velocidade superior à velocidade do som?
688. Um avião a propulsão voo com velocidade de 500 m/s, a uma distância de 6 km de um homem. A que distância do homem estava o avião, quando o homem ouviu o barulho do mesmo?

689. Sabe-se, que se uma fonte sonora e um homem encontram-se, por exemplo, a uma mesma altura, então, na direção do vento ouve-se melhor o som do que em sentido contrário. Como explicar este fenômeno?
690. Por que, a recepção estável de uma transmissão de televisão, é possível, somente, dentro dos limites da visibilidade direta?
691. Um radar funciona em regime de impulsos. A frequência de repetição dos impulsos é $f = 1700$ Hz, a duração do impulso é $\tau = 0,8$ μ s. Encontrar a distância máxima e mínima, onde localiza-se o objetivo detectado por tal radar.
692. A antena de um televisor (ponto C na fig. 238) além da onda, que chega diretamente da estação transmissora,

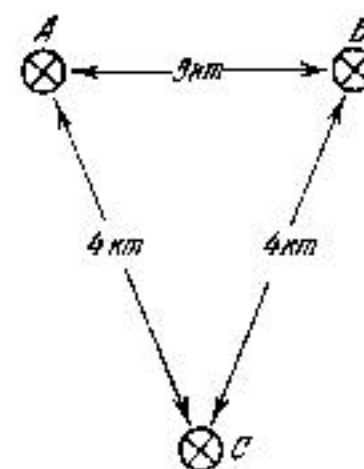


Fig. 238

(ponto A) capta a onda, refletida do teto de ferro de um edifício (ponto B). Como consequência disto, a imagem bifurca-se. Em quantos centímetros são deslocadas as imagens, uma relativamente à outra, se a antena e o teto do edifício estão localizados nas distâncias indicadas na fig. 238? A largura da tela da televisão é $l = 50$ cm. (Considerar, que a imagem no televisor é dividida em 625 linhas e são transmitidas 25 imagens por segundo).

693. Um vibrador, que tem comprimento $l = 0,5$ m, foi submerso em um recipiente com querosene ($\epsilon = 2$). Qual é, no vácuo, (depois da saída do recipiente) o comprimento de uma onda eletromagnética, irradiada pelo vibrador dado?

Ótica geométrica

§ 28. FOTOMETRIA

694. Um salão esférico, de diâmetro $D = 30$ m, é iluminado por uma lâmpada fixa no centro do teto. Determinar a altura h do salão, sabendo-se, que a menor iluminação da parede do mesmo é duas vezes maior do que a iluminação mais fraca do chão.
695. A uma altura $H = 2$ m, sobre o meio de uma mesa circular de diâmetro $D = 3$ m, está suspensa uma lâmpada de $I_1 = 100$ candels *). Esta lâmpada foi substituída por uma outra de $I_2 = 25$ candels e variou-se

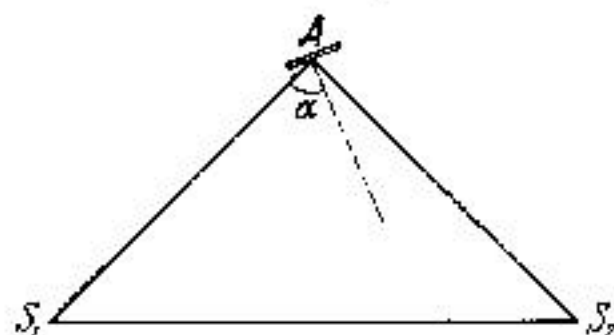


Fig. 239

a distância da lâmpada, até a mesa, de tal modo que a iluminação no meio da mesa continuasse a mesma. Como variará a iluminação nos bordos da mesa?

696. Nos vértices de um triângulo retângulo isósceles, localizam-se as fontes de luz S_1 e S_2 de igual intensidade (fig. 239). Como deve ser instalada uma pequena placa

*) Candel é uma unidade de intensidade de luz igual a vela, que é muito mais conhecida na prática (Nota do Tradutor).

A , a fim de que a iluminação da mesma seja máxima? Os lados do triângulo são $AS_1 = AS_2 = a$.

697. Para determinar a intensidade da luz de uma fonte qualquer, a tentativa de utilizar um fotômetro não teve êxito, uma vez, que a intensidade da luz era muito grande e calibrar a iluminação dos campos do fotômetro, com a ajuda de uma fonte padrão não foi possível, até mesmo colocando a fonte estudada no extremo de um banco ótico. Então, utilizou-se uma terceira fonte, cuja intensidade era menor do que a estudada. A fonte padrão deu a mesma iluminação, que a terceira, encontrando-se a uma distância $r_1 = 10$ cm do fotômetro, ao mesmo tempo, que a terceira fonte encontrava-se a uma distância $r_2 = 50$ cm. Depois, a fonte padrão foi substituída pela fonte estudada e obteve-se uma igualdade de iluminação, para as distâncias do fotômetro $r_3 = 40$ cm (fonte estudada) e $r_4 = 10$ cm (fonte auxiliar).

Determinar em quantas vezes a intensidade de luz da fonte estudada é maior, do que a da fonte padrão.

698. Uma lâmpada, cuja intensidade é $I = 100$ candels está fixa no teto de um quarto. Determinar o fluxo luminoso total, que atinge todas as paredes e o chão do quarto.
699. No eixo de um cilindro óco, de raio R_1 , colocou-se um fio incandescente, cujo comprimento é muito maior do que a altura do cilindro. Em quantas vezes variará a iluminação da superfície interna do cilindro, caso seu raio torne-se igual a: R_2 ($R_2 < R_1$)?
700. A que altura sobre o centro de uma mesa circular é necessário colocar uma lâmpada, a fim de que os bordos da mesa tenham a maior iluminação possível?
701. Por que podemos ler um texto, através de um papel de seda somente se colocarmos o papel diretamente sobre a página de um livro?

§ 29. LEIS FUNDAMENTAIS DA ÓTICA

702. Por que a sombra das pernas na terra é bastante nítida e a sombra da cabeça é mais difusa? Em que condições a sombra de todas as partes terá a mesma nitidez?
703. Como é necessário manter um lápis, sobre uma mesa, a fim de obter uma sombra bem nítida, se a fonte de luz,

a ser utilizada, é uma lâmpada de luz diurna, fixa no teto, que tem a forma de um tubo comprido?

704. No outono, quando as árvores perdem todas as folhas, frequentemente, pode-se ver a sombra de dois galhos paralelos. O galho inferior dá uma sombra escura e forte e o superior uma sombra mais larga e clara. Se estas duas sombras, casualmente, se sobrepõem então veremos um raio claro, luminoso, no meio da sombra mais escura, isto é, tem-se a impressão de que esta sombra é dupla (fig. 240). Como explicar este fenômeno? (Minnart, «Luz e cores na natureza»).

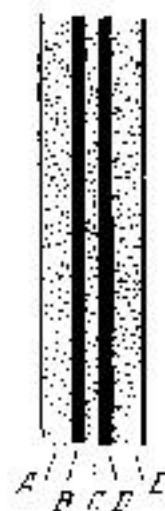


Fig. 240

705. Um raio de sol, passando através de uma pequena fenda, numa folha, localizada na ponta de uma árvore alta, projeta na terra uma mancha em forma de elipse. Os eixos maior e menor da elipse são iguais, correspondentemente, a $a = 12$ cm e $b = 10$ cm. Qual é a altura H da árvore? As medidas angulares do disco solar são: $\beta = 1/408$ rad.
706. Qual é a menor altura, que deve ter um espelho plano, fixo verticalmente em uma parede, a fim de que um homem possa ver toda sua imagem, sem mover a cabeça? A que distância do solo deverá ficar a borda inferior do espelho?
707. Os raios solares refletindo-se de um espelho, colocado horizontalmente, atingem uma tela, colocada vertical-

mente. No espelho existe um objeto alongado (fig. 241). Descrever o caráter da sombra na tela.

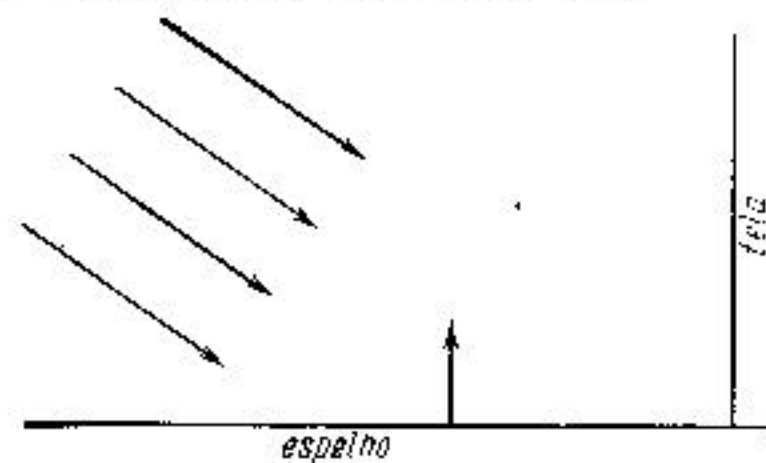


Fig. 241

708. Para quais condições, a forma da imagem solar de um espelho pequeno, não dependerá da forma do espelho?
709. Como pode-se diferenciar em uma fotografia, uma paisagem real de sua imagem em água tranqüila?
710. Encontrar, graficamente, para que posições do olho, um observador pode ver em um espelho, de dimensões finitas, a imagem de um segmento de reta, localizado relativamente ao espelho, como mostra a fig. 242.



Fig. 242

711. Um espelho plano é colocado paralelamente a uma parede, a uma distância l da mesma. A luz emitida por uma fonte pontual, fixa na parede, incide no espelho, e, refletindo-se, forma na parede uma imagem. Com que velocidade mover-se-á a imagem na parede, se aproximarmos o espelho à mesma com velocidade v ? Como variarão as dimensões da imagem?

712. Utilizando as condições do problema 711, determinar, se variará a iluminação da parede no local, onde encontra-se a imagem, pelo movimento do espelho. Considerar as medidas do espelho muito menores do que a distância entre o espelho e a fonte de luz.
713. Um espelho plano gira com velocidade angular constante. O número de rotações por segundo é $n = 0.5$. Com qual velocidade deslocar-se-á uma imagem, em uma tela esférica de raio 10 m, se o espelho encontra-se no centro de curvatura da tela?
714. As experiências de A. A. Belopolski, visando a pesquisa experimental do efeito ótico de Doppler, consistiam na observação da luz, refletida, repetidamente, dos es-

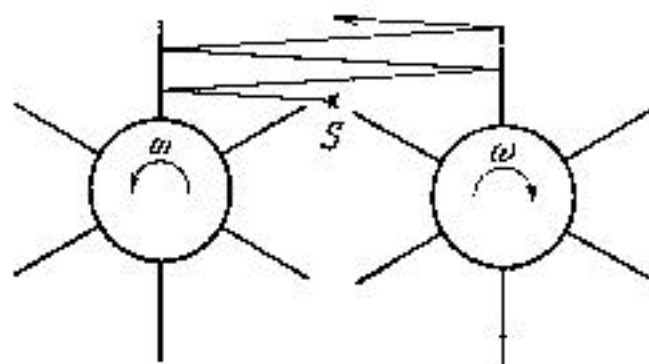


Fig. 243

pelhos em movimento (fig. 243). Os espelhos foram instalados em discos que giram em sentidos opostos. 1) Conhecendo a velocidade angular ω de rotação dos discos, encontrar a velocidade angular Ω de giro de raio, que sofre n reflexões sucessivas dos espelhos. 2) Encontrar a velocidade linear da enésima imagem, no momento em que os espelhos estão paralelos um ao outro, sendo, que suas partes refletoras movem-se com velocidade v em sentidos contrários.

715. Resolver o problema 714, nas condições em que os discos girem num mesmo sentido.
716. Um feixe fino de luz S , incide em um ângulo diédrico $\alpha = 60^\circ$, formado por espelhos planos iguais OM e ON , e fixos no eixo O (fig. 244). Após a reflexão dos espelhos, a luz é focalizada por uma lente L e atinge um receptor fixo R . Os espelhos giram com uma velocidade angular constante.

Qual parte da energia luminosa do feixe, num espaço de tempo muito maior do que o período de rotação.

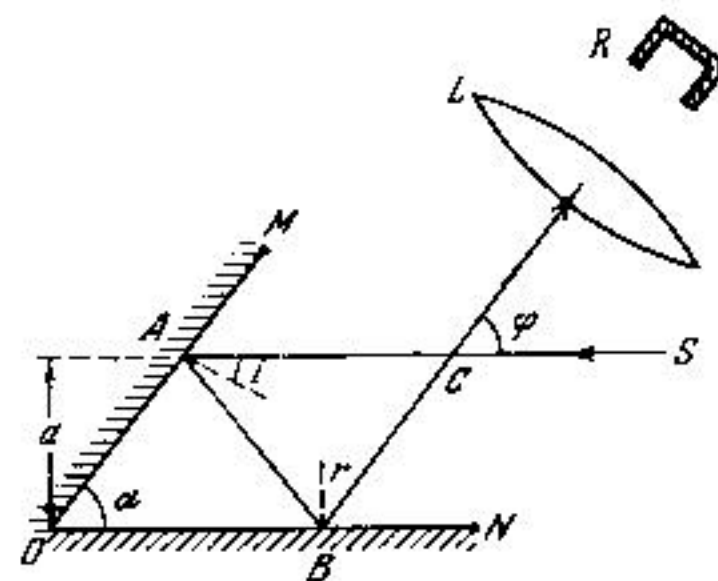


Fig. 244

atinge o receptor, se o feixe passa a uma distância a do eixo, igual a metade do comprimento do espelho OM ?

717. Poderia ser utilizado um espelho plano, para demonstração de filmes ao invés de uma tela comum?
718. Dois espelhos planos AO e OB formam um ângulo diédrico $\varphi = 2\pi/n$, onde n é um número inteiro. Uma fonte de luz pontual S encontra-se a uma distância igual entre os mesmos. Encontrar o número de imagens da fonte nos espelhos.
719. Dois espelhos planos AO e OB formam um ângulo diédrico arbitrário $\varphi = 2\pi/a$, onde a é um número qualquer maior que 2. Uma fonte de luz pontual S encontra-se entre os espelhos a igual distância dos mesmos. Encontrar o número de imagens da fonte nos espelhos.
720. Em qual direção, é necessário, emitir um feixe de luz do ponto A (fig. 245), que se encontra dentro de uma caixa espelhada, a fim de que o mesmo incida o ponto B , refletindo uma só vez de todas as quatro paredes? Os pontos A e B encontram-se em um mesmo plano perpendicular às paredes da caixa (i.e., no plano da figura).

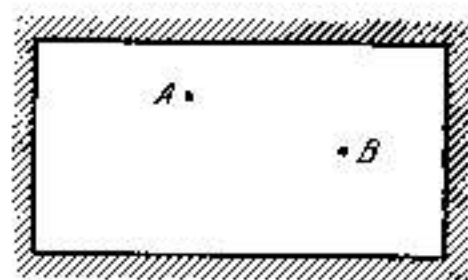


Fig. 245

721. Por que, se de um avião, que voa sobre o mar, olharmos para baixo, temos a impressão, que a água é muito mais escura, imediatamente, abaixo do que no horizonte?
722. Em qual distância desloca-se um raio, que passa através de uma placa plana, paralela, se sua espessura é d , o índice de refração é n e o ângulo de incidência do raio é θ ? Poderá ser o deslocamento do raio maior, do que a espessura da placa?
723. Para quais valores do índice de refração, de um prisma retangular, é possível a trajetória do raio, representada na fig. 246? A seção do prisma é um triângulo isósceles: o raio incide normalmente na face AB .

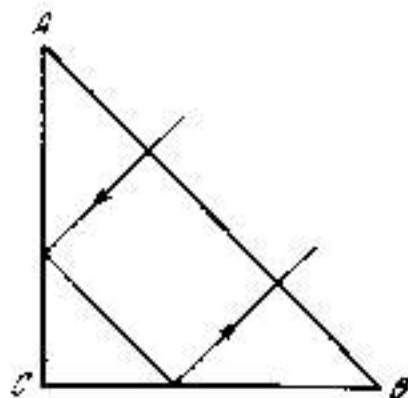


Fig. 246

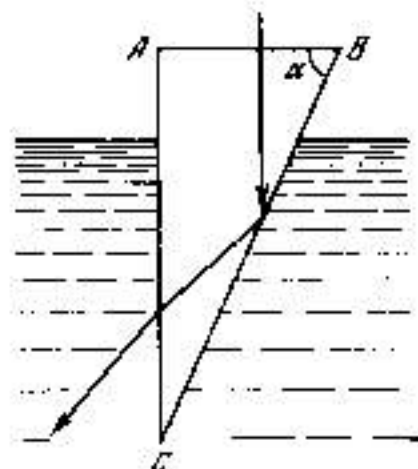


Fig. 247

724. Uma cunha vítrea retangular foi colocada em água. O índice de refração do vidro é $n_1 = 1,5$. Para quais valores do ângulo α (fig. 247), um raio de luz, incidindo normalmente na aresta AB , atinge, totalmente, a aresta AC ?

725. Nos dias ensolarados, claros, em estradas asfaltadas, distantes das cidades, um motorista, frequentemente, vê o seguinte quadro: algumas partes do asfalto situadas à frente do veículo, a uma distância de 80 a 100 m, parecem estar cobertas de água. Quando o motorista aproxima-se do local, a água desaparece e, novamente, surge adiante, em outros lugares, a uma mesma distância, aproximadamente. Como explicar este fenômeno?
726. Uma placa grossa, feita de um material transparente, cujo índice de refração varia na face superior, onde é n_1 , até n_2 na face inferior. Um raio incide na placa sob um ângulo α . Sob que ângulo, o raio sairá da placa?
727. Um recipiente cúbico, com paredes opacas, é colocado de tal modo, que o olho de um observador não vê seu fundo, mas, vê integralmente, a parede CD (fig. 248).

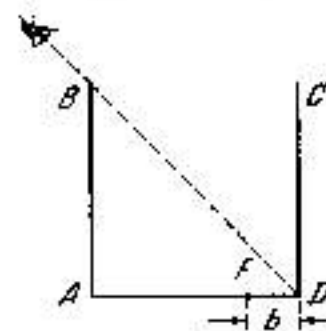


Fig. 248

Qual é a quantidade de água, que é necessário colocar no recipiente, para que um observador possa ver um objeto F , que se encontra a uma distância $b = 10$ cm do ângulo D ? A aresta do cubo é $a = 40$ cm.

728. A seção de um prisma vítreo tem a forma de um triângulo equilátero. Um raio incide em uma das faces, perpendicularmente à mesma. Achar o ângulo φ entre o raio incidente e o raio refratado do prisma. O índice de refração do vidro é $n = 1,5$.
729. A seção de um prisma vítreo tem a forma de um triângulo isósceles. Uma das faces iguais está coberta de prata. Um raio incide normalmente na face não coberta de prata, a depois de duas reflexões, o mesmo refrata-se através da base do prisma, perpendicularmente à mesma. Encontrar os ângulos do prisma.

730. Um raio incide na face de um prisma e sai do mesmo, através de uma face adjacente, após a refração. Qual é o máximo valor permitido do ângulo de refração do prisma α , se o prisma foi feito de vidro com um índice de refração $n = 1,5$?
731. Um raio de luz penetra em um prisma de vidro, sob ângulo α e sai do prisma para o ar com ângulo β , sendo, que ao passar pelo prisma, sofreu um deslocamento, em relação inicial, em um ângulo γ . Determinar o ângulo de refração do prisma φ e o índice de refração do material, de que o mesmo foi feito.
732. Os lados de um prisma $ABCD$ foram feitos de vidro, com índice de refração n e formam ângulos diédricos: $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 135^\circ$, $\angle D = 60^\circ$ (prisma de Abbe). Um raio de luz incide na face AB e depois de uma reflexão total da face BC sai do prisma, através, da face AD . Achar o ângulo de incidência α do raio na face AB , sabendo que o raio, que passa através do prisma é perpendicular ao raio incidente.
733. Se em uma folha de papel derramarmos cola ou água, então, através do papel, pode-se ler um texto escrito no lado inverso da folha. Explique, por que?
734. Um feixe de raios paralelos incide em uma placa transparente, plana, paralela e infinita. A cada passagem pelo limite de divisão, de dois meios, a parte de energia refletida é igual a p , i.é., $E_{ref} = pE_{inc}$, sendo, que não existe absorção no material da placa. Que parte da energia total do feixe incidente possuirá a luz que passou?

§ 30. LENTES E ESPELHOS ESFÉRICOS

735. Um ponto luminoso move-se, pelo eixo de um espelho esférico côncavo, aproximando-se ao mesmo. Para quais distâncias do ponto ao espelho, a distância entre o ponto e sua imagem no espelho será igual a $0,75 R$, onde R é o raio de curvatura do espelho?
736. Uma lente convergente plana e convexa é feita de vidro, com índice de refração $n = 1,5$. Determinar a relação entre a distância focal f desta lente e o raio de curvatura R de sua superfície convexa.
737. As superfícies de refração de uma lente têm a forma de superfícies esféricas concêntricas. O maior raio de

curvatura é $R = 20$ cm, a espessura da lente é $l = 2$ cm, o índice de refração do vidro é $n = 1,6$. A lente será convergente, ou divergente? Determinar sua distância focal.

738. Uma lente biconvexa, é feita de vidro, com índice de refração $n = 1,6$ e tem a distância focal $f = 10$ cm. Qual será a distância focal desta lente, se colocarmos-la em um meio transparente, que tem índice de refração $n_1 = 1,5$? Determinar a distância focal desta lente, em um meio com índice de refração $n_2 = 1,7$.
739. Um tubo metálico curto é fechado, em um dos extremos, por uma lente plana convexa e no outro extremo, por uma lâmina plana, paralela e fina. O sistema foi submerso em um líquido com índice de refração n_1 . Determinar a distância focal do sistema, se o raio de curvatura da superfície da lente é igual a R e ela foi feita de uma substância, com índice de refração n_2 .
740. Uma lente vítrea, delgada, tem uma convergência $D = 5$ dioptrias. Quando esta lente é submersa em um líquido, com índice de refração n_2 , ela age como uma lente divergente, com distância focal $f = 100$ cm. Determinar o índice de refração n_2 do líquido, se o índice de refração do vidro da lente é $n_1 = 1,5$.
741. Uma lente vítrea biconvexa, com raios de curvatura de superfícies iguais, tem no ar uma distância focal F_1 e na água F_2 . Em que distâncias F' e F'' da lente encontrar-se-ão seus focos, quando esta lente, for colocada na superfície de separação do ar e da água? O índice de refração do ar é igual à unidade, o da água é igual a $n = 4/3$.
742. A distância entre duas fontes pontuais de luz é $l = 24$ cm. Em que ponto entre as mesmas é necessário colocar uma lente convergente com distância focal $f = 9$ cm, a fim de que as imagens de ambas as fontes coincidam?
743. A altura da chama de uma vela é 5 cm. Uma lente projetora, em uma tela, a imagem desta chama de altura 15 cm. Sem mover a lente, deslocou-se a vela em $l = 1,5$ cm distanciando-a ainda mais da lente, depois moveu-se a tela e, novamente, obteve-se uma imagem forte da chama de altura 10 cm. Determinar a distância focal principal da lente.
744. Um feixe de raios convergente incide em uma lente divergente, de tal modo, que a continuação de todos os

raios interceptam-se em um ponto, localizado no eixo ótico da lente, a uma distância $b = 15$ cm da mesma. Determinar a distância focal da lente em dois casos: 1) após a refração na lente, os raios convergem-se em um ponto, situado a uma distância $a_1 = 60$ cm da lente; 2) a continuação dos raios refratados interceptam-se em um ponto situado na frente da lente, a uma distância $a_2 = 60$ cm da mesma.

745. A distância entre uma lâmpada elétrica e uma tela é $d = 1$ m. Para quais posições de uma lente convergente, com distância focal $f = 21$ cm, a imagem do fio incandescente da lâmpada será nítida? Poderá obter-se uma imagem, se a distância focal for igual a $f' = 26$ cm?

746. Uma lente convergente delgada projeta a imagem de um certo objeto, em uma tela. A altura da imagem é igual a h_1 . Não variando a distância entre o objeto e a tela, deslocam a lente e encontram uma segunda imagem nítida, de altura igual a h_2 . Determinar a altura H do próprio objeto.

747. Uma fonte de luz localiza-se a uma altura qualquer sobre um poço d'água. Uma lente feita de vidro, com índice de refração $n = 3/2$, colocada na água ($n_1 = 4/3$), projeta, no fundo, uma imagem forte da fonte, quando a mesma situa-se a uma distância $f_1 = 20$ cm, ou $f_2 = 80$ cm do fundo. Determinar a distância focal de tal lente no ar.

748. Qual é o raio R de um espelho côncavo, que se encontra a uma distância $a = 2$ m, da face de uma pessoa, que vê no espelho sua imagem, uma vez e meia maior do que em um espelho plano, que se encontra a mesma distância da face da pessoa.

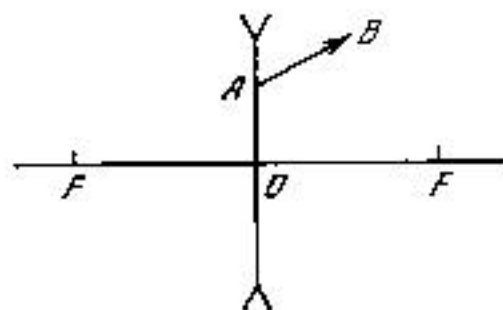


Fig. 249

749. Na fig. 249, está representado um raio AB , que passa através de uma lente divergente. Desenhar o trajeto do raio até a lente, se a localização de seus focos F é conhecida.

750. Na fig. 250, está representado um ponto luminoso e sua imagem, dada por uma lente, cujo eixo ótico é N_1N_2 . Encontrar a localização da lente e de seus focos.

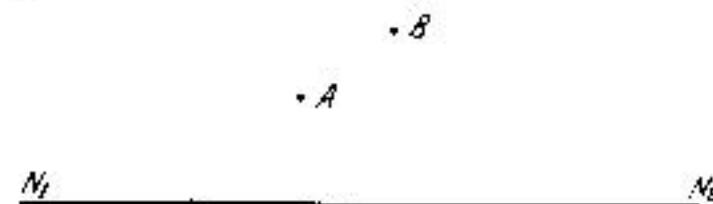


Fig. 250

751. Encontrar, graficamente, o centro ótico e os focos principais, no eixo ótico N_1N_2 de uma lente, sendo conhecida a localização da fonte S e de sua imagem S' (fig. 251).



Fig. 251

752. São dados a localização do eixo ótico N_1N_2 , o trajeto do raio AB que incide na lente e o raio refratado BC (fig. 252). Encontrar, graficamente, a localização dos focos principais da lente.



Fig. 252

753. Uma lente convergente projeta a imagem de uma fonte, no ponto S' , localizado no eixo ótico principal. A

localização do centro da lente O e de seus focos F é conhecida, sendo $OF < OS'$. Encontrar, graficamente, a posição da fonte S .

754. O ponto S' é a imagem de uma fonte de luz pontual, em um espelho esférico, cujo eixo ótico é N_1N_2 (fig. 253). Encontrar, graficamente, a localização do centro do espelho e de seus focos.

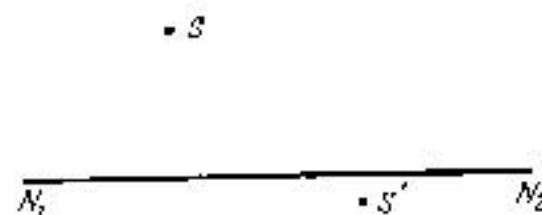


Fig. 253

755. São dados: a posição do eixo ótico N_1N_2 , de um espelho esférico, a posição da fonte e da sua imagem



Fig. 254

(fig. 254). Encontrar, graficamente, a posição do centro do espelho, de seus foco e polo para os seguintes casos:

- 1) A é a fonte, B é a imagem;
 - 2) B é a fonte, A é a imagem.
756. Uma fonte de luz pontual, colocada a uma distância qualquer de uma tela, cria no centro da mesma uma iluminação de 2,25 lux. Como variará essa iluminação, se no outro lado da fonte, à mesma distância, colocarmos:
- 1) Um espelho plano infinito, paralelo à tela?

2) Um espelho côncavo, cujo centro coincide com o centro da tela?

3) Um espelho convexo, que tenha a mesmo raio de curvatura do côncavo?

757. Desejando obter uma foto de uma zebra, um fotógrafo fotografou um burro branco, adaptando à objetiva da máquina fotográfica um vidro com riscos negros. O que se obteve na foto?

758. Uma lente laminar, mostrada na fig. 255, foi feita de dois tipos de vidro. Que imagem obter-se-á desta lente,

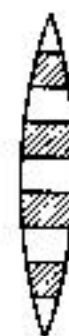


Fig. 255

no caso de uma fonte pontual, localizada no eixo ótico? A reflexão da luz no limite das camadas, não precisa ser considerada.

759. Tem-se a impressão, de que as medidas dos discos, do Sol e da Lua, vistos no horizonte, são maiores em comparação com as medidas dos mesmos, vistos no zênite. Como pode-se demonstrar, experimentalmente, com a ajuda de uma lente, que este aumento é ilusório?

§ 31. SISTEMAS E APARELHOS ÓTICOS

760. Em uma lente convergente, com distância focal igual a 40 cm, incide um feixe de raios paralelos. Onde é necessário colocar uma lente divergente, com distância focal igual a 15 cm, a fim de que após o feixe de raios que passa pelas duas lentes, continue paralelo?
761. A que distância de uma lente biconvexa, com distância focal $f = 1$ m, é necessário colocar um espelho esférico côncavo, que tem raio de curvatura $R = 1$ m, a fim de que o raio que incide na lente, paralelamente ao eixo ótico principal do sistema, depois de reflexão no

espelho, saia da lente e continue paralelo ao eixo ótico? Encontrar as imagens de um objeto, dadas por tal sistema ótico.

762. Um sistema ótico é constituído de duas lentes convergentes, com distâncias focais $f_1 = 20$ cm e $f_2 = 10$ cm. A distância entre as lentes é $d = 30$ cm. O objeto encontra-se a uma distância $a_1 = 30$ cm da primeira lente. A qual distância da segunda lente obter-se-á a imagem?
763. Determinar a distância focal de um sistema ótico, constituído por duas lentes delgadas: uma divergente, com distância focal f_1 e uma convergente, com distância focal f_2 . As lentes são colocadas muito próximas uma da outra. Os eixos óticos das lentes coincidem.
764. Duas lentes divergentes iguais são colocadas em um mesmo eixo, de tal modo que o foco frontal de uma e o foco secundário da outra, fiquem localizados em um mesmo ponto A do eixo. Uma terceira lente é colocada nesse mesmo eixo de tal modo, que seu centro ótico encontre-se no ponto A . A distância focal da terceira lente é tal, que o sistema dá a imagem real de qualquer objeto, localizado fora do sistema, mas no eixo do mesmo. Qual aumento dará o sistema, quando a distância entre o objeto e sua imagem for a menor possível?
765. Um feixe paralelo de luz incide em um sistema de três lentes delgadas com eixo ótico comum. As distâncias focais das lentes são, correspondentemente, iguais a: $f_1 = +10$ cm, $f_2 = -20$ cm e $f_3 = +9$ cm. A distância entre a primeira e a segunda lentes é 15 cm, entre a segunda e a terceira lente é 5 cm. Determinar a localização do ponto de convergência do feixe ao sair do sistema das lentes.
766. Um sistema ótico qualquer projeta a imagem real de uma fonte em um ponto A . A dimensão da imagem é 1 mm. Outro sistema ótico é constituído por duas lentes convergentes, distribuídas de tal modo, que o centro de uma coincide com o foco da outra e inversamente. O segundo sistema é colocado em um mesmo eixo que o primeiro, de tal modo que o ponto A fica entre as lentes, aproximadamente, no meio. Encontrar a dimensão da imagem, formada pelo segundo sistema.

767. Um sistema ótico é constituído por duas lentes, com distâncias focais iguais em grandeza absoluta. Uma das lentes é convergente e a outra é divergente. As lentes são colocadas, em um mesmo eixo, a uma distância qualquer, uma da outra. Sabe-se, que ao trocarmos as lentes de lugar, então, a imagem real da Lua, formada pelo sistema desloca-se em $l = 20$ cm. Encontrar a distância focal de cada uma das lentes.
768. Qual deverá ser a distância focal F_x , de uma lente convergente, que dê uma imagem da Lua, igual em grandeza à imagem obtida pelo sistema de duas lentes, mencionado no problema 767? A distância entre as lentes é $a = 4$ cm.
769. Para quais posições das lentes, indicadas no problema 767, as dimensões da imagem real da Lua serão maiores?
770. Uma lente, com distância focal $f = 30$ cm, projeta em uma tela, a imagem nítida de um objeto, localizado a uma distância $a = 40$ cm da lente. Entre a lente e o objeto, perpendicularmente ao eixo ótico da lente, colocaram uma lâmina plana e paralela, de espessura $d = 9$ cm. A que distância é necessário deslocar a tela, a fim de que a imagem do objeto continue nítida? O índice de refração do vidro da lâmina é $n = 1,8$.
771. Um objeto AB encontra-se a uma distância $a = 36$ cm de uma lente, com distância focal $f = 30$ cm. A uma

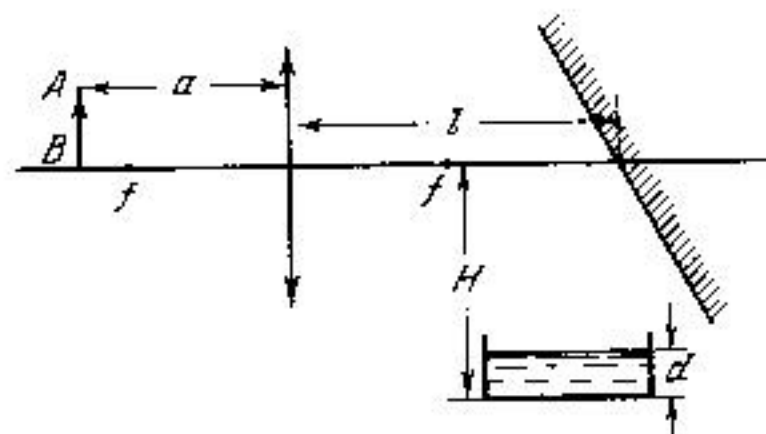


Fig. 256

distância $l = 1$ m, após a lente, foi colocado um espelho plano, inclinado, em relação ao eixo ótico da lente em 45° (fig. 256). A que distância H do eixo ótico, é neces-

- sário colocar o fundo de uma bacia com água, a fim de obter-se, no mesmo, uma imagem nítida do objeto? A profundidade da água na bacia é $d = 20$ cm.
772. Uma cunha vítrea, com pequeno ângulo de refração α , é colocada a uma certa distância, de uma lente convergente com distância focal f , sendo, que uma das superfícies da cunha é perpendicular ao eixo ótico da lente. Do outro lado da lente, em seu foco, encontra-se uma fonte de luz pontual. Os raios refletidos pela cunha, dão, após a refração na lente, duas imagens da fonte, deslocadas, uma da outra, em uma distância d . Encontrar o índice de refração do vidro da cunha.
773. Num espelho côncavo, que tem a forma de uma semiesfera de raio $R = 55$ cm, colocou-se uma fina camada de um líquido desconhecido, transparente. Por causa disso, teve-se a impressão, que tal sistema ótico, em determinada posição da fonte, dava duas imagens reais, uma das quais coincidia com a própria fonte e a outra distanciava-se da fonte em $l = 30$ cm. Encontrar o índice de refração n do líquido.
774. Uma lente biconvexa tem distância focal $f_1 = 10$ cm. Uma das superfícies da lente, que tem raio de curvatura $R = 10$ cm, está coberta de prata. Constituir, graficamente, a imagem de um objeto, obtida neste sistema ótico e encontrar a posição da imagem, caso o objeto encontra-se a uma distância $\alpha = 15$ cm da lente.
775. Uma lente convexo-plana de vidro, (índice de refração n) com um lado plano prateado tem distância focal F_1 . Que distância focal terá esta lente, se pratearmos o lado convexo e não o plano?
776. Na superfície plana de um pedaço maciço de vidro foi feito um orifício, em forma de um segmento de esfera (o índice de refração do vidro é n). A parte tirada do vidro tem a forma de uma lente convergente, delgada, com distância focal f . Encontrar as distâncias focais f_1 e f_2 , da superfície esférica obtida.
777. Em uma esfera transparente, que tem raio R e índice de refração n , incide, na direção de um dos diâmetros, um feixe fino de raios luminosos paralelos. A que distância f do centro da esfera os raios focalizar-se-ão?
778. Uma esfera de diamante ($n = 2,4$) de raio R está coberta de prata na parte de trás. A que distância d , da frente da esfera, deve ser colocada uma fonte de luz pontual, a fim de que os raios, que se refratam na superfície dianteira, refletem-se na parte traseira, e novamente refratando-se na dianteira formem uma imagem que coincida com a fonte?
779. Encontrar, graficamente, a localização dos planos principais de uma esfera transparente, utilizada como lente.
780. Um objeto encontra-se a uma distância $d = 2,5$ cm da superfície de uma esfera de vidro, que tem raio $R = 10$ cm. Encontrar a localização da imagem dada pela esfera. O índice de refração do vidro é $n = 1,5$.
781. Um recipiente esférico, cuja espessura das paredes AR é muito menor de que seu raio R , é feito de vidro de índice de refração n . Considerando esse recipiente como um sistema ótico e tomando somente os raios próximos à reta, que passa pelo centro da esfera, determinar a posição dos focos e dos planos principais do sistema.
782. Em uma gota de água, que tem forma esférica, incide, sob um ângulo i , um raio de luz. Encontrar o ângulo θ , de desvio do raio em relação à direção inicial, no caso da existência de uma única reflexão da superfície interna da gota.
783. Em uma gota de água, de forma esférica, incide um feixe de raios paralelos.
- 1) Determinar os valores dos ângulos θ , de desvio, dos raios em relação a direção inicial, para diferentes ângulos de incidência: 0° , 20° , 40° , 50° , 55° , 60° , 65° , 70° .
 - 2) Construir, graficamente, a dependência de θ em relação a i e, pelo gráfico, encontrar, o valor aproximado do ângulo de menor desvio $\theta_{\min}$.
 - 3) Determinar, nas proximidades de quais valores do ângulo θ , os raios refratados da gota, se propagarão aproximadamente paralelos.
- O índice de refração da água considerar igual a $n = 1,333$. (Este valor de n é válido para os raios vermelhos).

784. Por que nas câmaras fotográficas que utilizam vidro mole para a nitidez da focalização, não são utilizados vidros transparentes?
785. Dois faróis de mesmo brilho encontram-se a distâncias diferentes de um observador.
- 1) Para o observador os faróis terão o mesmo brilho?
 - 2) As imagens dos mesmos, em uma fotografia, terão o mesmo brilho, se os faróis forem fotografados em diferentes quadros, a fim de que as imagens localizem-se no foco?
786. Um mesmo objeto é fotografado de uma pequena distância, por duas máquinas fotográficas, que têm a mesma luminosidade, mas diferentes distâncias focais. A exposição seria a mesma, em ambas as máquinas?
787. Com auxílio de uma lente, obtem-se, sucessivamente, duas imagens de um mesmo objeto, com aumentos de $k_1 = 5$ e $k_2 = 2$. Em quantas vezes variará a iluminação da tela, no local de obtenção da imagem, ao passarmos de um aumento a outro?
788. Uma fonte de luz pontual localiza-se no eixo de uma lente divergente, a uma distância $a = 30$ cm da mesma. Em uma tela, localizada do outro lado da lente, a uma distância $l = 10$ cm, obtem-se uma mancha luminosa. Se aumentarmos a distância entre a lente e a tela em 4 vezes, a luminosidade do centro da mancha diminuirá em 4 vezes. Encontrar a distância focal da lente.
789. A distância de uma fonte pontual, até uma lente convergente, é $d = 30$ cm, da lente até uma tela é $l = 60$ cm. Sabe-se, que a iluminação do centro de uma mancha luminosa, na tela, aumentará em $n = 4$ vezes, se a tela for situada junto da lente. Determinar a distância focal da lente.
790. Uma pequena quantidade de líquido opaco, cobre uma parte prateada no fundo de um recipiente esférico negro, em cujo centro localiza-se uma fonte de luz pontual. Quando o líquido foi substituído por um líquido transparente, a iluminação, do ponto superior do recipiente, aumentou em 25%. Determinar o índice de refração do líquido transparente.
791. As lentes, que foram mencionadas no problema 767, têm o mesmo diâmetro. Comparar a iluminação da

imagem da Lua no primeiro e no segundo caso de localização das lentes e pela utilização de uma lente equivalente.

792. Temos a impressão que uma parede branca, iluminada pelo pôr do Sol, é mais clara, que a superfície da lua, a qual encontra-se a uma mesma altura que o Sol no horizonte. Significará isto, que a superfície da Lua é constituída de sedimentos escuros? (Minnart, «Luz e cores na natureza»).
793. Por que ao abrirmos os olhos sob a água, vemos, somente, o contorno difuso dos objetos, e ao utilizarmos uma máscara para mergulho, os objetos são vistos, totalmente, nítidos?
794. Um homem míope, cujo limite de acomodação dos olhos, situa-se entre $a_1 = 12$ cm e $a_2 = 60$ cm, usa óculos, com a ajuda dos quais pode ver muito bem objetos distantes. Determinar a menor distância possível a_3 para a qual este homem pode ler um livro, utilizando os óculos.
795. Dois homens, um hipermetrope e um míope, utilizando seus óculos, vêem como uma pessoa com visão normal. Uma vez, casualmente, eles trocaram os óculos. Pondo os óculos do míope, o hipermetrope notou, que ele pode ver, claramente, somente, objetos bem distantes. Qual é a menor distância a , que possibilita do míope ler letras pequenas, utilizando os óculos do hipermetrope?
796. Vê-se um objeto desde uma distância D a olho nu. Qual será o aumento angular, se o mesmo objeto for visto através de uma lupa, colocada a uma distância r dos olhos e localizada de tal modo, que a imagem situe-se a uma distância L dos olhos? A distância focal da lente é igual a f . Examinar os casos: 1) $L = \infty$; 2) $L = D$.
797. De uma luneta, focalizada no infinito, tiraram a objetiva e substituíram-na pelo diafragma de diâmetro D . Como consequência disto, a uma distância qualquer da ocular, em uma tela obteve-se a imagem real do diafragma, que tem diâmetro d . Qual foi o aumento da luneta?
798. Para construção de uma lente dupla, da objetiva de uma câmara fotográfica, um construtor utilizou uma lente divergente com distância focal $f_1 = 5$ cm, colo-

cando-a a uma distância $l = 45$ cm do filme. Onde é necessário colocar a lente convergente, com distância focal $f_2 = 8$ cm, a fim de que no filme obtenha-se uma imagem nítida de objetos distantes?

799. Para as três diferentes localizações das lentes, encontradas no problema 798, calcular o diâmetro D , da imagem da Lua, obtida no negativo. O diâmetro da lua é visto da terra, sob o ângulo médio $\varphi = 31'5'' \approx 0,9 \cdot 10^{-2}$ rad.
800. A distância focal principal da objetiva de um microscópio é $f_{\text{obj}} = 3$ mm, do ocular $f_{\text{oc}} = 5$ cm. Um objeto encontra-se a uma distância $a = 3,1$ mm da objetiva. Encontrar o aumento do microscópio para um olho normal. Considerar os seguintes casos: 1) a imagem situa-se a uma distância $D = 25$ cm; 2) no olho do ocular incide um feixe de raios paralelos.

Capítulo VI

Ótica física

§ 32. INTERFERÊNCIA DA LUZ

801. Duas ondas luminosas, sobrepondo-se, uma a outra, em determinado local do espaço, extinguem-se, mutuamente. Significará isto, que a energia luminosa transformar-se-á em outras formas?
802. Duas fontes de luz coerentes S_1 e S_2 , estão situadas a uma distância l , uma da outra. A uma distância $D \gg l$ das fontes coloca-se uma tela (fig. 257). Encontrar a

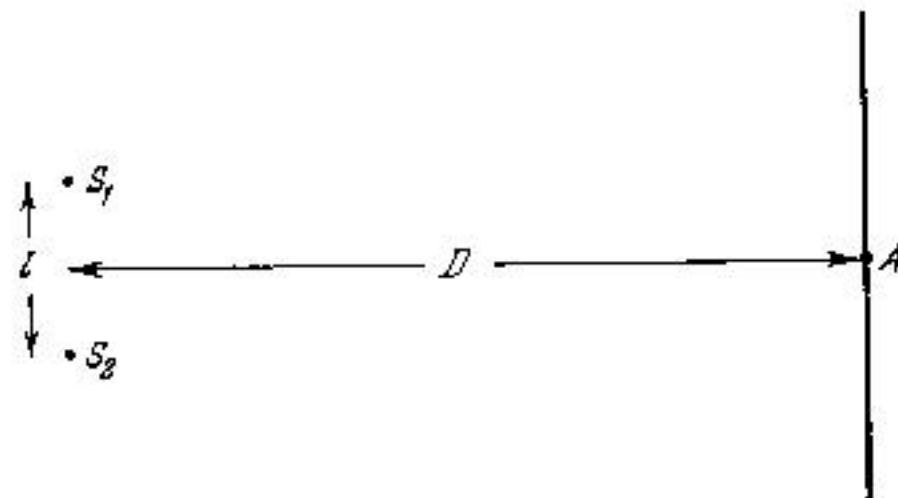


Fig. 257

distância entre as faixas de interferência sucessivas, próximas ao meio da tela (ponto A), se as fontes emitem luz de comprimento de onda λ .

803. Dois espelhos planos formam, entre si, um ângulo próximo a 180° (fig. 258). A distâncias iguais b dos

espelhos localiza-se uma fonte de luz S . Determinar o intervalo entre as faixas de interferência sucessivas na tela MN , localizada a uma distância $OA = a$ do ponto

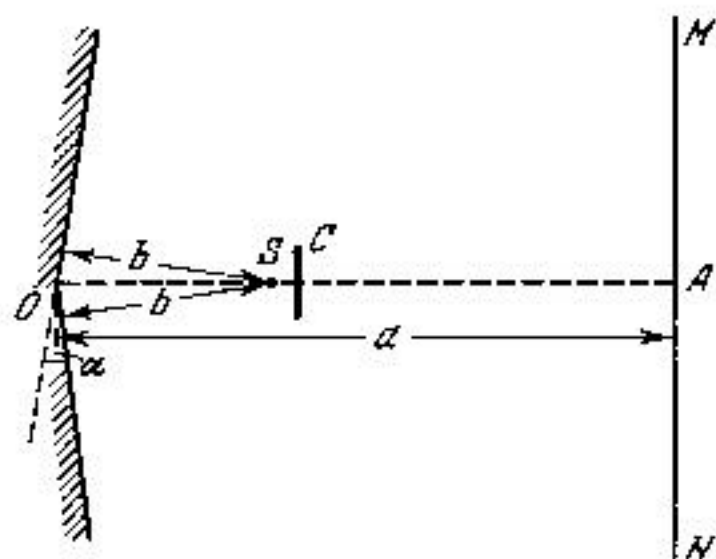


Fig. 258

de intersecção dos espelhos. O comprimento da onda luminosa é conhecido e igual a λ . (A cortina C impede a incidência imediata da luz da fonte na tela).

804. A experiência de interferência de Lloyd consistiu na obtenção, em uma tela, da imagem da fonte S e de

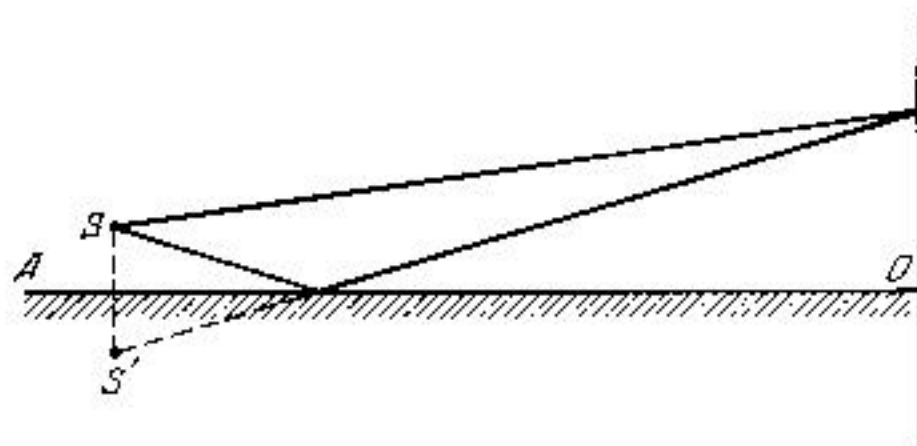


Fig. 259

sua imagem virtual S' , no espelho AO (fig. 259). Qual será a diferença entre o quadro de interferência

das fontes S e S' , em comparação com o quadro examinado no problema 802?

805. Duas fontes pontuais coerentes estão situadas em uma reta, perpendicular a uma tela, a uma distância entre as mesmas de $l \gg \lambda$. A fonte mais próxima encontra-se a uma distância $D \gg \lambda$ da tela. Qual será a forma, que terá a faixa de interferência na tela? Qual será a distância da perpendicular à faixa luminosa mais próxima na tela (para as condições $l = n\lambda$, onde n é um número inteiro)?
806. Encontrar o raio do k -ésimo anel luminoso (ver o problema 805), para as condições de $D = l = n\lambda$, $n \gg 1$, $k = n$, $n = 1, 2, \dots$
807. Como pode-se realizar na prática a experiência descrita no problema 805?

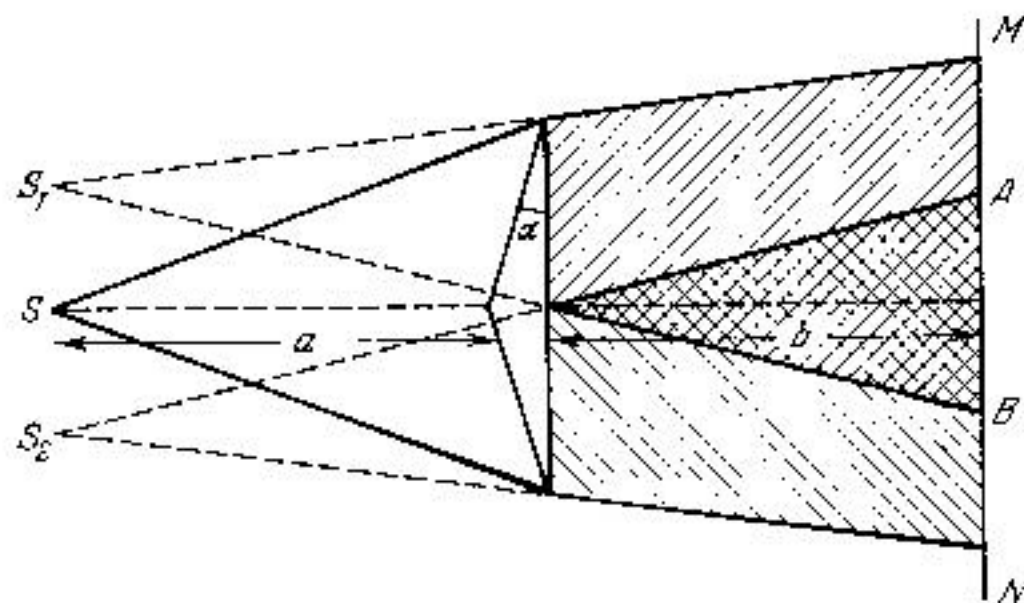


Fig. 260

808. No biprisma de Fresnel, mostrado na fig. 260, incide luz da fonte S . Os feixes luminosos, que sofrem refração por diferentes faces do prisma, em parte sobrepõem-se e formam, na parte AB da tela, um quadro de interferência. Encontrar a distância entre as faixas de interferência sucessivas, se a distância da fonte até o prisma é $a = 1$ m, do prisma até a tela é $b = 4$ m; o ângulo de refração do prisma é $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ rad. O vidro do qual é feito o prisma, tem um índice de refração $n =$

$= 1,5$. O comprimento da onda luminosa é $\lambda = 6000 \text{ \AA}$.

809. Quantas faixas de interferência observam-se em uma tela, de um sistema ótico, com um biprisma descrito no problema anterior?

810. A dificuldade de preparação de um biprisma com ângulo próximo a 180° (ver o problema 808), obriga-nos a recorrer ao seguinte método. Um biprisma com ângulo β , que se diferencia, radicalmente, de 180° , é colocado em um recipiente cheio de líquido, com índice de refração n_1 , ou o prisma pode ser uma das paredes deste recipiente (fig. 261). Calcular o ângulo δ do biprisma

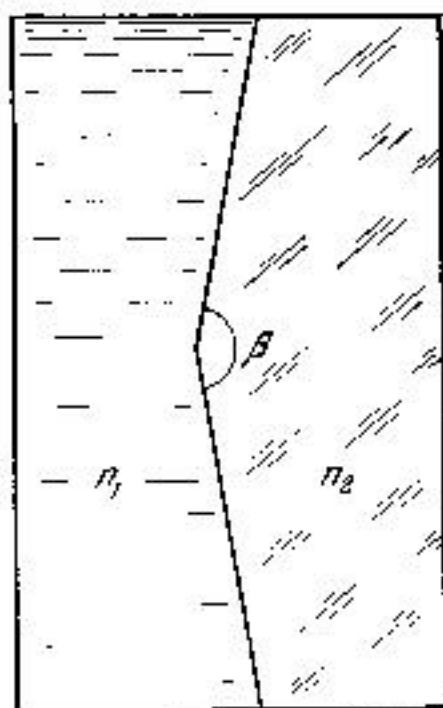


Fig. 261

equivalente, que se encontra no ar. O índice de refração do material do prisma é n_2 . Fazer os cálculos para $n_1 = 1,5$ (benzol), $n_2 = 1,52$ (vidro), $\beta = 170^\circ$.

811. Uma lente convergente, cuja distância focal é $f = 10 \text{ cm}$, foi cortada ao meio, e as metades foram deslocadas a uma distância $d = 0,5 \text{ mm}$ (lente dupla). Calcular o número de faixas de interferência na tela, localizada atrás da lente, a uma distância $D = 60 \text{ cm}$, se na frente da lente existe uma fonte pontual de luz

monocromática ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$), distante da mesma em $a = 15 \text{ cm}$.

812. De uma lente convergente, com distância focal $f = 10 \text{ cm}$, foi cortada a parte central de largura $d = 0,5 \text{ mm}$, como mostra a fig. 262. Ambas as metades,

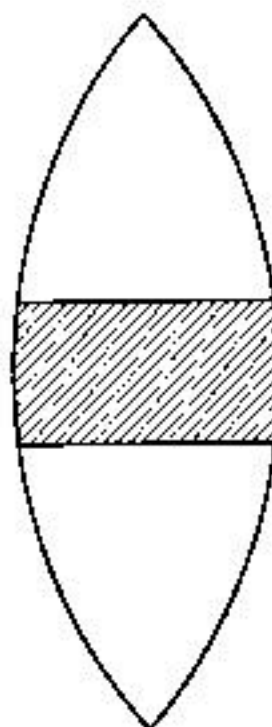


Fig. 262

foram colocadas juntamente. Na lente incide luz monocromática ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) de uma fonte pontual, localizada a uma distância $a = 5 \text{ cm}$ da lente. A que distância, do outro lado da lente, deve ser colocada uma tela, a fim de que, na mesma, possam ser observadas três faixas de interferência? Qual é o maior número possível de faixas de interferência, que se pode observar em tal sistema ótico?

813. Encontrar a distância entre as faixas sucessivas de um quadro de interferência, criado por uma lente de raio $R = 1 \text{ cm}$, mencionada no problema 812, sendo que esta distância não depende da posição da tela. Para qual posição da tela, o número de faixas de interferência será máximo? A fonte de luz emite luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA}$.

814. O que ocorrerá com o quadro de interferência, no sistema ótico descrito no problema 812, se colocarmos no feixe luminoso, que passa pela metade superior da lente, uma lâmina vítrea plana e paralela de espessura $d_1 = 0,11$ cm, e no feixe luminoso, que passa pela metade inferior da lente, uma lâmina de espessura $d_2 = 0,1$ cm? O índice de refração do vidro é $n = 1,5$. As lâminas são colocadas normalmente aos feixes luminosos, que passam através das mesmas.
815. Por que, os anéis de Newton são formados, somente, como consequência da interferência dos raios 2 e 3, refletidos nos limites da camada de ar intermediária,

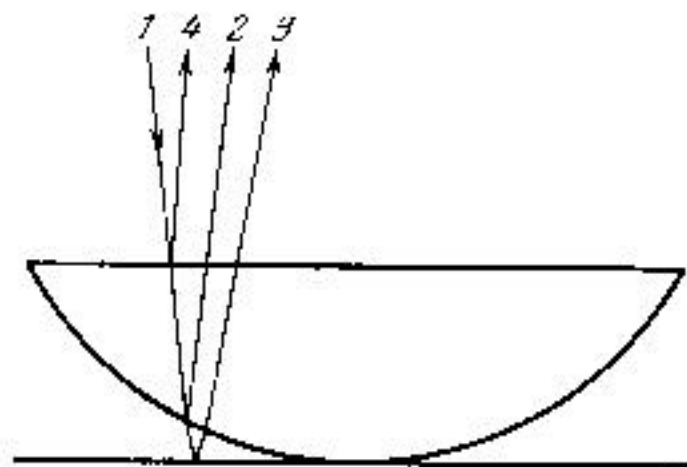


Fig. 263

existente entre a lente e o vidro (fig. 263), e o raio 4, refletido na face plana da lente, não influi no caráter do quadro de interferência?

816. Mudará o caráter do quadro de interferência, no sistema ótico descrito no problema 803, se tirarmos a cortina C ? Considerar a distância a muito grande (igual a 1 m). As ondas, irradiadas pela fonte, não são monocromáticas.
817. Em qual caso os anéis de Newton serão vistos mais claramente: quando a luz é refletida, ou quando ela atravessa o meio?
818. Entre uma lente plana convexa e uma lâmina de vidro, sobre a qual ela é colocada, não há o contato por causa do pó. O raio do quinto anel escuro de Newton, por causa disso é igual a $r_1 = 0,08$ cm. Se tirarmos o pó,

então, o raio desse anel aumenta para $r_2 = 0,1$ cm. Encontrar a espessura da camada de pó d , se o raio de curvatura da superfície convexa da lente é $R = 10$ cm.

819. Sobre a superfície de uma lente bicôncava, que tem um raio de curvatura igual a R_1 , foi colocada a parte convexa de uma lente plano-convexa, cujo raio de curvatura da superfície é $R_2 < R_1$. Encontrar os raios dos anéis de Newton, que surgem em redor do ponto de contato das lentes, se no sistema incide, normalmente, luz monocromática de comprimento de onda λ .
820. A fim de diminuir o índice de reflexão da luz dos espelhos óticos, na superfície dos mesmos, é colocada uma camada fina de uma substância transparente, cujo índice de refração n é menor do que o índice de refração do vidro. (Isto é, no chamado «método de limpeza de aparelhos óticos»). Calcular a espessura da camada colocada, considerando, que os raios luminosos incidem no vidro ótico quase normalmente.
821. Um olho normal está capacitado a diferenciar as tonalidades das cores, para uma diferença de comprimento de ondas igual a $100 \text{ \AA}$. Considerando isso, calcular a espessura máxima de uma camada fina de ar, na qual pode-se observar em luz branca, um quadro de interferência, provocado pela superposição dos raios refletidos nos limites desta camada.
822. Em uma cunha vítrea, fina, de uma fonte distante incidem, quase normalmente, um fluxo de ondas monocromáticas de comprimento de onda λ . A uma distância d da cunha foi colocada uma tela, na qual uma lente, com distância focal f , projeta um quadro de interferências, que surgiu na cunha. A distância, entre as faixas de interferência na tela, é Δl e é conhecida. Encontrar o ângulo α da cunha, se o índice de refração do vidro é igual a n .

§ 33. DIFRAÇÃO DA LUZ

823. Calcular os raios das zonas de Fresnel, de uma onda esférica de raio a , para o ponto B , que se distancia da fonte de ondas monocromáticas, as quais têm comprimento de onda λ , a uma distância $a \perp b$, considerando, que: $a \gg \lambda$ e $b \gg \lambda$.

824. Calcular os raios das zonas de Fresnel, de uma onda plana, para o ponto B , que se distancia da frente de onda, a uma distância igual a $b \gg \lambda$, onde λ é o comprimento de onda da fonte.
825. Uma fonte pontual de luz monocromática, de comprimento de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, encontra-se a uma distância

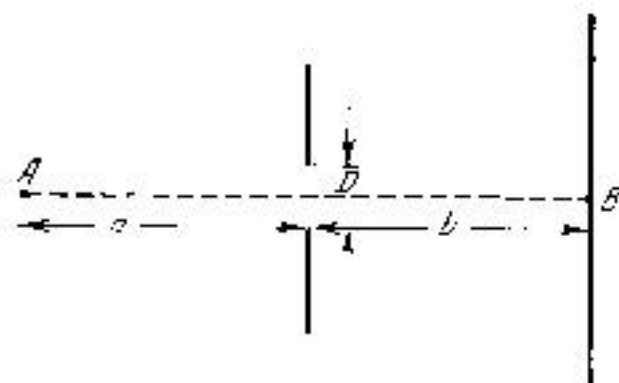


Fig. 264

cia $a = 6,75 \text{ m}$ de uma cortina, com uma abertura de diâmetro $D = 4,5 \text{ mm}$. A uma distância $b = a$ da cortina, foi colocada uma tela (fig. 264). Como variará a iluminação no ponto B da tela, que se encontra no eixo do feixe, se aumentarmos o diâmetro da abertura para $D_1 = 5,2 \text{ mm}$?

826. Como explicar, de acordo com a lei de conservação de energia, o fato, de que o aumento da abertura (ver as condições do problema 825) pode conduzir à diminuição da iluminação no eixo do feixe? É evidente, que o aumento da abertura conduz ao crescimento do fluxo luminoso total, que passa através da cortina.
827. Uma onda plana, luminosa ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$), incide em uma cortina, com um diafragma circular. A uma distância $b = 2 \text{ m}$, atrás do diafragma, foi colocada uma tela. Para qual diâmetro D do diafragma, a iluminação da tela no ponto B , que se situa no eixo do feixe luminoso, será máxima?
828. Considerando as distâncias, de uma fonte até uma cortina e da cortina até uma tela, aproximadamente iguais a a , estimar, para quais condições, a difração das ondas luminosas de comprimento λ , na abertura

da cortina, será expressa suficientemente nítida (a intensidade, no eixo do feixe, dependerá do diâmetro da abertura).

829. Demonstrar, que atrás de uma tela circular C , no ponto B , (fig. 265) será observada uma mancha clara, se as dimensões da tela forem suficientemente pequenas.

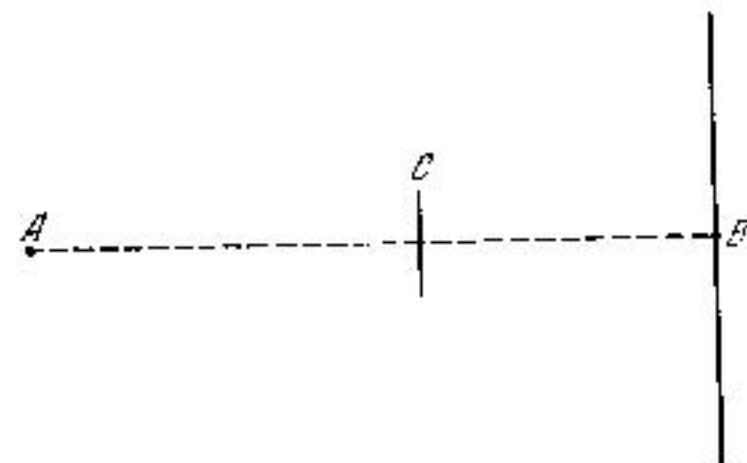


Fig. 265

830. A qual distância encontrar-se-ão dois homens, a fim de que os olhos possam diferenciá-los, desde uma distância de uns 11 km ? A capacidade de adaptação de um olho normal constitui aproximadamente $1'$.
831. Uma onda luminosa plana (de comprimento de onda λ) incide, normalmente, em uma abertura estreita de largura igual a b . Determinar as direções nos mínimos de iluminação.
832. Determinar as dimensões ideais do orifício, de uma câmara com aberturas em dependência do comprimento de onda, i.é., o raio do orifício r , para o qual uma fonte pontual aparece na parede da câmara, como um círculo de diâmetro mínimo, se a distância da fonte de luz até a câmara é grande, em comparação com a profundidade d da mesma. As direções nos mínimos de iluminação, por ordem de grandeza, são determinadas pela mesma fórmula, utilizada para a abertura (ver o problema 831), somente, que no lugar da largura da abertura b é necessário tomar o diâmetro da abertura igual a $2r$.
833. Em uma rede de difração, que tem um período $d = 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$, incide, normalmente, uma onda monocromática. Calcular o comprimento de onda λ , se o

ângulo entre os espectros de segunda e terceira ordem é igual a: $\alpha = 2^\circ 30'$. Os ângulos de desvio devem ser considerados pequenos.

834. Num rede de difração, que tem 500 fios por milímetro, incide uma onda plana monocromática ($\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$ cm). Determinar a maior ordem do espectro k , que poderá ser observado pela incidência de raios normais na rede.
835. Determinar a constante de uma rede d , capaz de analisar irradiações infravermelhas, com comprimentos de onda até $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$ cm. A irradiação incide na rede normalmente.
836. Em uma rede de difração, que tem um período $d = 4 \cdot 10^{-4}$ cm, incide, normalmente, uma onda monocromática. Atrás de rede é colocada uma lente, que tem uma distância focal $f = 40$ cm e que projeta a imagem do quadro de difração numa tela. Determinar o comprimento de onda λ , se o primeiro máximo é obtido a uma distância igual a $l = 5$ cm do máximo central.
837. Uma fonte de luz branca, uma rede de difração e uma tela, são colocadas na água. Quais variações sofrerá, por causa disto, o quadro de difração, se os ângulos de desvio dos raios luminosos da rede, são pequenos?
838. Em uma rede de difração, que tem um período $d = 2 \cdot 10^{-4}$ cm, incide luz normalmente, depois de passar através de um filtro de luz. O filtro permite a passagem de ondas de comprimento desde $\lambda_1 = 5000 \text{ Å}$ até $\lambda_2 = 6000 \text{ Å}$. Sobrepor-se-ão uns aos outros os espectros de diferentes ordens?
839. Resolver o problema 834, supondo, que uma onda plana ($\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$ cm) incide na rede, sob um ângulo de 30° .
840. Resolver o problema 835, supondo, que a incidência dos raios na rede pode ser inclinada.
841. Encontrar a condição, que determina a direção nos máximos principais, devido à incidência inclinada de ondas luminosas, em uma rede, se o período da rede for: $d \gg k\lambda$ (onde k é a ordem do espectro).

§ 34. DISPERSÃO DA LUZ E CORES DOS CORPOS

842. Um raio de luz branca incide sob ângulo $\alpha = 30^\circ$ em um prisma, cujo ângulo de refração é $\varphi = 45^\circ$. Determinar o ângulo θ , entre os raios extremos do espectro,

que saem do prisma, se os índices de refração do vidro do prisma, para os raios extremos do espectro visível, são iguais a $n_{\text{ver}} = 1,62$ e $n_{\text{viol}} = 1,67$.

843. Em uma lente biconvexa, cujos raios de curvatura das superfícies, são iguais a $R_1 = R_2 = 40$ cm, incide luz branca de uma fonte pontual, localizada no eixo ótico da lente, a uma distância igual a $a = 50$ cm da mesma. Anexo à lente coloca-se um diafragma, de diâmetro $D = 1$ cm, que limita a seção transversal do feixe luminoso. Os índices de refração, para os raios extremos do espectro visível, são iguais a $n_{\text{ver}} = 1,74$ e $n_{\text{viol}} = 1,8$. Que quadro poderá ser observado em uma tela, localizada a uma distância $b = 50$ cm da lente, perpendicularmente ao eixo ótico da mesma?
844. Utilizando os resultados do problema 783, elabore uma teoria elementar do arco-íris, i.é., demonstre, que o centro do arco-íris encontra-se na reta traçada desde o sol até o olho de um observador, e que o arco do arco-íris é parte de uma circunferência, cujos pontos são vistos sob ângulo de 42° (para a luz vermelha), em relação a uma reta, que une o olho de um observador e o centro do arco-íris.
845. Explicar, qualitativamente, as causas do surgimento de um arco-íris duplo. Que alterações sofrem as cores no primeiro (fundamental) e no segundo arco-íris?
846. Poderá-se-á em Moscou, por ocasião do solstício de verão, (22 de junho) observar um arco-íris ao meio dia? (Nesse período, o sol no hemisfério norte, encontra-se o mais alto possível sobre o horizonte).
847. O comprimento de onda na água diminui em n vezes, onde n é o índice de refração. Significará isto, que um mergulhador não possa ver os objetos circundantes em sua cor natural?
848. Em um caderno escreveu-se, com um lápis vermelho, «ótimo» e com um lápis verde «bom». Têm-se dois vidros: um verde e um vermelho. Através de qual vidro dever-se-á olhar, para ver-se a palavra «ótimo»?
849. Por que as objetivas depois da limpeza (ver o problema 820) têm uma tonalidade purpúreo-violeta (lilás)?
850. As cores das películas finas (por exemplo, as manchas de petróleo na água) e as cores do arco-íris têm tonalidades totalmente diferentes. Por que?

851. Numa película fina, de sabão, presa em um quadro vertical, incide iluminação de luz branca e se observam três faixas coloridas: púrpura (framboesa), amarela e azul (verde-azulada). Encontrar a posição e a ordem das faixas.
852. Por que, a lua durante o dia tem uma cor limpa, branca e depois do pôr do sol adquire uma tonalidade amarelada?
853. Por que, uma coluna de fumaça, que se eleva sobre os telhados das casas, tendo por fundo objetos circundantes escuros, parece ser azul, e tendo por fundo o céu claro parece ser amarela, ou mesmo vermelhada?
854. Por que, as cores dos objetos molhados parecem ser mais profundas, mais saturadas do que os objetos secos?

RESPOSTAS E SOLUÇÕES

Capítulo I

Mecânica

§ 1. CINEMÁTICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO E UNIFORME

1. No período de 1 hora, após o encontro, o barco afastou-se da balsa. No período de 30 min. em que o motor foi consertado, a distância entre os dois não aumentou. O barco alcançará a balsa depois de 1 h uma vez que a velocidade da mesma relativamente à água e à balsa permanece constante e é igual a:

$$v = S/t = 7,5/1 + 0,5 \quad t = 3 \text{ km/h.}$$

2. A distância entre os trens é S , tal sendo que $S = vt - vt_0$. Onde temos que:

$$u = v(t - t_0), \quad t = 45 \text{ km/h.}$$

3. Na fig. 266, AMN é a representação gráfica do movimento comum do automóvel. CD é o gráfico do trajeto percorrido pelo

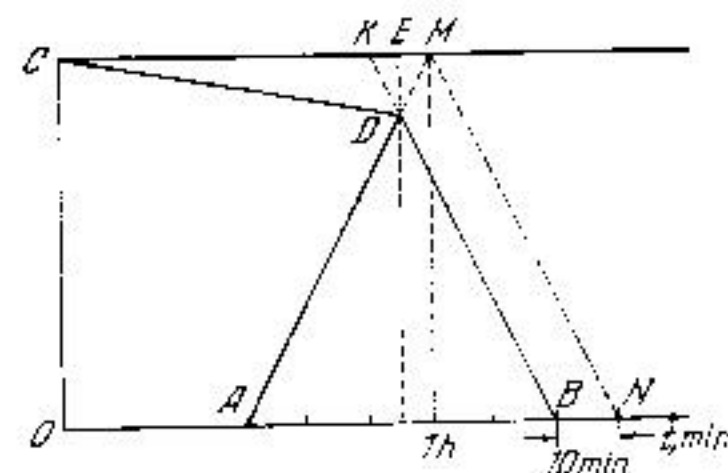


Fig. 266

engenheiro até encontrar o automóvel no ponto D . DB é a representação gráfica do movimento do automóvel depois do encontro com o engenheiro. Segundo as condições do problema $BV = AM = 10$ min. O tempo do movimento do engenheiro até o encontro com o automóvel é igual a:

$$CE = CM = AV = CM = AM = 10 \text{ min.}$$

4. Uma vez que o tempo é calculado em relação ao último que chegou, o mesmo será o menor possível, quando todos os três turistas chegarem ao mesmo tempo. O gráfico do movimento dos turistas está representado na Fig. 267. Do gráfico vê-se que o movimento

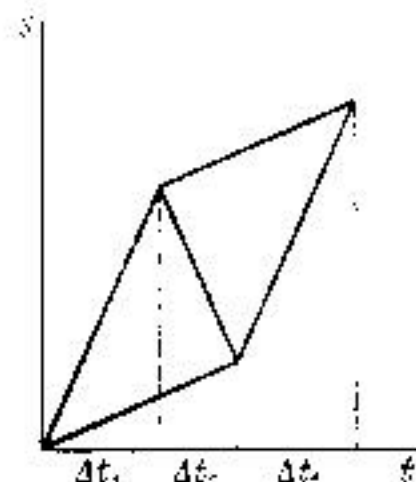


Fig. 267

a pé do segundo e terceiro turistas ocupou um intervalo de tempo igual ($\Delta t_1 = \Delta t_2$), onde Δt_2 é o tempo do movimento de retorno do ciclista. Por isso

$$v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2\Delta t_1 = v_{\text{med}}(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1).$$

$$v_2\Delta t_1 = v_3\Delta t_2 = v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2).$$

Das equações conclui-se, que a velocidade média dos turistas é

$$v_{\text{med}} = \frac{3v_1 + v_2}{2v_2 + v_1} = 10 \text{ km/h.}$$

5. Os gráficos de movimento das lanchas que navegam simultaneamente estão representados pelas linhas quadradas MEH e AFD , onde E é o ponto de encontro das mesmas (Fig. 268). Uma vez que a velocidade das lanchas relativamente à água é igual, então ME e AF são linhas retas. Ambas as lanchas permanecerão no caminho um mesmo tempo, se elas encontrarem-se no meio da distância entre os ancoradouros. O ponto de encontro das mesmas E está localizado na interseção da linha KE com a perpendicular traçada do meio do segmento AM . Os gráficos do movimento das lanchas estão representados pelas linhas KOD e COB . Como se vê da figura, $\triangle MAF \cong \triangle ODE$, e, consequentemente, o tempo procurado é $MC = 15$ min.

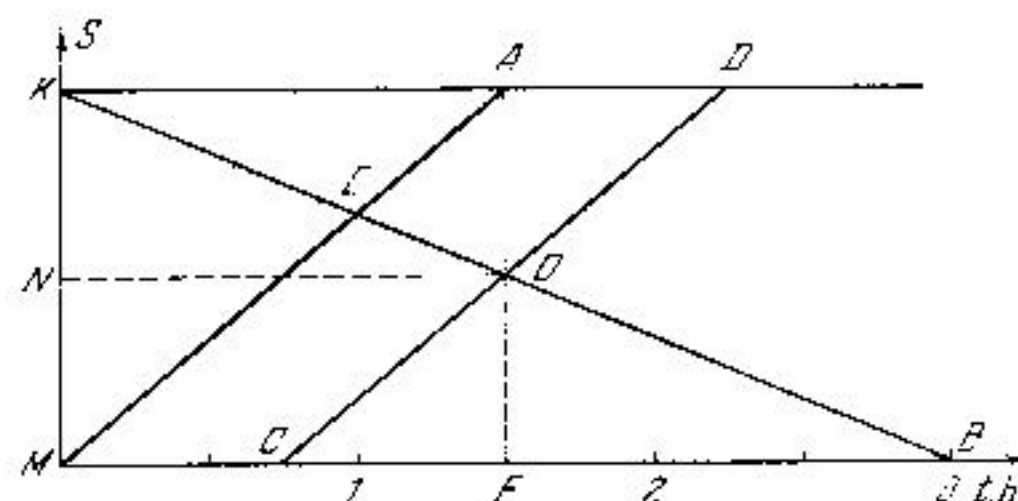


Fig. 268

6. A velocidade das lanchas relativamente à água é v_1 e a velocidade do rio é v_2 , sendo que ambas são determinadas pelas equações $S = t_1(v_1 + v_2)$ e $S = t_2(v_1 - v_2)$, onde t_1 e t_2 são os tempos de movimento das lanchas a favor e contra a corrente. Das condições do problema temos que $t_1 = 1,5$ h e $t_2 = 2$ h. Resolvendo o sistema de equações obtemos que:

$$v_1 = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = 5 \text{ km/h}$$

$$v_2 = \frac{S(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = 5 \text{ km/h.}$$

O local de encontro localiza-se a uma distância igual a 20 km do ancoradouro M .

7. Suponhamos, que as águas do rio percorram o trajeto de C até F com velocidade v_0 . Considerando, que o tempo de movimento do barco e da lancha é o mesmo, então podemos escrever a equação

$$\frac{S}{v_1 + v_0} = 2 \left(\frac{S}{v_2 + v_0} + \frac{S}{v_2 - v_0} \right),$$

onde S é a distância entre os ancoradouros. Da equação obtemos

$$v_0^2 - 4v_2v_0 - 4v_2v_1 - v_2^2 = 0.$$

Consequentemente,

$$v_0 = -2v_2 \pm \sqrt{5v_2^2 - 4v_1v_2} = -20 \pm 19,5 \text{ km/h.}$$

A solução $v_0 = -39,5$ km/h é necessário desprezar, uma vez que para esta velocidade do rio nem o barco nem a lancha podem navegar contra a corrente. Consequentemente, $v_0 = 0,5$ km/h, i.é., o rio corre do ancoradouro T ao ancoradouro C .

8. A distância R do extremo da sombra até o ponto O , que se encontra na terra sob a lanterna, está relacionada com a distância x do homem até o mesmo ponto pela relação $R = \frac{H}{H-h} x$. Consequentemente, a trajetória da sombra é semelhante à trajetória do homem (o centro de comparação encontra-se no ponto O). Por isso, o vetor



Fig. 269

velocidade do extremo da sombra v_s tem a mesma direção, que o vetor velocidade do homem v e é maior do que o mesmo em $\frac{H}{H-h}$ vezes (fig. 269).

9. Suponhamos que, no intervalo de tempo Δt , a primeira vela tenha queimado em uma grandeza Δh_1 e a segunda vela, em uma grandeza igual a Δh_2 (fig. 270). Então a sombra na parede esquerda

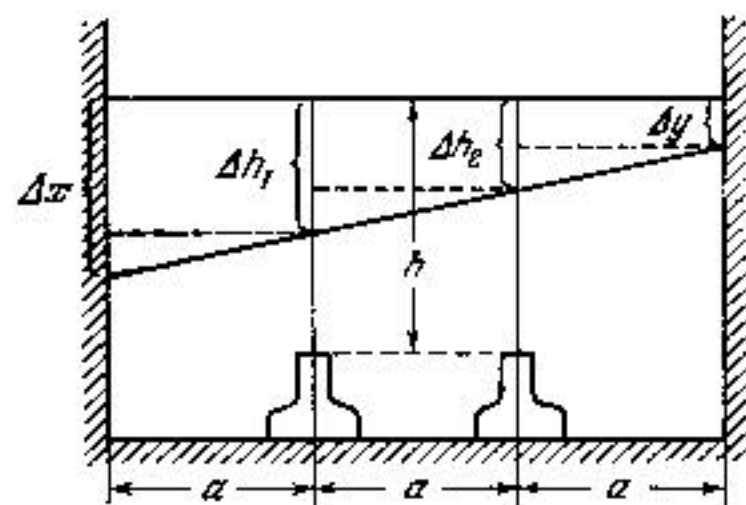


Fig. 270

(da primeira vela) abaixará na distância

$$\Delta x = \Delta h_1 \cdot \left(\frac{H}{H-h} \right) = 2\Delta h_1 - \Delta h_2.$$

A sombra na parede direita abaixará na distância

$$\Delta y = \Delta h_2 \cdot \left(\frac{H}{H-h} \right) = 2\Delta h_2 - \Delta h_1.$$

Considerando, que $\Delta h_1 = \frac{h}{t_1} \Delta t$, $\Delta h_2 = \frac{h}{t_2} \Delta t$, obtemos:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2h}{t_1} - \frac{h}{t_2} = \frac{h}{t_1 t_2} (2t_2 - t_1),$$

$$v_2 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2h}{t_2} - \frac{h}{t_1} = \frac{h}{t_1 t_2} (2t_1 - t_2).$$

Se $t_2 > t_1$, consequentemente $v_1 > 0$ e v_2 pode ser uma grandeza negativa, i.é., na parede direita a sombra pode deslocar-se para cima.

10. Uma vez que a velocidade do movimento na água é menor que a velocidade do movimento pela margem, então o trajeto AB não ocupará obrigatoriamente o menor tempo possível. Suponhamos, que a trajetória do movimento do homem seja representada pela linha quebrada ADB (fig. 271). É necessário deter-

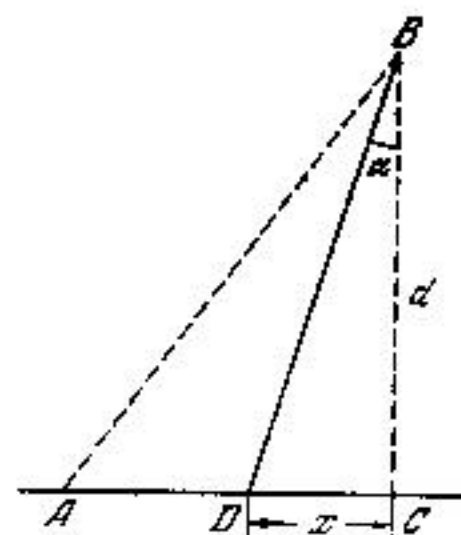


Fig. 271

minar, para qual valor de x o tempo será o mínimo possível. O tempo de movimento t é igual a:

$$t = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} + \frac{S-x}{v_2} = \frac{v_2 \sqrt{d^2 + x^2} - v_1 x + v_1 S}{v_1 v_2}.$$

Este tempo será mínimo, se $y = v_2 \sqrt{d^2 + x^2} - v_1 x$ tiver o menor valor. É evidente, que x , ao qual corresponde o tempo mínimo t , não depende da distância S .

Para determinarmos x , que corresponde ao valor mínimo de y , expressemos x através de y e obtemos uma equação do segundo grau:

$$x^2 - \frac{2yv_1}{v_2^2 - v_1^2} x + \frac{v_2^2 d^2 - y^2}{v_2^2 - v_1^2} = 0.$$

A solução da mesma conduz a seguinte expressão:

$$x = \frac{v_1 y \pm v_2 \sqrt{y^2 + d^2 v_1^2 - v_2^2 d^2}}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Uma vez que x não pode ser uma grandeza complexa, então, $y^2 + d^2 v_1^2 \geq v_2^2 d^2$. O mínimo valor de y será igual a $y_{\min} = d \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$.

A este valor de y corresponde o valor de $x = dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. Se $S \leq dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, então, é necessário nadar pela reta AB em direção ao ponto B . Em caso contrário é preciso correr pela margem a distância $AD = S - dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, e depois nadar em direção a B . Salientemos, que para o trajeto que corresponde ao menor tempo possível $\sin \alpha = v_1 / v_2$.

11. O ônibus encontra-se no ponto A e o homem, no ponto B (fig. 272). O ponto C é o local de encontro entre os dois, α é o ângulo entre

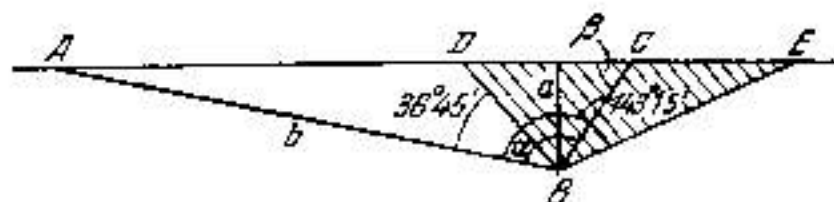


Fig. 272

a direção ao ônibus e a direção pela qual deverá correr o homem, $AC = v_1 t_1$, $BC = v_2 t_2$, onde t_1 e t_2 são os tempos de movimento do ônibus e do homem até o ponto C .

No $\triangle ABC$ vemos que $AC = b \sin \alpha / \sin \beta$, onde $\sin \beta = \sin \angle ABC$. Consequentemente, $\sin \alpha = \frac{a v_1 t_1}{b v_2 t_2}$. Segundo as con-

dições do problema $t_1 \geq t_2$, por isso $\sin \alpha \geq av_1/bv_2 = 0,8$. Donde obtemos que: $36^\circ 45' \leq \alpha \leq 143^\circ 15'$.

As direções pelas quais pode movimentar-se o homem, encerram-se nos limites do ângulo DBE . Pelo movimento ao longo de BD , ou BE o homem atingirá a estrada juntamente com o ônibus. Qualquer ponto da estrada que se encontra entre os pontos D e E , o homem atingirá antes da chegada do ônibus.

12. A menor velocidade possível pode ser determinada das seguintes condições: $t_1 = t_2$, $\sin \alpha = av_1/bv_2 = 1$. Dessas igualdades, obtemos que $v_2 = \left(\frac{a}{b}\right) v_1 = 2,4$ m/s, sendo $\alpha = 90^\circ$. Consequentemente, a direção na qual deverá correr o homem é perpendicular à direção do ônibus.

13. Um ponto arbitrário D da autoestrada, o ônibus atinge em um tempo $t = l/v_1$, onde l é o comprimento do trajeto AD da autoestrada. Nesse mesmo ponto em um intervalo de tempo igual, ou menor do que t , o homem poderá chegar caso ele se encontre nos limites do círculo de raio $r = v_2 t$ e o centro no ponto D . Desenhando círculos semelhantes para outros pontos, localizados na autoestrada, obtemos a região procurada. Os limites da mesma são duas tangentes comuns aos círculos. O ângulo α , que os limites formam com a autoestrada, determina-se pela igualdade $\sin \alpha = r/l = v_2/v_1$ (fig. 273).

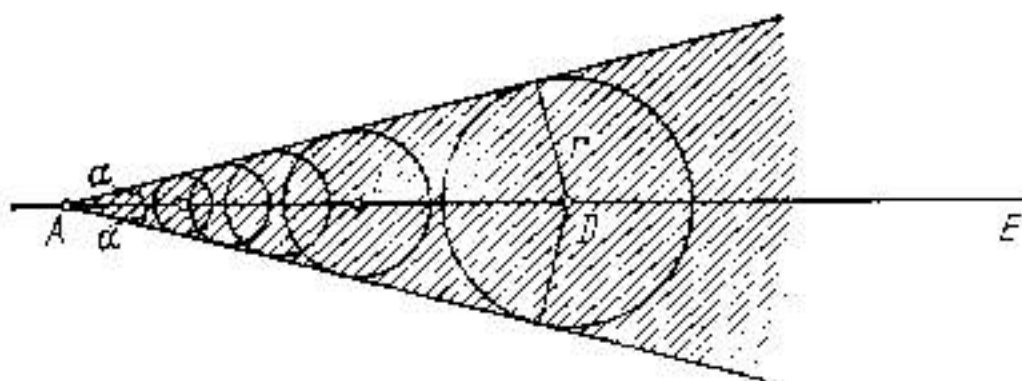


Fig. 273

14. A velocidade da lancha v , relativamente à margem, está dirigida para AB (fig. 274). É evidente, que $v = v_0 + u$. São conhecidas a direção do vetor v , assim como a grandeza e a direção do vetor v_0 . O vetor u terá o valor mínimo, como se vê na figura para $u \perp v$. Consequentemente,

$$u_{\min} = v_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2}.$$

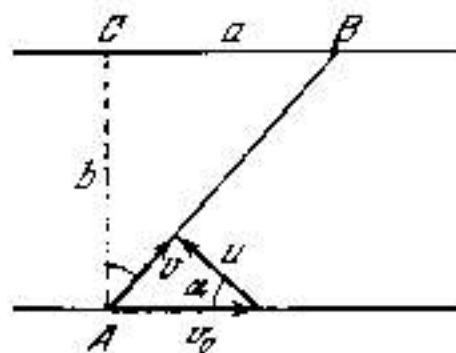


Fig. 274

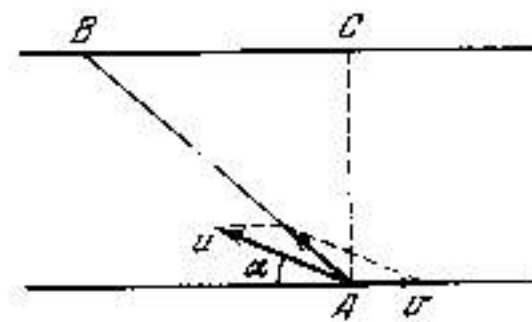


Fig. 275

15. Suponhamos, que a velocidade u esteja dirigida sob um ângulo α com relação à margem (fig. 275). Então, temos que:

$$(u \cos \alpha - v) \tau = BC = a, \quad (u \sin \alpha) \tau = AC = b,$$

onde τ é o tempo de movimento da lancha. Excluindo α dessas equações, obtemos a seguinte equação:

$$(u^2 - v^2) \tau^2 - 2v\alpha\tau - (a^2 + b^2) = 0.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $\tau = 15/21$ horas. Consequentemente, é impossível percorrer a distância AB em 30 minutos.

16. Seja u_0 a velocidade do vento relativamente à lancha. Então a bandeira na lancha está orientada ao longo de u_0 . Se v é a velocidade da lancha em relação à margem, então, temos que $u = u_0 + v$ (fig. 276). No $\triangle FCD$ $\angle DCF = \beta + \alpha - \pi/2$ e $\angle FDC =$

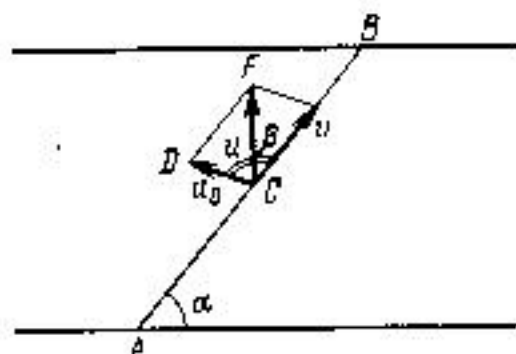


Fig. 276

$\pi - \beta$. Segundo o teorema dos senos, temos que:

$$\frac{v}{\sin(\alpha + \beta - \pi/2)} = \frac{u}{\sin(\pi - \beta)}.$$

Dessa igualdade, obtemos $v = u \frac{\sin(\alpha + \beta - \pi/2)}{\sin(\pi - \beta)}$. Determinar a velocidade da corrente do rio, através da velocidade conhecida da lancha relativamente à margem, é impossível, uma vez que desconhecemos a direção da lancha em movimento relativamente à água.

17. Introduzamos as simbolizações seguintes: u_{12} é a velocidade do segundo automóvel relativamente ao primeiro, u_{21} é a velocidade do primeiro automóvel relativamente ao segundo. É evidente, que: $u_{12} = -u_{21}$ e $u_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha$ (fig. 277). O tempo procurado é $t = S/u_{12}$.
18. Tomemos o momento de passagem pelo cruzamento do primeiro automóvel como início da contagem do tempo. No sistema de coordenadas, representado na fig. 278, o movimento dos automóveis é descrito pelas equações:

$$x_1 = -(v_1 \cos \alpha) t, \quad y_1 = (v_1 \sin \alpha) t,$$

$$x_2 = -v_2 t + v_2 t, \quad y_2 = 0.$$

A distância entre os automóveis em qualquer momento de tempo é igual a:

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Substituindo nessa equação os valores de x e y , obtemos que:

$$S^2 = (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha) t^2 - 2v_2(v_1 \cos \alpha - v_2) t + v_2^2 t^2.$$

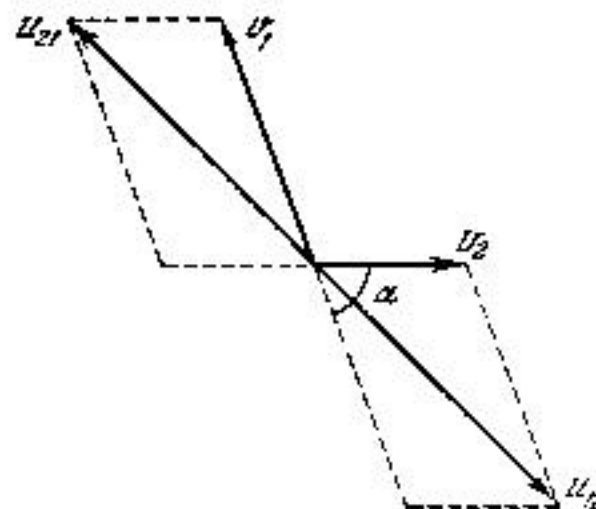


Fig. 277

Encontrando o mínimo do trinômio quadrado, obteremos a menor distância, que é igual a:

$$S_{\min} = \frac{v_1 v_2}{u_{12}} t \sin \alpha$$

(ver a solução do problema 17).

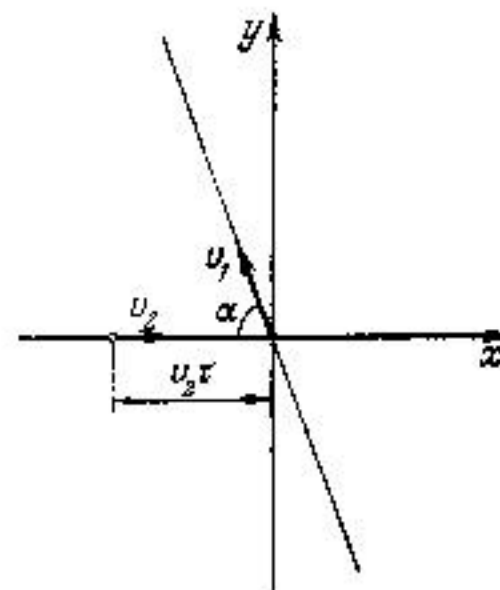


Fig. 278

19. No intervalo de tempo Δt , a reta AB deslocar-se-á em uma distância igual a $v_1 \Delta t$, a reta CD , em uma distância igual a $v_2 \Delta t$. Em virtude disso, o ponto de intersecção das retas passará para o ponto O' (fig. 279). O deslocamento OO' do ponto de intersecção

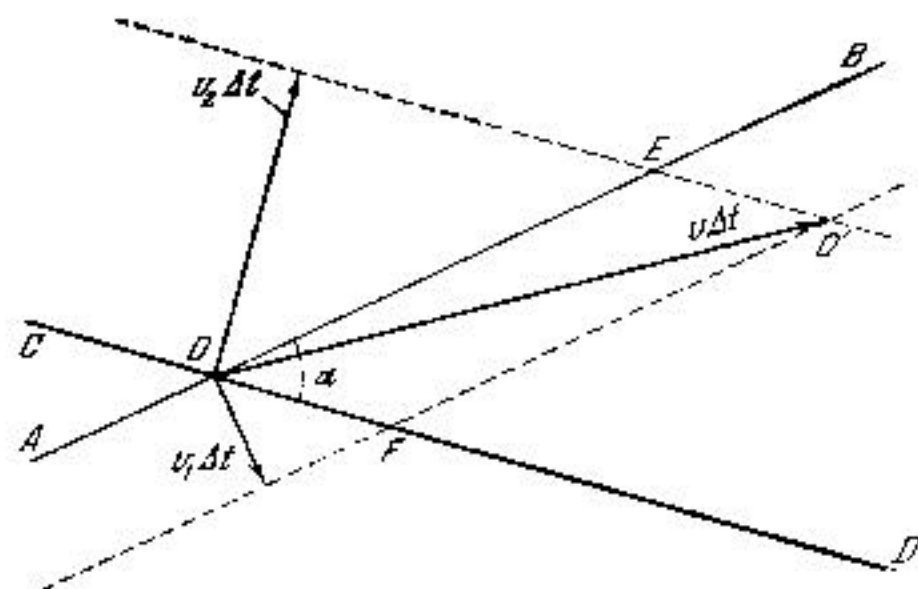


Fig. 279

das retas é obtido do triângulo $OO'O'$ ou $OE'O'$, onde $OE' = v_1 \Delta t \sin \alpha = EO'$, $OE = v_2 \Delta t \sin \alpha = FO'$:

$$OO' = \sqrt{OE^2 + OF^2 + 2OE \cdot OF \cos \alpha} = v \Delta t,$$

donde obtemos que:

$$v = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha}.$$

§ 2. CINEMATICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO NÃO UNIFORME E UNIFORMEMENTE VARIADO

20. Seja S , o caminho percorrido pelo ponto em 5 s, numericamente igual à área encerrada entre a linha quebrada $Oabca$ e o eixo do tempo (fig. 280): $S_1 = 10,5$ cm. A velocidade média de movimento do ponto em 5 s é igual a $v_1 = S_1/t_1 = 2,1$ cm/s. A aceleração média do ponto, nesse mesmo intervalo de tempo, é igual a $a_1 = \Delta v/t_1 = 0,8$ cm/s². O caminho percorrido em 10 s é igual a $S_2 = 25$ cm. Consequentemente, a velocidade média e a aceleração média são iguais a: $v_2 = S_2/t_2 = 2,5$ cm/s e $a_2 = 0,2$ cm/s².

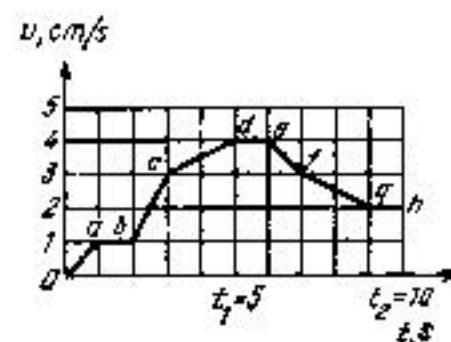


Fig. 280

21. Em um pequeno intervalo de tempo Δt , a proa do barco desloca-se do ponto A ao ponto B (fig. 281), $AB = v_1 \Delta t$, onde v_1 é a velocidade do barco. Nesse mesmo intervalo de tempo recolher-se-á

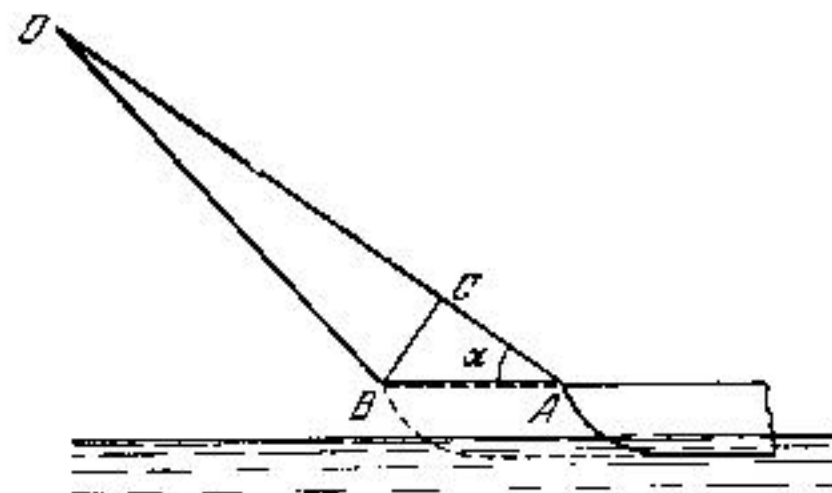


Fig. 281

um pedaço da corda $OA - OB = v_1 \Delta t$. O $\angle ABC$ pode ser considerado retângulo, uma vez que $AC \ll OA$. Consequentemente, $v_2 = v_1 \cos \alpha$.

22. Suponhamos, que no momento inicial do tempo $t = 0$, o objeto encontrava-se no ponto S (fig. 282) e no momento de tempo igual a t encontrava-se em CD . Da semelhança dos $\triangle SCD$ e $\triangle SBA$ obtemos a igualdade $AB = h'SD = h'v_1 t$. A velocidade do ponto B , no momento de tempo dado, será igual a $v_2 = BB'/\Delta t$, sendo que no tempo Δt , em que o extremo da sombra desloca-se a uma distância igual a BB' , tende a zero. Assim temos que:

$$BB' = AB - AB' = \frac{h'l}{v_1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + \Delta t} \right) = \frac{h'l \Delta t}{t(t + \Delta t)},$$

então, $v_2 = \frac{h'l}{v_1 t(t + \Delta t)}$, ou considerando $\Delta t \ll t$, obtemos que:

$$v_2 = \frac{h'l}{v_1 t^2}.$$

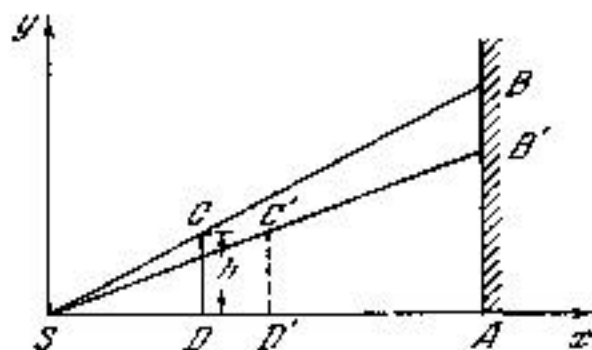


Fig. 282

23. Para o movimento uniformemente acelerado temos: $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$. Consequentemente, $v_0 = 35 \text{ cm/s}$, $a = 82 \text{ cm/s}^2$ e $x_0 = 11 \text{ cm}$, onde x_0 é a coordenada inicial do ponto.

24. $a = \frac{2}{t_3 - t_1} \left(\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_2} - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) = 5 \text{ cm/s}^2$.

25. Do gráfico da velocidade (ver a fig. 8) deduz-se que a velocidade inicial $v_0 = 4 \text{ cm/s}$ ($OA = 4 \text{ cm/s}$). A aceleração $a = OA/OB = 1 \text{ cm/s}^2$. Inicialmente a velocidade do corpo diminui. No momento $t_1 = 4 \text{ s}$ a velocidade do corpo é igual a zero e depois aumenta em grandeza. O segundo gráfico (ver a fig. 9) representa um movimento uniformemente variado. O corpo percorre até parar uma distância igual a $h = 10 \text{ cm}$. Segundo o gráfico anterior, o caminho percorrido até a parada é numericamente igual à área do $\triangle OAB$, sendo igual a 8 cm . Consequentemente, os gráficos representam diferentes movimentos. Ao segundo gráfico corresponde uma outra velocidade inicial $v'_0 = 2h/t_1 = 5 \text{ cm/s}$ e uma outra aceleração $a' = 2h/t_1^2 = 1,25 \text{ cm/s}^2$.
26. O gráfico do movimento do segundo automóvel tem a forma de uma parábola, representada na fig. 283. É evidente, que a velocidade do primeiro automóvel não pode ser excessivamente grande, pois nesse caso a ultrapassagem ocorreria só uma vez (o ponto B na fig. 283, já que o ponto A corresponde ao encontro dos automóveis). A velocidade também não pode ser excessivamente pequena (a reta OC na fig. 283), uma vez que em caso contrário os automóveis jamais passarão um ao lado do outro. Deste modo, a equação que expressa a igualdade das coordenadas dos automóveis: $v_1 t = l - v_0 t + at^2/2$, deverá ter duas soluções reais, a fim de que ambas correspondam a momentos ulteriores de tempo, do que o momento de parada (instantânea) do segundo automóvel determinada pela igualdade $-v_0 - at = 0$. De ambas as condições obtemos:

$$\sqrt{2al} - v_0 < v_1 < \frac{al}{v_0} - \frac{v_0}{2},$$

ou $8 \text{ m/s} < v_1 < 9 \text{ m/s}$.

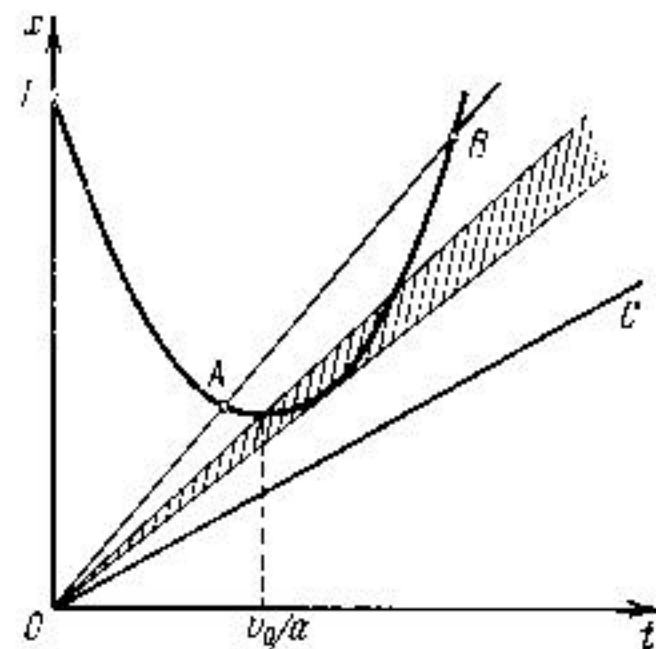


Fig. 283

27. A maior velocidade da esfera, ao tocar o apoio, será igual a $v_{\text{max}} = \sqrt{2gH}$. Ao chocar-se, a esfera terá sua velocidade orientada em sentido contrário, permanecendo invariável em grandeza absoluta. O gráfico da velocidade está representado na fig. 284, a.

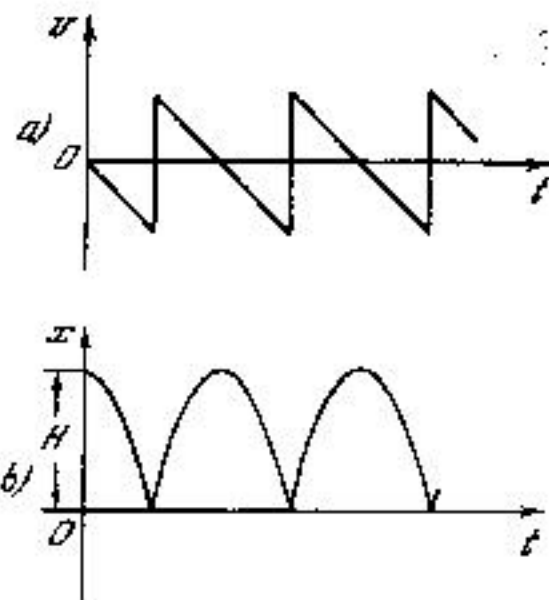


Fig. 284

Na fig. 284, b representa-se a variação da coordenada em função do tempo.

28. O tempo de queda da primeira esfera é $t_1 = \sqrt{2h_1/g} = 0,3$ s. A relação das velocidades máximas das esferas é $v_2/v_1 = \sqrt{h_2/h_1} = 1/2$.

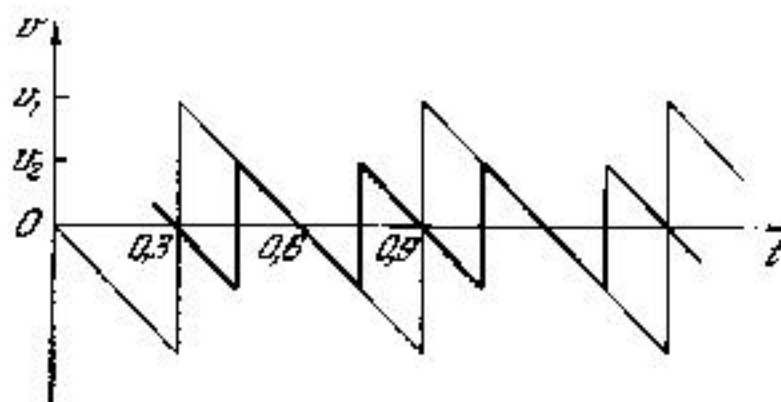


Fig. 285

Como se deduz do gráfico das velocidades (fig. 285), o tempo mínimo é $\tau = 0,3$ s. Além disso, a segunda esfera pode iniciar a queda decorridos 0,6; 0,9; 1,2 s, etc., após o início da queda da primeira esfera. O tempo t , no decorrer do qual as velocidades de ambas as esferas coincidem é igual a 0,3 s. O processo periodicamente repete-se depois de 0,6 s.

29. As equações básicas são as seguintes:

$$gt^2/2 = n, \quad g(t - \tau)^2/2 = n - 1,$$

onde τ é o tempo de movimento do corpo no n -ésimo centímetro do trajeto. Donde obtemos que:

$$t = \sqrt{\frac{2n}{g}}, \quad t - \tau = \sqrt{\frac{2(n-1)}{g}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

30. Simbolizando por x_1 e v_1 a coordenada e a velocidade do primeiro corpo relativamente à torre e por x_2 e v_2 , a coordenada e a velocidade do segundo, podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t - gt^2/2, & v_1 &= v_0 - gt, \\ x_2 &= -v_0(t - \tau) - g(t - \tau)^2/2, & v_2 &= -v_0 - g(t - \tau). \end{aligned}$$

(Aqui consideramos como positiva a direção para cima). A velocidade do primeiro corpo, relativamente ao segundo, é igual a $u = v_1 - v_2 = 2v_0 - g\tau$ e não varia com o decorrer do tempo. A distância entre os corpos é igual a

$$S = x_1 - x_2 = (2v_0 - g\tau)t - v_0\tau + g\tau^2/2.$$

Um corpo relativamente ao outro movimenta-se uniformemente e, conseqüentemente, a distância entre os mesmos varia linearmente com o tempo.

31. Segundo as condições do problema $AA' = vt$, $CC' = at^2/2$ (fig. 286). Da semelhança dos triângulos $AA'O$, $BB'O$ e $CC'O$,

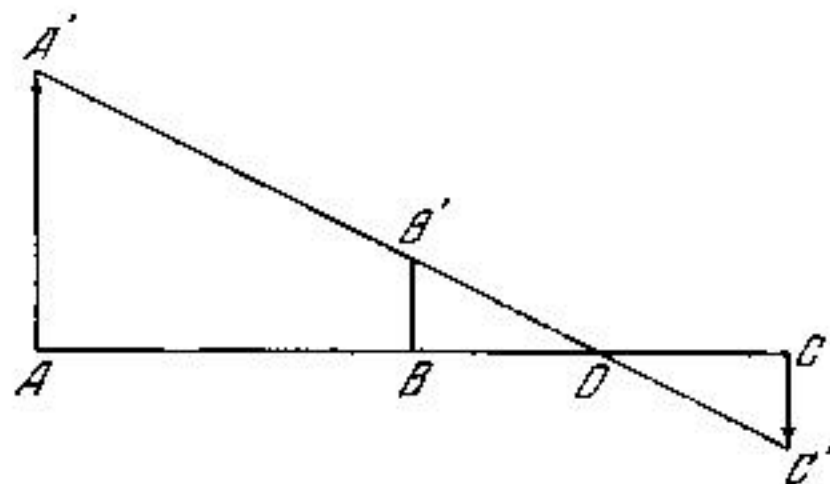


Fig. 286

temos que:

$$AA'/AO = BB'/BO = CC'/CO.$$

Como vê-se na fig. 286, $AO = AB + BO$, $CO = BC - BO$. Estas relações permitem determinar que:

$$BB' = \frac{(AA' - CC')}{2} = \frac{vt}{2} - \frac{at^2}{4}.$$

Conseqüentemente, o ponto B movimenta-se com velocidade inicial $v/2$, dirigida para cima e com aceleração constante $a/2$, dirigida para baixo. Atingindo uma altura igual a $h = v^2/4a$, o ponto mover-se-á para baixo.

32. A grandeza da aceleração do livro, relativamente ao chão do elevador, não depende da direção do movimento do elevador (direção da velocidade do mesmo), mas sim, da direção da aceleração do elevador. Se a aceleração do elevador está dirigida para cima, então a aceleração do livro será igual a $g + a$. Se a aceleração do mesmo está dirigida para baixo, então a aceleração do livro será igual a $g - a$.
33. No momento de encontro dos três automóveis, os dois primeiros têm uma velocidade única igual a v_2 , relativamente ao terceiro, que se movimenta uniformemente. Relativamente à estrada as velocidades dos automóveis são iguais a $(v_2 + v_1)$ e $(v_2 - v_1)$. Por isso, a parada (instantânea) de um dos automóveis ocorrerá após o primeiro encontro, depois do intervalo de tempo igual a $(v_2 + v_1)/a$ e a segunda, depois do intervalo de tempo igual a $(v_2 - v_1)/a$. A parada de um dos automóveis atrasa tanto, quanto a sua partida. Conseqüentemente, o tempo de atraso procurado é igual a:

$$t = \frac{(v_1 + v_2)}{a} + \frac{(v_2 - v_1)}{a} = \frac{2v_1}{a}.$$

34. Se a velocidade do elevador não variar, então a esfera saltará a uma altura H . No sistema de coordenadas, que tem uma velocidade constante, igual à velocidade do elevador, no momento em que a esfera começa a cair, o elevador eleva-se a uma altura $h_1 = a\tau^2/2$ em um intervalo de tempo τ e, em seguida, também num intervalo de tempo igual a τ , eleva-se ainda a uma altura $h_2 = a\tau^2 \dots a\tau^2/2$. A altura total de ascensão é $h = h_1 + h_2 = a\tau^2$. A altura procurada, na qual salta a esfera sobre o chão do elevador é igual a: $x = H - h = H - a\tau^2$.
35. No intervalo de tempo t de queda livre, o corpo A percorrerá pela vertical o trajeto $S_1 = gt^2/2$. No mesmo intervalo de tempo, a cunha deverá deslocar-se em uma distância igual a $S_2 = a\tau^2/2$.

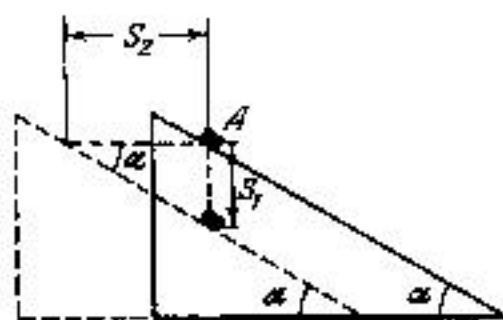


Fig. 287

Se o corpo todo tempo toca a cunha, então, é evidente (ver a fig. 287) que: $S_1/S_2 = \operatorname{ctg} \alpha$. Consequentemente, a aceleração procurada é $a = g \operatorname{ctg} \alpha$. Se a aceleração da cunha na direção horizontal for maior que $g \operatorname{ctg} \alpha$, então o corpo será lançado fora da cunha.

§ 3. CINEMATICA DO MOVIMENTO CURVILÍNEO

36. A aceleração total da esfera, em qualquer ponto da trajetória, é igual a g (aceleração de queda livre). A aceleração normal é $a_n = g \sin \alpha$, onde α é o ângulo formado pela tangente à trajetória com a vertical. A aceleração tangencial é $a_\tau = g \cos \alpha$. Das relações geométricas simples, pode-se obter que:

$$\sin \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{g\tau}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}},$$

e, consequentemente:

$$a_n = g \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}, \quad a_\tau = g \frac{g\tau}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}.$$

37. O movimento do corpo pode ser analisado como a superposição do movimento pelo círculo de raio R em um plano horizontal e de queda pela vertical. Assim, a velocidade v do corpo, em

um dado momento, pode ser considerada como a soma geométrica de duas velocidades componentes: $v_1 = v \cos \alpha$, que está dirigida horizontalmente e $v_2 = v \sin \alpha$, que está dirigida verticalmente (fig. 288). O ângulo α é o ângulo formado pelo filete do parafuso com a horizontal.

A aceleração do corpo no movimento curvilíneo é igual à soma geométrica das acelerações tangencial e normal. A aceleração normal correspondente ao movimento pelo círculo é $a_{1n} = v_1^2/R =$

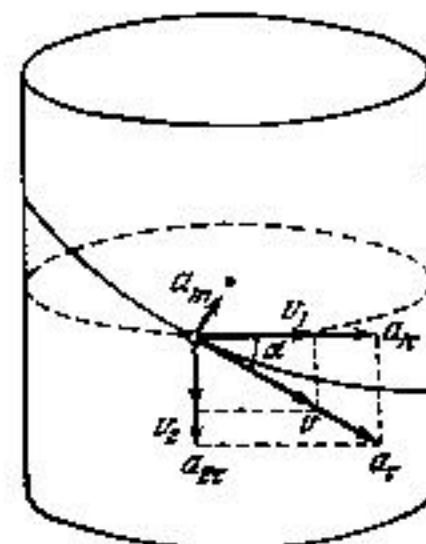


Fig. 288

$= v^2 \cos^2 \alpha / R$. O movimento pela vertical é retilíneo, por isso $a_{2n} = 0$.

A aceleração procurada é $a = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{2\tau}^2 + a_{1n}^2}$, onde $a_{1\tau}$ e $a_{2\tau}$ são as acelerações tangenciais correspondentes ao movimento circular e ao longo da vertical. A aceleração tangencial total, evidentemente, é igual a $a_\tau = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{2\tau}^2}$. Podemos encontrá-la girando mentalmente no plano a superfície do cilindro, no qual está rosqueado o filete do parafuso. Nesse processo, o filete transforma-se em um plano inclinado com altura nh , tendo como comprimento da base $2\pi Rn$. É evidente, que $a_\tau = g \sin \alpha = g h / \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$.

Para a determinação de a_{1n} , encontramos v , partindo da lei da conservação da energia: $mv^2/2 = mghn$. Consequentemente, $v^2 = 2ghn$ e $a_{1n} = 8\pi^2 nhgR / (h^2 + 4\pi^2 R^2)$. Substituindo as acelerações encontradas a_τ e a_{1n} na expressão para a aceleração procurada, obtemos:

$$a = \frac{gh \sqrt{(h^2 + 4\pi^2 R^2 + 64\pi^4 n^2 R^2)}}{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

38. Adotemos como início do sistema de coordenadas o ponto A, ponto de partida do barco. A direção dos eixos está indicada

na fig. 289. O movimento do barco em direção perpendicular à corrente tem velocidade constante v . Por isso, o barco encontrará-se a uma distância y da margem, decorrido o tempo $t = y/v$ após o início do movimento. Analisemos o movimento do barco até o meio do rio ($y \leq c/2$). A uma distância y da margem a velocidade da corrente será $v = \frac{2v_0}{c} y$.

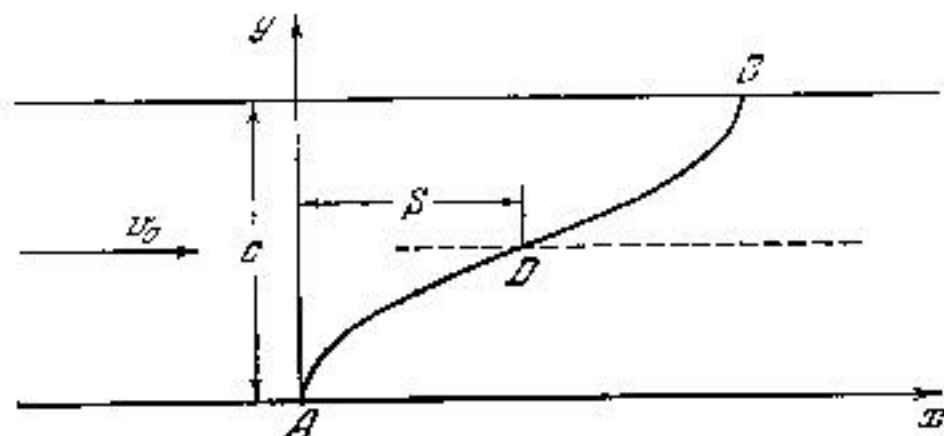


Fig. 289

Substituindo $y = vt$ na expressão da velocidade da corrente, obtemos que: $v = 2v_0 y/c$. De última relação, deduz-se que o movimento do barco na direção paralela às margens, será feito com aceleração constante $a = 2v_0 v/c$. O barco atingirá o meio do rio no tempo $T = c/2v$. Nesse mesmo intervalo de tempo, o barco será levado para baixo, pela corrente, a uma distância $S = aT^2/2 = v_0 c/4v$. No movimento desde o meio do rio (ponto D) até a margem oposta, o barco será levado, pela corrente, a uma distância adicional S . Desta modo, a distância procurada será igual a $v_0 c/2v$. No movimento do barco até o meio do rio temos: $x = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 v}{c} t^2$ e $y = vt$. Dessas relações determinamos a trajetória do barco desde o ponto A até D: $y^2 = \frac{cv}{v_0} x$ (tem a forma de uma parábola). A segunda metade da trajetória (DB) terá o mesmo caráter que a primeira.

39. A lei de movimento da carreta A é $y = vt$. A lei de movimento da carreta B é $x = \sqrt{l^2 - v^2 t^2}$. O movimento da carreta B ao longo do trilho horizontal, pode ser representado como a soma de dois movimentos independentes: um movimento verticalmente para cima com velocidade v e um movimento de rotação em redor do ponto A, com uma velocidade qualquer ω ($\omega \perp l$). Através de transformações geométricas simples deduzimos que: $\frac{u}{vt} = \frac{v}{x}$, onde x é a distância da carreta B até a origem das coordenadas. Daqui obtemos, então, que $u = -v^2 t / \sqrt{l^2 - v^2 t^2}$.

40. Relativamente ao sistema de coordenadas representado na fig. 290, as coordenadas e as velocidades do corpo em qualquer momento de tempo são determinadas pelas seguintes expressões:

$$x = v_{0x} t, \quad (1) \quad v_x = v_{0x}, \quad (3)$$

$$y = v_{0y} t - gt^2/2, \quad (2) \quad v_y = v_{0y} - gt. \quad (4)$$

Nessas expressões temos que $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ e $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ são, respectivamente, as projeções da velocidade inicial nos eixos x e y .

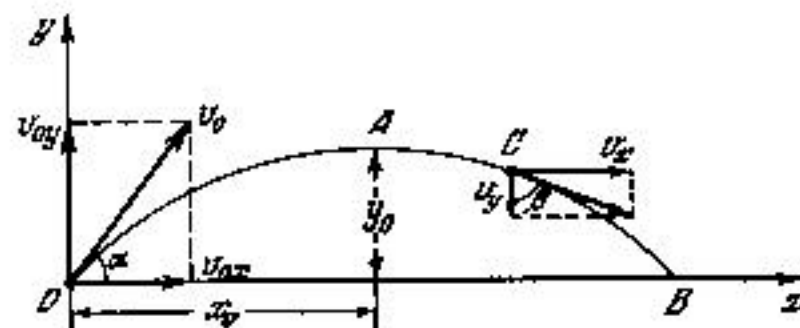


Fig. 290

As equações (1), (2), (3) e (4) permitem responder a todas as perguntas feitas nas condições do problema.

O tempo de voo T determina-se pela equação (2). Para $y=0$, temos que $(v_0 \sin \alpha) T - gT^2/2 = 0$, donde $T = 2v_0 \sin \alpha / g$. A distância do voo é $L = (v_0 \cos \alpha) T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. O valor máximo de L obtem-se para $\alpha = 45^\circ$. Nesse caso temos $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

A altura na qual encontrar-se-á o corpo, depois de um tempo τ , é $h = (v_0 \sin \alpha) \tau - g\tau^2/2$. A velocidade do corpo no instante de tempo τ é $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, onde $v_x = v_0 \cos \alpha$ e $v_y = v_0 \sin \alpha - g\tau$. Obtem-se, então, que a velocidade é $v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + g^2 \tau^2 - 2v_0 g \tau \sin \alpha}$. A mesma forma com a vertical um ângulo β , que é determinado pela igualdade $\lg \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{(v_0 \sin \alpha - g\tau)}$.

41. As coordenadas do corpo x e y variam com o tempo, segundo a lei:

$$y = (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2, \quad x = (v_0 \cos \alpha) t.$$

Excluindo dessas expressões o tempo, obtemos a seguinte equação:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tg \alpha) x.$$

Esta é a equação de uma parábola. Simbolizando através de x_0 e y_0 as coordenadas do vértice da parábola (ponto A na fig. 290), podemos escrever a equação da trajetória da seguinte forma: $y - y_0 = k(x - x_0)^2$, onde:

$$k = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

42. A trajetória da bola passa pelo ponto com coordenadas H e S . Em virtude disso (ver o problema 41): $H = -gS^2/2v_0^2 \cos^2 \alpha + S \operatorname{tg} \alpha$. Dessa expressão obtemos: $v_0^2 = gS^2/2 \cos^2 \alpha (S \operatorname{tg} \alpha - H) = gS^2/(S \operatorname{sen} 2\alpha - H \cos 2\alpha - H) = gS^2/[\sqrt{S^2 + H^2} \operatorname{sen} (2\alpha - \varphi) - H]$, onde $\operatorname{tg} \varphi = H/S$. O menor valor de v_0 , obtem-se para $\alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$ e é:

$$v_0 = \sqrt{gS^2/(\sqrt{S^2 + H^2} - H)} = \sqrt{g(\sqrt{S^2 + H^2} + H)}.$$

43. (Fig. 291).

$$\begin{aligned} (v_0 \cos \alpha) t &= D/2, \quad (v_0 \operatorname{sen} \alpha) t - gt^2/2 = H, \\ t &= \frac{D}{2v_0 \cos \alpha} + \frac{D}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{gD^2}{8v_0^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = H, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{4v_0^2}{gD} \operatorname{tg} \alpha + \left(\frac{8Hv_0^2}{gD} + 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Conhecendo-se D , na última equação obtemos dois valores para α , que correspondam às trajetórias curva e reta, ou dois valores iguais (em um caso crítico), ou nenhum (o estilhaço não atinge

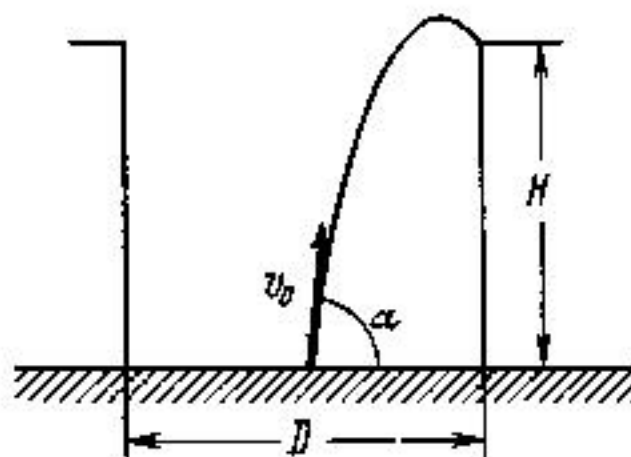


Fig. 291

a borda do poço). Consequentemente, o poço deve ser tal, que esta equação não tenha soluções:

$$\left(\frac{4v_0^2}{gD} \right)^2 \leq 4 \left(\frac{8Hv_0^2}{gD} + 1 \right), \quad D^2 \geq \frac{4v_0^2}{g^2} (v_0^2 - 2gH).$$

Dessas expressões, deduz-se que se $v_0 < \sqrt{2gH}$, então D pode ter qualquer valor; se $v_0 \geq \sqrt{2gH}$, então

$$D \geq \frac{2v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gH} \quad \text{e} \quad D_{\min} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

44. As coordenadas e as velocidades do corpo em qualquer momento de tempo relativamente ao sistema de coordenadas, representado

na fig. 292, determinam-se pelas mesmas equações, utilizadas no problema 41. No instante de queda na água a coordenada

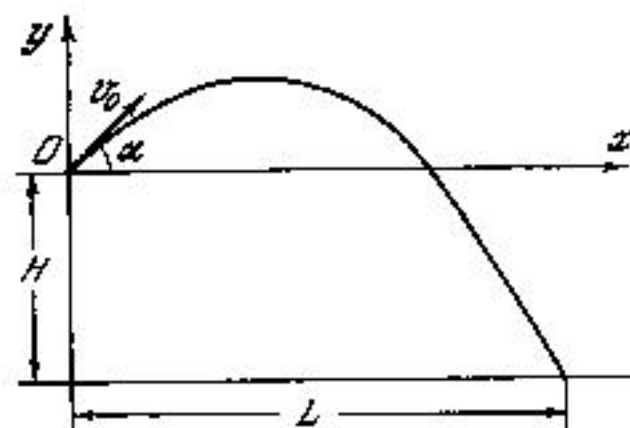


Fig. 292

do corpo é $y = -H$. Por isso, o tempo de voo T determina-se pela equação:

$$-H = (v_0 \operatorname{sen} \alpha) T - gT^2/2.$$

Dessa expressão, obtemos que:

$$T = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gH}}{g}.$$

Como $T > 0$, é necessário tomar o sinal positivo. A distância da margem é:

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{2g} + \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gH}.$$

O tempo necessário, para que o corpo atinja uma altura h sobre a água, é:

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2g(H-h)}}{g}.$$

Se $|h| < |H|$, então existe sentido físico somente para o sinal positivo. Para $h \geq H$ existe sentido físico para ambas as soluções. O corpo no tempo de queda estará duas vezes a uma mesma altura sobre a água.

A velocidade final v é mais fácil de ser encontrada com a ajuda da lei de conservação da energia:

$$mv_0^2/2 + mgH = mv^2/2.$$

Dessa equação obtemos que:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

45. No sistema de coordenadas, representado na fig. 293, as coordenadas da pedra em qualquer instante de tempo, determinam-se

pelas seguintes equações:

$$x = (v_0 \cos \alpha) t, \quad y = h_0 + (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2.$$

No momento de queda da pedra $y = 0$ e $x = S$, onde S é a distância de voo da pedra. Resolvendo estas equações relativamente

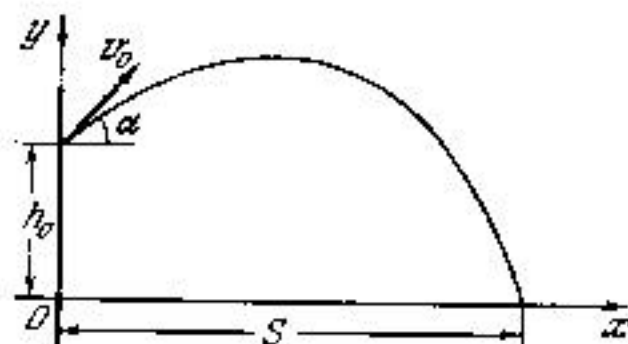


Fig. 293

ao ângulo α , obtemos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gS} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh_0}{v_0^2} - \frac{g^2 S^2}{v_0^4}} \right).$$

Esta expressão tem sentido somente para

$$1 + \frac{2gh_0}{v_0^2} - \frac{g^2 S^2}{v_0^4} \geq 0.$$

Dai, obtemos que: $S \leq v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}/g$ e, consequentemente, $S_{\max} = v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}/g$. Para valores menores de S a cada valor de S correspondem dois valores do ângulo α , cuja diferença é menor, quanto mais próximos forem os valores de S ao valor máximo do mesmo. Para a distância máxima de voo, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gS_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

46. O movimento do corpo é descrito pelas equações:

$$h + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \text{e} \quad (v_0 \cos \alpha) t = S.$$

Donde temos:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{gS^2}{2 \cos \alpha (h + S \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{gS^2}{2} \frac{1}{h \cos^2 \alpha + S \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= gS^2 \frac{1}{h (2 \cos^2 \alpha - 1) + S \sin 2\alpha + h} = \\ &= gS^2 \frac{1}{h + (h \cos 2\alpha + S \sin 2\alpha)} = \frac{gS^2}{h + \sqrt{h^2 + S^2} \cos (2\alpha - \varphi)} \end{aligned}$$

onde φ é um ângulo qualquer. Consequentemente, temos:

$$v_0 \sin \alpha = S \sqrt{\frac{g}{h + \sqrt{h^2 + S^2}}} = \sqrt{g (\sqrt{h^2 + S^2} - h)}.$$

47. Em qualquer instante de tempo, o tubo forma com a horizontal um ângulo β , tal que $\operatorname{tg} \beta = y/x$, onde

$$y = (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2, \quad x = (v_0 \cos \alpha) t$$

(são as coordenadas do objeto). O vetor da velocidade do objeto forma com a horizontal um ângulo φ , sendo que: $\operatorname{tg} \varphi = (v_0 \sin \alpha - gt)/(v_0 \cos \alpha)$. Pelas condições do problema: $\beta = \varphi = \pi/2$. Utilizando a fórmula $\operatorname{tg} (\beta - \varphi) = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi)/(1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi)$, obtemos a equação $gt^2 - 3g(v_0 \sin \alpha) t + 2v_0^2 \sin^2 \alpha = 0$. Resolvendo esta equação, temos:

$$t = \frac{v_0}{2g} [3 \sin \alpha \pm \sqrt{4 - 9 \cos^2 \alpha}].$$

Esta expressão tem sentido somente para $\cos \alpha \leq 1/3$, (obtem-se da mesma dois diferentes, ou iguais valores reais de t).

48. O trajeto S , percorrido pela bomba na direção horizontal, é $S = \sqrt{L^2 - H^2} = (v \cos \alpha) t$, onde t é o tempo de queda da bomba. O trajeto percorrido na vertical é $H = (v \sin \alpha) t - gt^2/2$

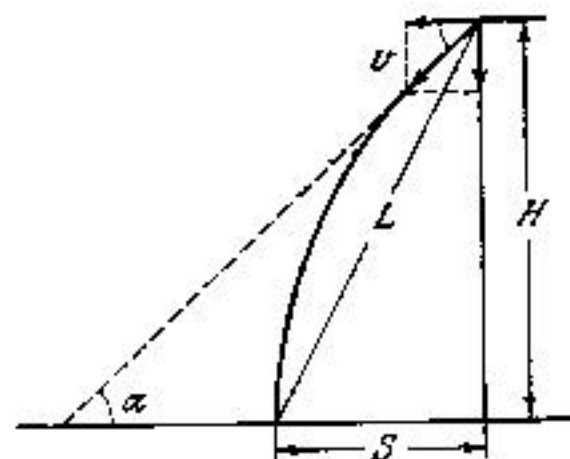


Fig. 294

(fig. 294). Excluindo o tempo dessas equações, obtemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v^2}{gS} \pm \sqrt{\left(\frac{v^2}{gS}\right)^2 + \frac{2Hv^2}{gS^2} - 1}.$$

Somente a solução com sinal positivo tem sentido físico. O sinal negativo corresponde a $\alpha < 0$, i. é., no caso da bomba ser lançada, quando o avião estiver voando para cima.

49. A solução do problema simplifica-se sensivelmente, caso eixos das coordenadas estejam dirigidos ao longo do plano inclinado

o perpendicularmente ao mesmo (fig. 295). Nesse caso, as projeções da aceleração da bola nos eixos x e y serão iguais, correspondentemente, a $a_x = g_x = g \sin \alpha$ e $a_y = g_y = -g \cos \alpha$. A velocidade da bola, no instante do primeiro choque com o plano inclinado, será $v_0 = \sqrt{2gh}$. A velocidade inicial da bola, depois

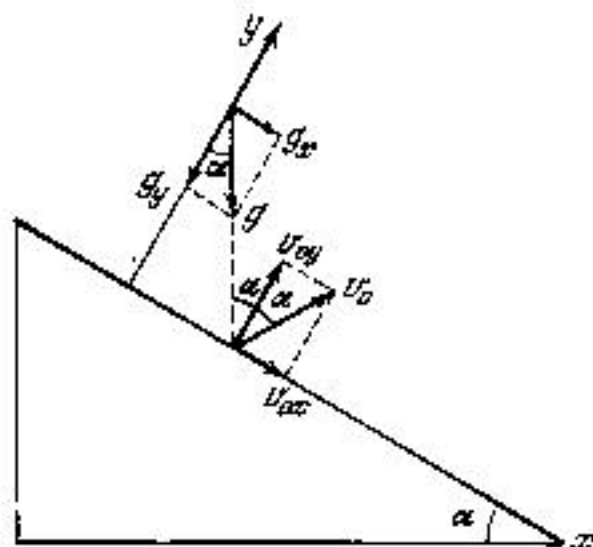


Fig. 295

do primeiro choque, é v_0 e forma com o eixo y um ângulo α (fig. 295).

A distância entre os pontos do primeiro e segundo choques com o plano inclinado é:

$$l_1 = (v_0 \sin \alpha) t_1 + \frac{(g \sin \alpha) t_1^2}{2},$$

onde t_1 é o tempo de voo. Este tempo é determinado pela equação:

$$(v_0 \cos \alpha) t_1 - (g \cos \alpha) t_1^2 / 2 = 0.$$

Resolvendo esta equação, obtemos que $t_1 = 2v_0/g$ e $l_1 = 8h \sin \alpha$. A velocidade da bola, no momento do segundo choque, determina-se pelas igualdades:

$$v_{1x} = v_{0x} - a_x t_1 = v_0 \sin \alpha - (g \sin \alpha) t_1 = -3v_0 \sin \alpha,$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_y t_1 = v_0 \cos \alpha - (g \cos \alpha) t_1 = -v_0 \cos \alpha.$$

Terminados os choques, estas velocidades serão:

$$v_{2x} = v_{1x} \text{ e } v_{2y} = -v_{1y}.$$

A distância entre os pontos do segundo e terceiro choques é:

$$l_2 = (3v_0 \sin \alpha) t_2 + (g \sin \alpha) t_2^2 / 2,$$

onde t_2 é o tempo do voo. Sendo a velocidade inicial ao longo do eixo y a mesma que no primeiro choque, então: $t_2 = t_1$; e, consequentemente, $l_2 = 16h \sin \alpha$. Analogamente pode-se

demonstrar, que a distância entre os pontos seguintes é $l_3 = 24h \sin \alpha$. Deste modo teremos a relação $l_1 : l_2 : l_3 \dots = 1 : 2 : 3 \dots$.

50. As componentes das velocidades dos corpos ao longo dos eixos x e y , determinam-se, em qualquer momento de tempo, da seguinte maneira:

$$v_{1y} = v_0 \sin \alpha_1 - gt, \quad v_{2y} = v_0 \sin \alpha_2 - gt,$$

$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha_1, \quad v_{2x} = -v_0 \cos \alpha_2.$$

Suponhamos, que u seja a velocidade do primeiro corpo, relativamente ao segundo. Então, temos:

$$u_y = v_{1y} - v_{2y} = v_0 \sin \alpha_1 - gt - v_0 \sin \alpha_2 + gt = v_0 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2),$$

$$u_x = v_{1x} - v_{2x} = v_0 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Consequentemente, a velocidade u é:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Os corpos movimentam-se relativamente um ao outro, com velocidades constantes. Decorrido um intervalo de tempo τ a distância entre os mesmos será:

$$S = 2 \left(v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \tau.$$

51. A velocidade de qualquer pedra, em um lançamento dirigido à terra, é: $v_{\text{ter}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Uma pedra, que seja lançada em uma trajetória menos côncava, possui a maior velocidade horizontal que é $v_{\text{hor. máx}} = v_0$. Consequentemente,

$$\cos \varphi = v_0 / \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \quad \text{donde } h = \frac{v_0^2}{2g} \tan^2 \varphi.$$

52. A primeira bola saltando do solo, possui a componente vertical da velocidade $v_0 = \sqrt{2gh}$. A coordenada vertical da mesma é $y_1 = v_0 t - gt^2/2$, sendo que a coordenada vertical da segunda bola é $y_2 = h - gt^2/2$. No momento do encontro, temos $y_1 = y_2$, donde concluímos, que as bolas encontram-se a uma altura de $0,75 h$.
53. Da solução do problema 43 deduzimos, que a bala não atinge o ponto situado a uma altura y , se a distância horizontal deste ponto ao canhão não satisfizer a desigualdade:

$$r > \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gy}.$$

Assim o limite da chamada « região perigosa », determina-se pela equação:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} r^2.$$

A seção de tal superfície (parabolóide) tem a forma de uma parábola, que coincide com a trajetória da bala, lançada horizontalmente, com velocidade v_0 do canhão, localizado a uma altura $H = v_0^2/2g$.

54. 1) Simbolizemos por L — na o comprimento da esteira. Temos que $l = (L - 2\pi R)/2$ é a distância entre os eixos das rodas.

No movimento progressivo participam $n_1 = l/a = (L - 2\pi R)/2a$ divisões. O mesmo número delas encontra-se em repouso relativamente à terra. No movimento de rotação participam $n_2 = 2\pi R/a$ divisões.

2) O movimento do trator é realizado em um tempo $t_0 = S/v$. Em uma rotação da esteira, uma divisão percorre o trajeto $2l$, movimentando-se progressivamente com velocidade igual a $2v$. O tempo do movimento em uma rotação de uma divisão l/v . Toda a esteira dá $N = S/L$ voltas. Consequentemente, o tempo para o movimento de translação de uma divisão é $t_1 = Nl/v$. Um tempo igual a divisão permanece em repouso e participará no movimento giratório no intervalo de tempo:

$$t_2 = t_0 - \frac{2Nl}{v} = \frac{S + 2\pi RN - Nl}{2v}.$$

Supondo que $S \gg L$, pode-se considerar o número de rotações inteiro, desprezando o tempo de uma volta incompleta de uma esteira.

55. Simbolizemos por R o raio procurado e por ω a velocidade angular do movimento do trator pelo arco. Então, temos que $v_1 = \omega(R - d/2)$, $v_0 = \omega(R + d/2)$ (fig. 296). Dessas equações, temos que:

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{R - d/2}{R + d/2}, \quad R = \frac{d}{2} \frac{v_0 + v_1}{v_0 - v_1} = 6 \text{ m}.$$

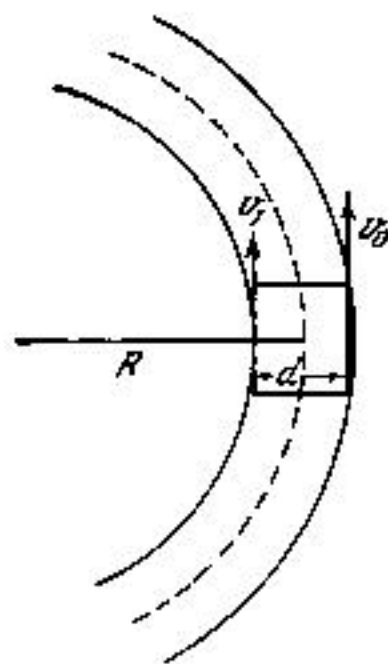


Fig. 296

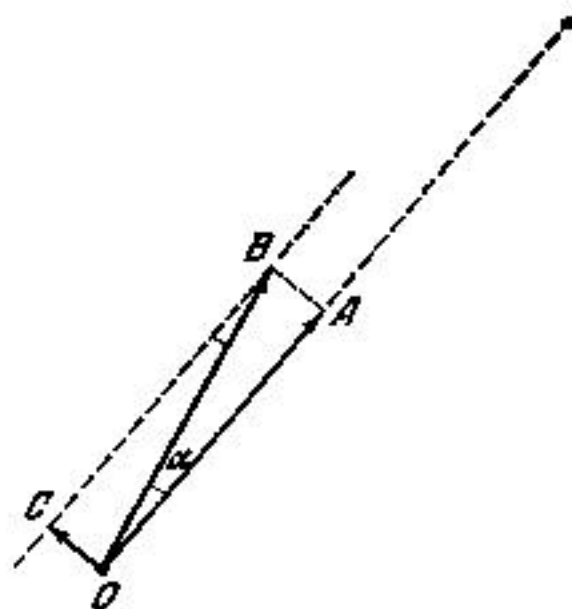


Fig. 297

56. Inicialmente o observador encontra-se no polo (ponto O, fig. 297). O eixo da terra passa pelo ponto O perpendicularmente ao desenho. OA (é paralelo a BC) está dirigido à estrela. A montanha encontra-se à direita do ponto A. $\alpha = \omega \Delta t$ é o ângulo no qual gira

o globo terrestre em um tempo Δt , ω é a velocidade angular de rotação da terra. A fim de ver a estrela o observador deverá correr, nesse intervalo de tempo, uma distância igual a $OC \approx \omega R \Delta t$. A velocidade do observador é igual a $v = OC/\Delta t = \omega R = 0,7 \text{ m/s}$.

57. 1) No intervalo de tempo de uma rotação completa T , o disco percorrerá um trajeto igual ao comprimento da circunferência do disco, i.e., igual a $S = 2\pi r$, onde r é o raio do disco. Consequentemente, a velocidade de translação de qualquer ponto do disco é $v_r = 2\pi r/T = v$. Por outro lado, a velocidade linear de rotação, relativamente ao centro O dos pontos, que se situam na borda do disco, é igual a $v_{\text{rot}} = \omega r$, onde ω é a velocidade angular de rotação. Nessas condições, temos que: $\omega = 2\pi/T$, então $v_{\text{rot}} = 2\pi r/T = v_r$, como queríamos demonstrar.

2) A velocidade dos pontos da borda, relativamente a um observador fixo, é composta de duas velocidades: a velocidade de translação e a velocidade do movimento de rotação. Para o ponto A a velocidade resultante será $2v$. Para os pontos B e D as velocidades são iguais em grandeza absoluta e a sua soma é igual a $\sqrt{2}v$ (fig. 298, a). Para o ponto C a velocidade resultante, relativamente a um observador fixo, é igual a zero, uma vez que as velocidades dos movimentos de translação e rotação são iguais em grandeza absoluta e estão dirigidas em sentidos contrários.

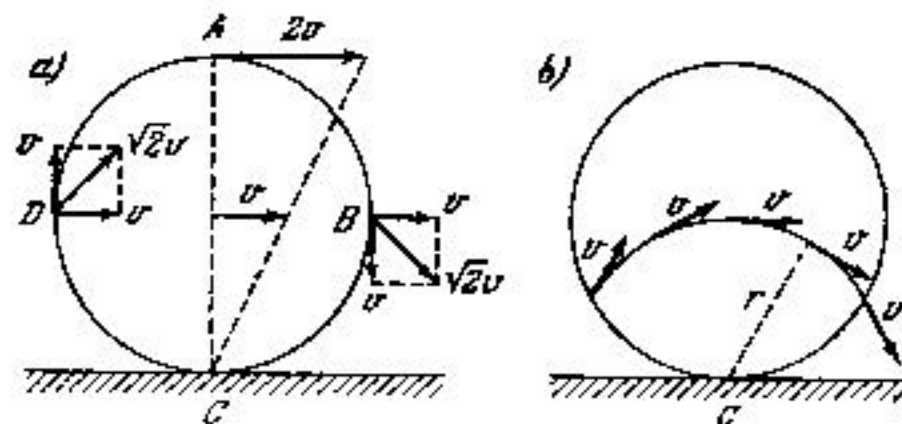


Fig. 298

- 3) As velocidades instantâneas dos pontos do diâmetro AC, crescem diretamente proporcional à distância do ponto C. Por isso, o movimento do disco, em um determinado momento de tempo pode ser analisado como o movimento de rotação do mesmo em redor de seu ponto de contato com o plano. O eixo, que passa através do ponto C perpendicularmente ao plano do disco, denomina-se eixo instantâneo de rotação. Este eixo desloca-se no movimento do disco, passando todo o tempo pelo ponto de contato do disco com o plano. Deste modo em um determinado momento de tempo, todos os pontos do disco, que são equidistantes do ponto C, terão uma mesma velocidade resultante

relativamente ao observador fixo. Os pontos localizados a uma distância do eixo instantâneo (do ponto C) igual ao raio do disco, terão a mesma velocidade em grandeza absoluta que a velocidade do eixo, i.é., v (fig. 298, b).

58. A velocidade componente ao longo do bastonete para todos os pontos do mesmo será única e igual a $u = v \cos \alpha$. Consequentemente, a velocidade do extremo do bastonete B é igual a $v_B = -v \cos \alpha / \cos \beta$. O movimento do bastonete pode ser analisado como a soma do movimento de translação ao longo de AB , com velocidade u e do movimento de rotação simultâneo em redor do eixo, que é perpendicular ao plano do desenho e que passa através de um certo ponto O do bastonete. A distância do ponto O até o extremo do bastonete A pode-se determinar facilmente da relação:

$$\frac{v \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{v \sin \alpha} = \frac{l - AO}{AO}, \quad AO = l \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

O movimento do bastonete, em um determinado momento do tempo, também pode ser analisado como um movimento puro de rotação em redor do eixo O' , que é perpendicular ao plano do desenho e está localizado na perpendicular de OO' à AB . A distância OO' será:

$$OO' = AO \operatorname{ctg} \alpha = l \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

59. A distribuição das velocidades de diferentes pontos do bastonete está representada na fig. 299. A velocidade v_C de um ponto

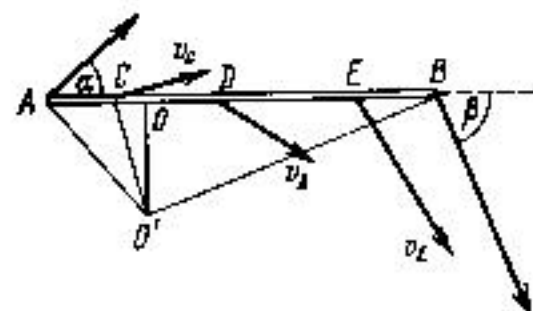


Fig. 299

arbitrário C do bastonete em grandeza é

$$v_C = \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha \frac{CO^2}{AO^2}}$$

e está dirigida perpendicularmente à reta traçada do ponto O' (ver o problema anterior) ao ponto dado C .

60. $v_C = v_B \cos 60^\circ = v/2$.
61. Este problema é mais cômodo de resolver-se utilizando um sistema de coordenadas relacionado ao movimento uniforme dos automóveis. Nesse sistema, a estrada movimentar-se-á para trás com velocidade $v = 50$ km/h, os automóveis estarão em

repouso um relativamente ao outro e as rodas dos mesmos girarão. A velocidade linear dos pontos situados na circunferência da roda e a velocidade linear da pedra presa serão iguais a v . A pedra percorrerá a maior distância possível, caso desprenda-se das rodas no momento em que sua velocidade formar com a horizontal um ângulo de 45° . Achamos essa distância. Desprezando a circunstância de que no momento em que se desprende, a pedra encontra-se em um nível pouco acima do nível da estrada, encontramos a distância máxima que é $l = v^2 \sin 2\alpha / g = v^2 / g = 19,6$ m. A distância entre os automóveis não poderá ser menor do que 19,6 m.

62. O ângulo entre os raios seguintes da roda dianteira é $\varphi = 2\pi/N_1$. Para um observador, a roda não girará, se no intervalo de filmagem de duas imagens consecutivas ($\tau = 1/24$ s), a mesma girar em um ângulo $\alpha = k\varphi$, onde k é um número inteiro positivo. Por outro lado, o ângulo do giro da roda no intervalo de tempo τ é $\alpha = \omega\tau$, onde ω é a velocidade angular da roda. Consequentemente, a roda dianteira parecerá estar fixa, se $\omega = 2\pi k/N_1\tau$. Nessas condições, a velocidade da carruagem é $v = \omega r = 2\pi k r/N_1\tau$. A mesma terá o menor valor igual a $v_{\min} = 2\pi r/N_1\tau = 8,8$ m/s. As rodas traseiras, também, parecerão estar fixas, se $2\pi k_1 r/N_1\tau = 2\pi k_2 R/N_2\tau$, donde, obtemos que para $k_1 = k_2 = 1$, $N_2 = N_1 R/r = 9$.
63. 1) Teremos a impressão de que os raios girarão no sentido anti-horário, se no intervalo de tempo τ (ver o problema 62) a roda

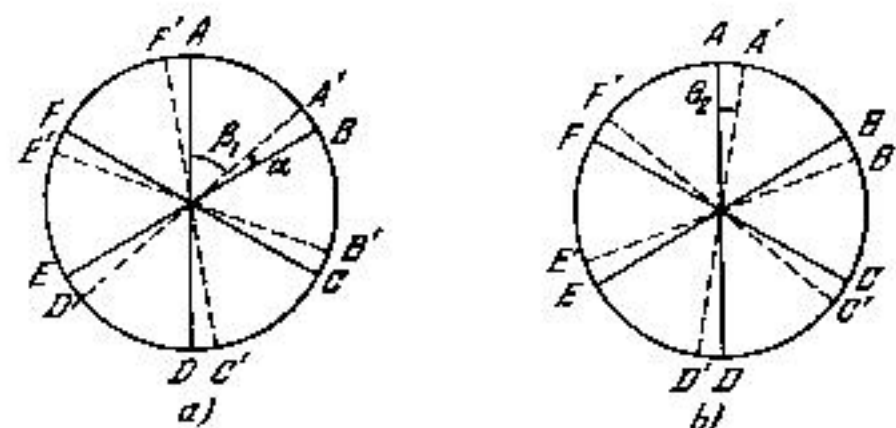


Fig. 300

girar em um ângulo β_1 , que satisfaça a seguinte condição: $k\varphi > \beta_1 > k\varphi - \varphi/2$, onde $k = 1, 2, 3 \dots$. As localizações consecutivas dos raios da roda, para este caso, estão representadas na fig. 300, a. Um espectador terá a impressão de que cada raio girou em um ângulo $\alpha < \varphi/2$ no sentido anti-horário. Os valores possíveis da velocidade angular estão encerrados, correspondentemente, no intervalo:

$$\frac{k\varphi}{\tau} > \omega_1 > \frac{(2k-1)\varphi}{2\tau}$$

Uma vez que o número dos reos das rodas dianteira e traseira é igual, então, para ter-se a impressão, que as rodas giram no sentido anti-horário, a velocidade da carruagem deverá satisfazer as seguintes desigualdades:

$$\frac{k\varphi r}{\tau} > v > \frac{k\varphi r}{\tau} - \frac{\varphi r}{2\tau}, \quad (1)$$

$$\frac{k\varphi R}{\tau} > v > \frac{k\varphi R}{\tau} - \frac{\varphi R}{2\tau}. \quad (2)$$

$R = 1,5 r$, por isso a segunda desigualdade pode ser escrita da seguinte forma:

$$1,5 \frac{k\varphi r}{\tau} > v > \frac{1,5k\varphi r}{\tau} - \frac{1,5\varphi r}{2\tau}.$$

Ambas as desigualdades são compatíveis somente para $k = 1$ e dão valores permissíveis da velocidade da carruagem da seguinte forma: $\frac{\varphi r}{\tau} > v > 0,75 \frac{\varphi r}{\tau}$, ou, considerando que $\varphi = 2\pi/\delta$, na seguinte forma: $8,8 \text{ m/s} > v > 6,6 \text{ m/s}$.

2) Os raios da roda traseira parecerão estar girando no sentido horário, se no intervalo de tempo τ a roda girar em um ângulo β_2 , que satisfaça a seguinte condição: $(2k - 1) \varphi/2 > \beta_2 > (k - 1) \varphi$ (fig. 300, b). Dessa condição, deduzimos para a velocidade da carruagem a seguinte desigualdade:

$$\frac{1,5(2k - 1) \varphi r}{2\tau} > v > \frac{1,5(k - 1) \varphi r}{\tau}.$$

E, simultaneamente, a velocidade da mesma deverá satisfazer a desigualdade (1). Para $k = 1$ ambas as desigualdades são compatíveis, se $0,75 \frac{\varphi r}{\tau} > v > 0,5 \frac{\varphi r}{\tau}$; para $k = 2$ as desigual-

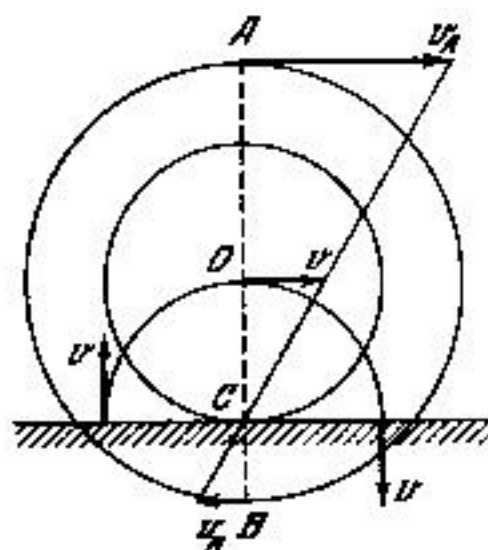


Fig. 301

dades são compatíveis, nas condições de que $2 \frac{\varphi r}{\tau} > v > 1,5 \frac{\varphi r}{\tau}$.

Se $k > 2$, então as desigualdades serão incompatíveis. Deste modo, temos que: $6,6 \text{ m/s} > v > 4,4 \text{ m/s}$ ou $17,6 \text{ m/s} > v > 14,2 \text{ m/s}$.

64. Pelo ponto C (fig. 301) passa o eixo instantâneo de rotação (ver o problema 57). Por isso, o ponto A tem velocidade $v_A = v(R + r)/r$. O ponto B possui uma velocidade igual a $v_B = v(R - r)/r$.
65. A velocidade instantânea, que é igual à velocidade do eixo da bobina, é a velocidade dos pontos localizados na circunferência de raio r , cujo centro é o ponto C.
66. As trajetórias dos pontos A, B e C estão representadas na fig. 302. O ponto B descreve uma cicloide simples; os pontos A e C descrevem uma cicloide oblonga e reduzida, respectivamente.

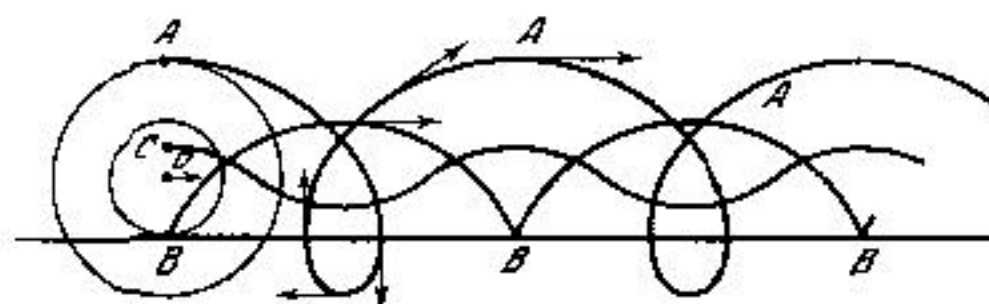


Fig. 302

67. A velocidade linear dos pontos na circunferência do eixo é $v_1 = \omega d/2$. A velocidade linear dos pontos da abraçadeira é $v_2 = \omega D/2$. Considerando, que as esferas deslizam-se sem escorregamento, então, as velocidades instantâneas daqueles pontos da esfera que num determinado momento tocam o eixo e a abraçadeira, serão iguais a v_2 . A velocidade instantânea de qualquer ponto da esfera, pode ser considerada como a soma de duas velocidades: a velocidade do movimento de seu centro v_0 e a velo-

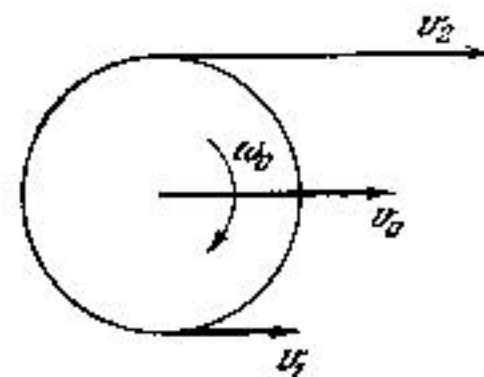


Fig. 303

cidade linear do movimento de rotação em redor do centro. A rotação da esfera ocorrerá com uma velocidade angular qualquer ω_0 (fig. 303). Nessas condições temos que: $v_1 = v_0 - \omega_0 r$, $v_2 = v_0 + \omega_0 r$, donde:

$$v_0 = 1/2 (v_1 + v_2) = 1/4 (\omega d + \Omega D).$$

Nessa expressão, cada uma das velocidades angulares pode ser tanto positiva (rotação no sentido horário), como negativa (rotação no sentido anti-horário). Para $\Omega = 0$, temos que $v_0 = \omega d/4$.

68. Uma vez que o cone roda sem deslizamento, então, os pontos da geratriz OA (fig. 304) deverão estar fixos. Desta condição determina-se a velocidade Ω de rotação do cone em redor de seu próprio eixo. Para o ponto A , dessa condição obtemos que: $\omega h / \cos \alpha = \Omega h \tan \alpha$, donde $\Omega = \omega / \sin \alpha$. A velocidade de um

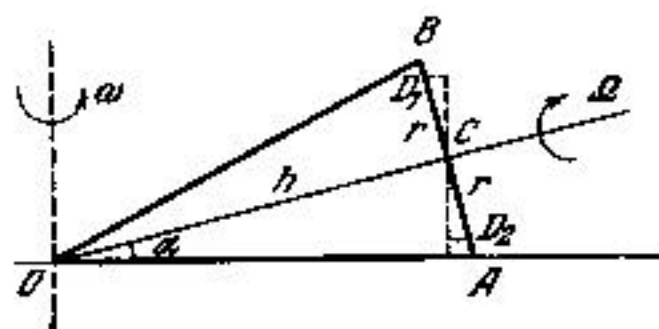


Fig. 304

ponto arbitrário D_1 do diâmetro AB da base do cone é composta de duas velocidades:

$$v_1 = \omega (h \cos \alpha - r \sin \alpha) + r \omega / \sin \alpha,$$

onde r é a distância do ponto dado até o centro C da base. Para um ponto D_2 , situado abaixo do centro C , teremos:

$$v_2 = \omega (h \cos \alpha + r \sin \alpha) - r \omega / \sin \alpha.$$

O ponto extremo inferior tem uma velocidade igual a zero e o ponto extremo superior uma velocidade igual a $2\omega h \cos \alpha$.

69. Nos lugares de engate das engrenagens cônicas E e C , assim como, das engrenagens E e D , as velocidades lineares deverão ser iguais. Uma vez que a engrenagem E gira em redor do eixo A com velocidade ω e o próprio eixo gira em outro plano com velocidade Ω , então, para o engate das rodas E e C verifica-se a igualdade $r_1 \omega_1 = r \omega + r_1 \Omega$. Para o engate das rodas E e D verifica-se, analogamente, a seguinte igualdade: $r_2 \omega_2 = -r \omega + r_2 \Omega$. Resolvendo essas igualdades, obtemos que $2\Omega = \omega_1 + \omega_2$ e $2\omega = \frac{r_1}{r} (\omega_1 - \omega_2)$. Para uma determinada velocidade Ω da roda B acionada pelo motor, as velocidades angulares das rodas motrizes do automóvel diferenciar-se-ão uma da outra num valor que varia de zero até 2Ω .

70. Partindo dos conceitos de simetria é evidente, que, em qualquer momento de tempo, as tartarugas estarão nos ângulos do quadrado, cujo lado diminui todo o tempo (fig. 305). A velocidade de cada tartaruga pode ser decomposta em uma velocidade radial

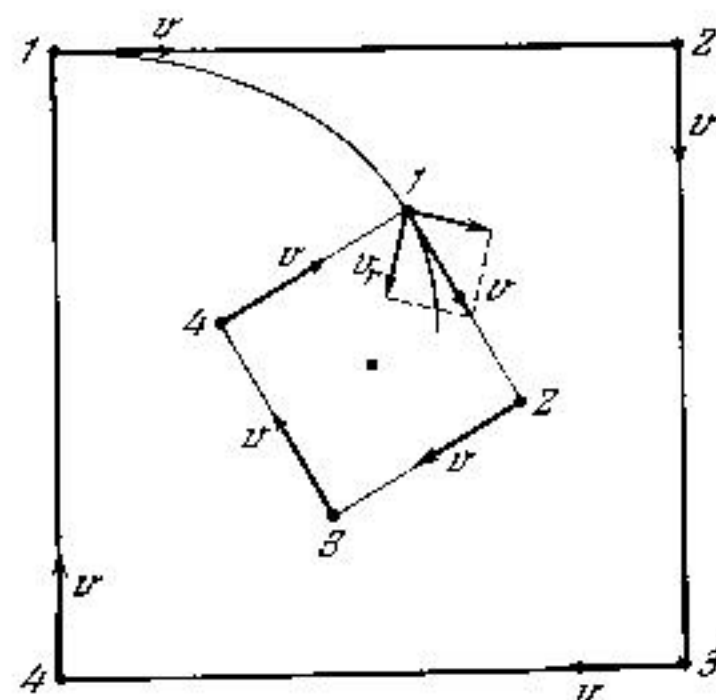


Fig. 305

(dirigida ao centro) e em uma velocidade perpendicular à radial. A velocidade radial, i.é., a velocidade de aproximação ao centro, será $v_r = v/\sqrt{2}$. Cada tartaruga percorrerá até o centro uma distância $l = a/\sqrt{2}$. Consequentemente, as tartarugas encontrar-se-ão no centro do quadrado depois de um intervalo de tempo $t = l/v_r = a/v$.

71. O barco B movimenta-se em direção ao barco A com velocidade v . Ao mesmo tempo, o barco A distancia-se do barco B com velocidade $v \cos \alpha$ (fig. 306). Consequentemente, a distância AB

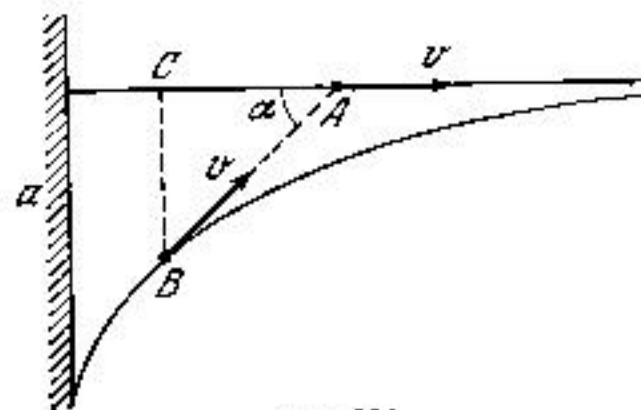


Fig. 306

diminui com velocidade $v(1 - \cos \alpha)$. O ponto C (projecção do ponto B na trajetória do barco A) move-se com velocidade $v \cos \alpha$. Como consequência disso, a distância AC aumenta com velocidade $v(1 - \cos \alpha)$. Deste modo, a soma das distâncias $S = AB + AC$ permanece constante no movimento dos barcos. No momento inicial o ponto C coincidia com o ponto A e, então, $S = AB = a$. Depois de um intervalo suficientemente grande de tempo, o ponto C coincidirá com o ponto B . Nessa condição teremos que: $AB = AC = S/2 = a/2$. Os barcos movimentar-se-ão a uma distância de 1,5 km um do outro.

72. O movimento da bola pode ser examinado como a soma dos movimentos pela vertical (uniformemente acelerado) e pela horizontal (movimento uniforme). A solução do problema simplifica-se, se construirmos o gráfico da dependência da coordenada da bola ao longo da horizontal, em função do tempo, para os valores limites da velocidade iguais a 267 cm/s e 200 cm/s (fig. 307).

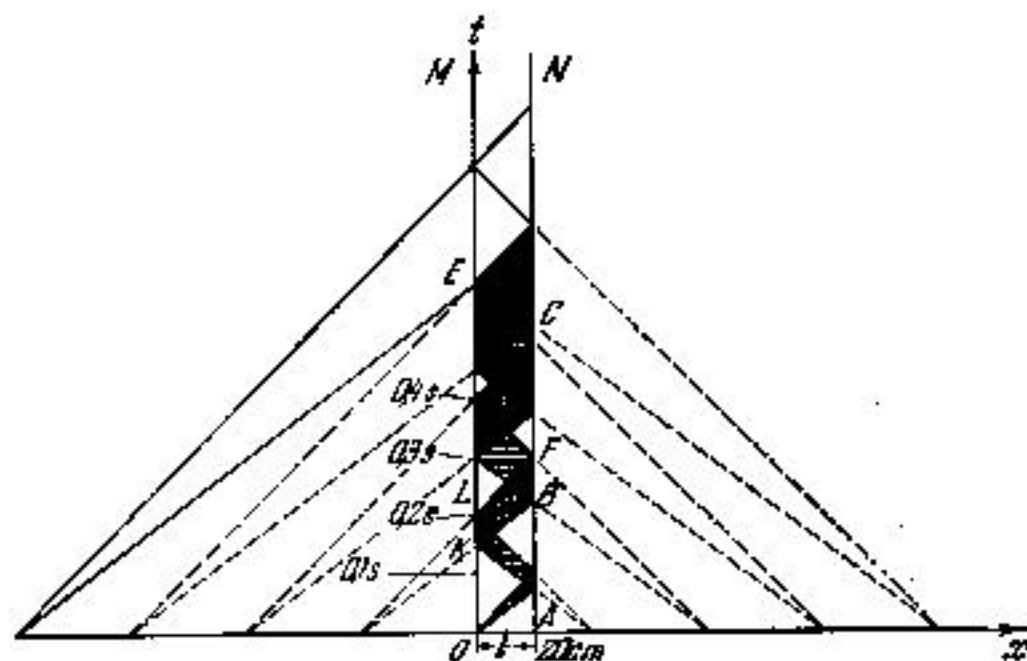


Fig. 307

As linhas quebradas inferior e superior correspondem, respectivamente, à velocidade máxima e à velocidade mínima da bola. Com o decorrer do tempo, como se vê no gráfico, a indeterminação da coordenada da bola x , dada pelo segmento da reta horizontal, encerrado entre as linhas do gráfico, aumenta. O sombreado vertical na fig. 307 corresponde ao movimento da bola de M a N e o sombreado horizontal corresponde ao movimento de N a M . A região de intersecção dos sombreados corresponde às indeterminações na direção da velocidade horizontal.

1) Imediatamente do gráfico deduz-se, que a direção da velocidade da bola pela horizontal, logo após ter saltado uma vez da chapa N , será indeterminada no tempo de queda $OK \ll$

$\ll t \ll OL$, ou $t > AB$ ($OK = 0,15$ s; $OL = 0,2$ s; $AB = 0,225$ s). Consequentemente: $10 \text{ cm} \ll H \ll 20 \text{ cm}$, ou $H \gg g t^2/2 \approx 20 \text{ cm}$. 2) A bola poderá cair em qualquer ponto da base, na qual estão localizadas as chapas, se o tempo de queda da bola $t \gg \geq AP = 0,3$ s. Consequentemente $H_{\min} = 44 \text{ cm}$.

§ 4. DINÂMICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO

73. $T = Fx/l$.

74. $T = Fxy/lh$, age na direção horizontal à direita. $N = M \frac{xy}{lh} g$, age verticalmente para cima.

75. A massa da parte esquerda da barra é $m_1 = \frac{M}{L} l$ e a massa da parte direita é $m_2 = \frac{M}{L} (L - l)$, onde M é a massa de toda a barra. Sob a ação das forças aplicadas à barra cada parte da mesma move-se com uma mesma aceleração a . Donde temos que:

$$F_1 - F = m_1 a,$$

$$F - F_2 = m_2 a.$$

Resolvendo este sistema, obtemos, que a força de distensão é:

$$F = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2} = F_1 \frac{L-l}{L} + F_2 \frac{l}{L}.$$

76. Ao bloco foram aplicadas duas forças mg e N . A fonte da força N é o chão deformado do elevador. Da equação do movimento do bloco temos $ma = mg - N$, donde $N = m(g - a)$. Segundo a terceira lei de Newton, o bloco (como consequência de que o mesmo está deformado) age no chão do elevador com uma força igual a N . Se $a = g$, então $N = 0$, i.é., o bloco não age mais no chão (no bloco desapareceram as deformações). Para o movimento acelerado dirigido para cima, temos: $N = m(g + a)$.

77. A fim de que a tábua não trepide, a componente da força aplicada à tábua pelo menino, deverá estar dirigida ao longo da tábua para cima. Consequentemente, a tábua age no menino com uma força igual e de sentido contrário, dirigida ao longo da tábua para baixo. Escolhendo a direção positiva do eixo das coordenadas ao longo do plano inclinado para cima, escrevemos a equação do movimento do menino:

$$-Mg \sin \alpha - F = Ma,$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad \frac{v_0}{2} = v_0 + at.$$

A tábua encontra-se em equilíbrio, então, temos que: $F = mg \sin \alpha = 0$. Resolvendo o sistema dado, encontramos

$$S = \frac{3Mv_0^2}{8(M+m)g \sin \alpha}.$$

78. As partes do bloco na seção superior terão maior aceleração ($a > g$). A aceleração das partes do bloco, localizadas na seção inferior, no momento inicial de tempo, será $a = g$.
79. No momento inicial de tempo as partes do bloco, localizadas na seção superior, terão aceleração $a = g$, e as localizadas na seção inferior, aceleração $a > g$.
80. A indicação da balança diminui.
81. No movimento das asas, o ar, localizado em baixo das mesmas, comprime-se e o ar, localizado sobre as asas, dispersa-se. Como consequência de deformação do ar surge a força de ascensão N . Da equação do movimento $ma = N - mg$, deduzimos que: $N = ma + mg$. Segundo a terceira lei de Newton, as asas da mosca agem sobre o ar com força igual a N , dirigida para baixo. Como consequência disso, o prato da balança, no qual se encontra a garrafa com a mosca, abaixará.
82. Na fig. 308 estão representadas as forças que agem nas cargas. As equações de movimento para as cargas escrevem-se da seguinte maneira:

$$m_1 a = T - m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T,$$

onde T é a força de tensão da corda e a é a aceleração. (As acelerações das cargas são iguais, uma vez que consideramos a corda inelástica. A imponderabilidade da corda e da roldana determina a constância de T). Resolvendo o sistema de equações, obtemos que: $a = [(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)]g = 327 \text{ cm/s}^2$, $T = m_1(a + g) = 1,3 \text{ N}$. O tempo de movimento é $t = \sqrt{2H/a} \approx 1 \text{ s}$.

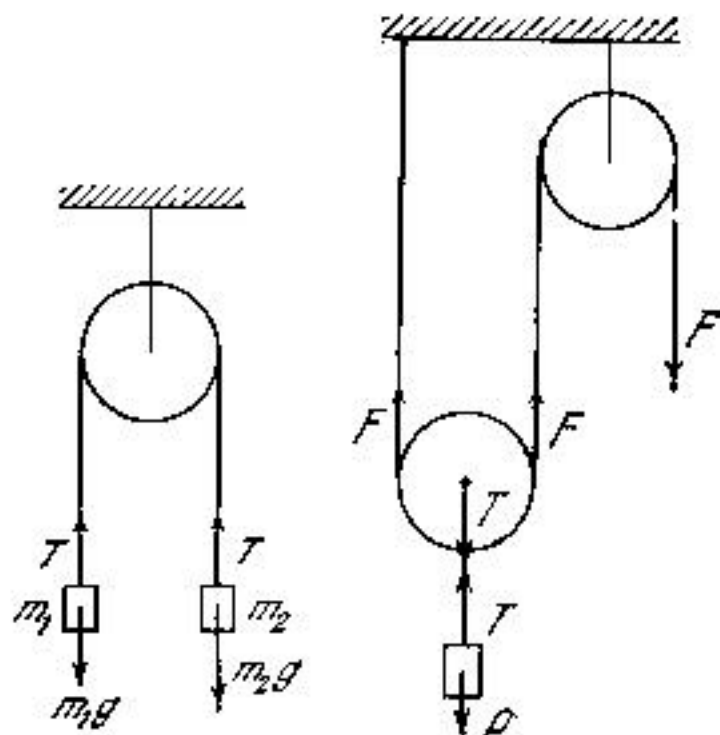


Fig. 308

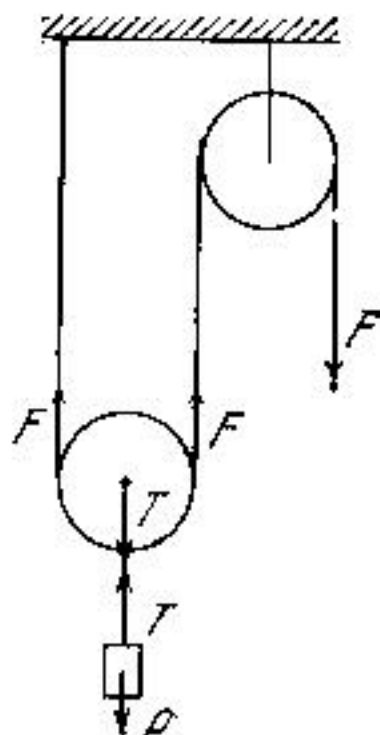


Fig. 309

83. Se as massas das roldanas e da corda forem suficientemente pequenas (fig. 309), então, $2F - T = 0$, $T - P = ma$. Resolvendo, obtemos que $F = (1 + a/g)P/2$. Para $a = 0$, temos $F = P/2$.
84. As equações do movimento para os pesos com massas m_1 , m_2 , m_3 , têm a seguinte forma:

$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$

$$m_2 b = m_2 g - T_2,$$

$$m_3 c = m_3 g - T_3,$$

onde a , b e c são as acelerações relativamente à roldana fixa A . A aceleração é considerada positiva, se estiver dirigida para baixo. Se a massa da corda for insignificante em comparação com as massas m_1 , m_2 , m_3 , então, a tensão será constante em toda a corda. Daqui concluímos, que $T_2 = T_3$ e a força com que a corda, passando através da roldana A , age na roldana B é T_1 (fig. 310).

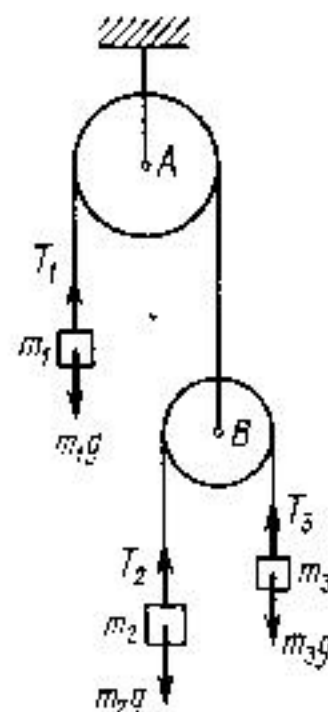


Fig. 310

Analisemos a parte da corda que se encontra em um dado momento de tempo na roldana B . Nesta parte, o extremo esquerdo pendente da corda age com uma força igual a T_2 e o extremo direito, age com uma força T_3 ($T_2 = T_3$). Uma vez que a massa de qualquer parte da corda é desprezada, a soma de todas as forças que agem na mesma deverá tender a zero. Consequentemente, a roldana B age na parte da corda localizada na roldana com uma força $F = T_2 + T_3$ dirigida para cima. Segundo a terceira lei de Newton, a corda deformada, por sua vez, age na

roldana com uma força $T_2 + T_3$. Uma vez que a massa da roldana B é insignificante, temos que $T_1 = T_2 + T_3$. No decorrer de certo tempo (muito pequeno) depois do início do movimento dos corpos, a deformação das cordas cessa e os comprimentos, após isso, não variam com o decorrer do tempo. Isso significa, que a aceleração da roldana B será igual a $(-a)$ e a aceleração das cargas m_2 e m_3 , relativamente à roldana B , serão iguais e dirigidas em sentidos contrários. Simbolizando por d a aceleração da carga m_3 relativamente à roldana B , obtemos que

$$b = (-a) + d,$$

$$c = (-a) + (-d),$$

donde $(b + c) = -2a$. Deste modo, temos, finalmente, o seguinte sistema de equações:

$$m_1 a = m_1 g - T,$$

$$m_2 b = m_2 g - T/2,$$

$$m_3 c = m_3 g - T/2,$$

$$b + c = -2a.$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos (considerando $m_1 = m_2 + m_3$) que:

$$a = \frac{(m_2 - m_3)^2}{(m_1^2 + m_2^2 + 6m_2 m_3)} g, \quad b = \frac{m_1^2 - 4m_2^2}{m_1^2 + 4m_2 m_3} g,$$

$$c = \frac{m_1^2 - 4m_3^2}{m_1^2 + 4m_2 m_3} g, \quad T = \frac{8m_1 m_2 m_3}{m_1^2 + 4m_2 m_3} g.$$

E, no caso geral, temos:

$$T = \frac{8m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 (m_2 + m_3)} g,$$

85. A indicação do dinamômetro inicialmente é igual a $F = 30$ N. Se a indicação do dinamômetro não varia, então, no peso de 20 N, age a força de tensão da corda, dirigida para cima, igual a 30 N. Consequentemente, este peso move-se para cima com aceleração $a = g/2$. Com a mesma aceleração move-se para baixo o outro peso. O peso complementar no segundo prato, determina-se da equação:

$$\frac{P + P_1}{g} \cdot \frac{g}{2} = P + P_1 - F,$$

donde $P_1 = 30$ N.

86. A fim de restabelecemos o equilíbrio é necessário tirar do prato direito da balança um peso

$$P = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g.$$

87. Uma vez que a massa das roldanas e da corda é desprezada, a tensão da corda será única em todas as partes. Temos, então,

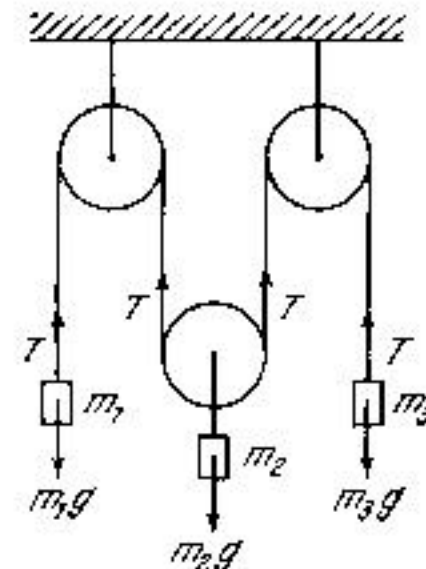


Fig. 311

que (fig. 311):

$$m_1 g - T = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2,$$

$$m_3 g - T = m_3 a_3,$$

$$a_2 = -(a_1 + a_3)/2.$$

Resolvendo o sistema, obtemos que:

$$a_1 = \frac{4m_1 m_3 - 3m_2 m_3 + m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g,$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_2 - 4m_1 m_3 - m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g,$$

$$a_3 = \frac{4m_1 m_3 - 3m_1 m_2 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g.$$

88. Uma vez que a massa das roldanas e da corda é insignificante, a tensão da corda é igual em todas as partes. Temos, então, que:

$$m_1 g - T = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2,$$

$$2T - T = 0.$$

Resolvendo o sistema, obtemos, $T = 0$ e $a_1 = a_2 = g$. Ambas as cargas caem livremente com aceleração g . As roldanas B e C giram no sentido anti-horário. A roldana A gira no sentido horário.

89. Suponhamos, que, em um momento qualquer de tempo, um peso l encontra-se a uma distância x_1 do telô. Partindo da inelasticidade de todas as cordas, deduzimos, que a soma de todas

essas distâncias permanece constante no decorrer do movimento, isto é, $\sum_{i=1}^8 x_i = L$. No intervalo de tempo Δt variará cada uma dessas distâncias, por isso, depois do tempo Δt , temos:

$$\sum_{i=1}^8 \left[x_i + v_i \Delta t + \frac{a_i (\Delta t)^2}{2} \right] = L.$$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos, após dividirmos por Δt , que:

$$\sum_{i=1}^8 \left(v_i + \frac{1}{2} a_i \Delta t \right) = \sum_{i=1}^8 v_i + \frac{1}{2} \Delta t \times \sum_{i=1}^8 a_i = 0.$$

Uma vez que esta igualdade deverá verificar-se para qualquer Δt , as acelerações das cargas estão relacionadas por $\sum_{i=1}^8 a_i = 0$.

Como as massas das roldanas e o atrito nos eixos das mesmas são insignificantes, então, a tensão de uma mesma corda, enrolada através de qualquer roldana, em ambos os lados da mesma, é única e igual à metade da tensão da corda, na qual esta roldana está pendurada. Daqui deduzimos, que a tensão de todas as cordas, nas quais estão pendurados os pesos, são iguais entre si. Simbolizando esta tensão por T , escrevemos a equação do movimento do i -ésimo peso, da seguinte forma:

$$m_i g - T = m_i a_i,$$

ou

$$g - \frac{T}{m_i} = a_i.$$

Somando todas as 8 equações deste tipo, obtemos que:

$$8g - T \sum_{i=1}^8 \frac{1}{m_i} = \sum_{i=1}^8 a_i = 0,$$

donde

$$T = \frac{8g}{\sum_{i=1}^8 (1/m_i)}.$$

90. Simbolizemos a tensão da corda, na qual estão pendurados os pesos de massas m_1 e m_2 , por T . Então, a tensão da corda, na qual está pendurado o peso m_3 , será igual a $2T$, e a tensão da corda, na qual está pendurado o peso m_4 , será igual a $4T$. As

equações do movimento para os pesos são escritas da seguinte forma:

$$m_1 g - T = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - T = m_2 a_2,$$

$$m_3 g - 2T = m_3 a_3,$$

$$m_4 g - 4T = m_4 a_4.$$

Graças à inelasticidade das cordas, as acelerações dos pesos estão ligadas pela seguinte relação:

$$a_1 + a_2 + 2a_3 + 4a_4 = 0.$$

(Esta relação pode ser obtida, utilizando o mesmo método de solução do problema 89). Resolvendo o sistema de equações obtido, para valores dados de m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , encontramos que $a_1 = g/33 \approx 0,3 \text{ m/s}^2$.

91. Para este caso, as equações da dinâmica são escritas da seguinte forma: $m g - T = m a$, $T = M a$, onde T é a tensão da corda.

Resolvendo, obtemos: $a = \frac{m}{m+M} g = \frac{2}{7} g$. Das equações da

cinemática, temos que: $x = v_0 t - at^2/2$, $v_t = v_0 - at$. Resolvendo este sistema de equações, obtemos, que depois de 5 s a carreta encontrar-se-á no mesmo local ($x = 0$) e terá uma velocidade $v_t = 7 \text{ m/s}$, dirigida à direita. A carreta percorrerá um trajeto igual a:

$$S = 2 \left\{ v_0 \frac{t}{2} - \frac{a (t/2)^2}{2} \right\} = 17,5 \text{ m}.$$

92. Na fig. 312 estão representadas por setas todas as forças que agem nos corpos m_1 , m_2 , m_3 . Simbolizemos por a a aceleração

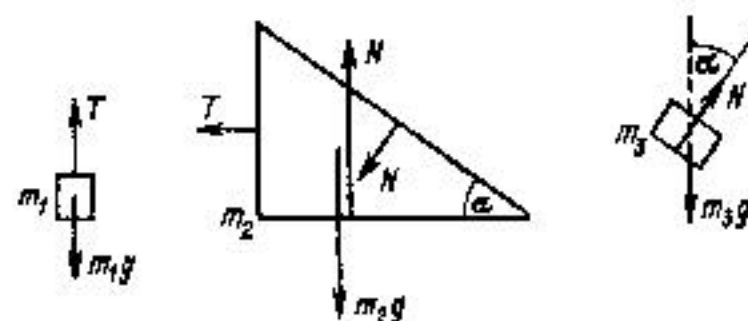


Fig. 312

dos corpos m_1 e m_2 e por c e b , as acelerações horizontal e vertical:

$$m_1 a = m_1 g - T, \quad m_2 a = T + N \sin \alpha,$$

$$m_2 b = m_2 g - N \cos \alpha, \quad m_3 c = N \sin \alpha.$$

Dos conceitos geométricos, deduzimos que $b/(a+c) = \operatorname{tg} \alpha$. Resolvendo estas equações, encontraremos a , b e c :

$$a = \frac{m_1 + m_3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} g,$$

$$b = \frac{m_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + (m_1 + m_2 + m_3) \operatorname{sen}^2 \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} g,$$

$$c = \frac{(m_1 + m_2) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - m_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha} g.$$

A solução é válida para $\operatorname{tg} \alpha = 1 \leq m_2/m_1$ (ver o problema 35).

93. Na fig. 313 estão representadas todas as forças que agem na barra e na cunha. Simbolizemos por a a aceleração da barra, relativamente à mesa fixa e por b a aceleração da cunha. Escrevemos

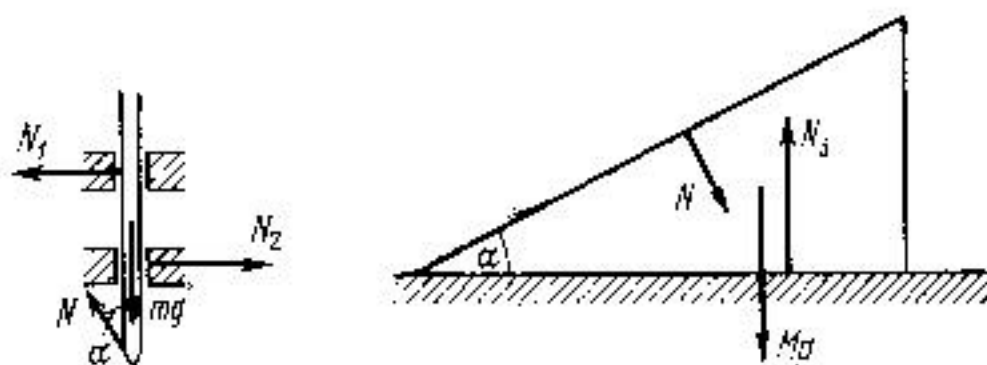


Fig. 313

a projeção das equações do movimento da barra e da cunha, nas direções horizontal e vertical:

$$ma = mg - N \cos \alpha, \quad 0 = N_1 - N_2 + N \operatorname{sen} \alpha,$$

$$Mb = N \operatorname{sen} \alpha, \quad 0 = N_3 - N \cos \alpha - Mg.$$

A equação de ligação cinemática, entre as acelerações da barra e da cunha, é deduzida dos conceitos geométricos: $a/b = \operatorname{tg} \alpha$. Resolvendo as equações, obtemos:

$$a = \frac{m \operatorname{tg}^2 \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha} g, \quad b = \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

94. A única força que age na conta é a força de reação da barra N , que está dirigida perpendicularmente à barra. A aceleração absoluta da conta w_a (aceleração relativamente a um observador fixo), estará dirigida para o lado de ação da força de reação N . A aceleração relativa w_r , está dirigida ao longo da barra (fig. 314); $w_a = a + w_r$. Do triângulo de acelerações, deduzimos que: $w_r = a \cos \alpha$, $w_a = a \operatorname{sen} \alpha$. Baseando-se na segunda lei de Newton, obtemos, que a força de reação é $N = ma \operatorname{sen} \alpha$.

O tempo de movimento da conta pela barra τ determina-se pela equação $l = (a \cos \alpha) \tau^2 / 2$, donde, obtemos $\tau = \sqrt{2l/(a \cos \alpha)}$.

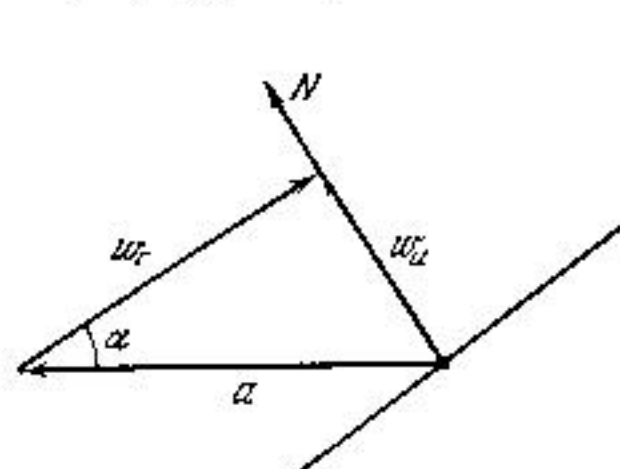


Fig. 314

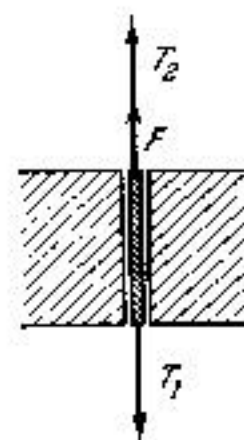


Fig. 315

95. Examinemos uma parte da corda que se encontra no orifício. Suponhamos, que a corda mova-se para baixo. Então, no pedaço da corda agem as forças de tensão da corda de ambos os lados e a força de fricção (fig. 315). Uma vez que a massa do pedaço examinado da corda é desprezível então, temos: $T_1 - F - T_2 = 0$. As equações da dinâmica escrever-se-ão da seguinte forma:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \quad m_2 g - T_2 = -m_2 a.$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g - F}{m_1 + m_2}.$$

96. 1) Se $F \leq kmg$, os blocos não se movimentarão.
2) Se $kMg \geq F > kmg$, mover-se-á o bloco menor.
3) Se $F > kMg$, os blocos mover-se-ão em direções opostas. (Supõe-se, que enquanto agirem as forças F não existiu fricção).
97. 1) Se a velocidade do vagão aumenta, então o quadro deslizará ao longo da parede traseira do vagão para baixo com aceleração igual a $g - ka$. (Se $ka > g$, então o quadro permanecerá em repouso).
2) Se a velocidade do vagão diminui, o quadro mover-se-á para baixo com aceleração g e para a frente com aceleração a .
98. De acordo com a segunda lei de Newton, temos: $(m_1 + m_2)a = m_1 g \operatorname{sen} \alpha - m_2 g \operatorname{sen} \beta - km_1 g \cos \alpha - km_2 g \cos \beta$. As cargas encontrar-se-ão em um mesmo nível, após haverem percorrido o trajeto S que satisfaça às seguintes equações:

$$S \operatorname{sen} \alpha - k - S \operatorname{sen} \beta, \quad S = at^2/2.$$

Excluindo S e a do sistema de três equações, obtemos

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{gt^2 (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) (k \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) + 2k}{gt^2 (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) (\operatorname{sen} \alpha - k \cos \alpha) - 2k}.$$

99. Examinemos o canal que forma um ângulo arbitrário φ com a vertical (fig. 316). Se $k < \operatorname{ctg} \varphi$, então, o trajeto percorrido pelo grão de areia é $S = at^2/2$, onde

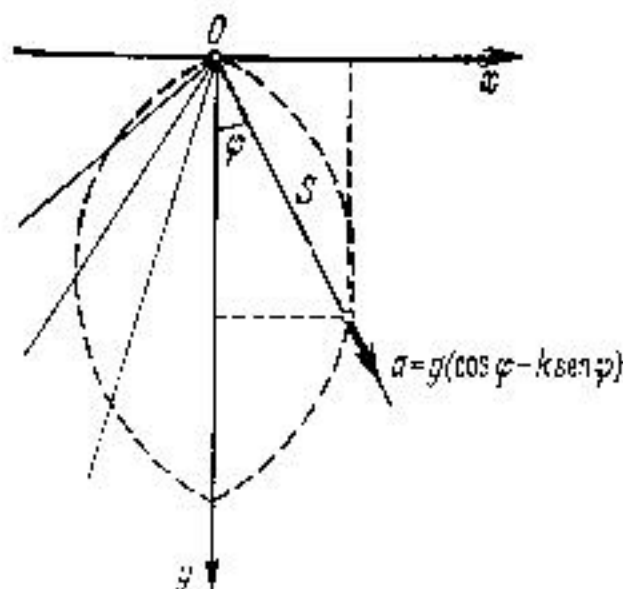


Fig. 316

$a = g(\cos \varphi - k \sin \varphi)$. As coordenadas do grão de areia são: $x = S \sin \varphi$, $y = S \cos \varphi$, donde:

$$x^2 + y^2 = S^2 = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 \left(\frac{y}{S} - k \frac{x}{S}\right)^2,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 = (gt^2/2)^2 (y - kx)^2.$$

Consideremos que $k < y/x$ e simbolizemos por $A = gt^2/4$. Então

$$x^2 + y^2 = 2A(y - kx).$$

A última equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$(x + kA)^2 + (y - A)^2 = A^2(1 + k^2).$$

Esta é a equação da circunferência de raio $R = A\sqrt{1+k^2} =$

$\left(\frac{gt^2}{4}\right)\sqrt{1+k^2}$, com centro localizado a baixo do ponto O ,

em uma distância $A = \frac{gt^2}{4}$ e à esquerda da vertical em uma

distância $kA = kgt^2/4$. No outro lado da vertical, o lugar geométrico dos pontos procurados é um arco análogo.

100. Das equações do movimento obtemos para a aceleração da pedra as seguintes expressões:

$a_1 = g(\sin \alpha + k \cos \alpha)$, quando o movimento é para cima,

$a_2 = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$, quando o movimento é para baixo.

As equações cinemáticas são escritas do seguinte modo:

$$l = v_0 t_1 - a_1 t_1^2/2, \quad l = a_2 t_2^2/2,$$

$$v_0 - a_1 t_1 = 0.$$

Resolvendo o sistema dessas cinco equações, temos

$$k = \frac{2l - gt_1^2 \sin \alpha}{gt_1^2 \cos \alpha} \approx 0,37,$$

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{l}{gt_1^2 \sin \alpha - l}} = 4,2 \text{ s.}$$

101. A carreta inicialmente tem movimento uniformemente retardado. A velocidade da carreta é $v = v_0 - (f/M)t$, onde f é a força de fricção igual a kmg . O corpo tem movimento uniformemente acelerado. A velocidade do corpo é $u = (f/m)t$. Se a carreta é comprida, então, a velocidade do corpo e da carreta poderão tornar-se iguais. Isso ocorrerá no momento de tempo $\tau = v_0/(f/m - f/M)$. Depois disto, o corpo e a carreta começarão a movimentar-se com velocidade constante $Mv_0/(M + m)$. A carreta até esse momento de tempo, percorrerá o trajeto $S = v_0 \tau - (f/2M)\tau^2$ e o corpo, $s = (f/2m)\tau^2$. O trajeto percorrido pelo corpo, relativamente à carreta é igual a $S - s$. Esse trajeto deverá ser menor do que l . Deste modo, o corpo não abandonará a carreta, quando $S - s \leq l$, i.é.,

$$\frac{Mv_0^2}{2gk(M+m)} \leq l.$$

102. Se $F \leq k(m + M)g$, não há movimento. Suponhamos, que $F > k(m + M)g$. Analisemos o caso de ausência de escorregamento do corpo pela barra. As equações do movimento, nesse caso, terão a seguinte forma:

$$ma = f, \quad Ma = F - f - k(m + M)g; \quad F \leq kmg,$$

donde

$$a = \frac{F}{m + M} - kg, \quad f = \frac{mF}{m + M} - kmg \leq kmg,$$

que é possível, se

$$k(m + M)g < F < 2k(m + M)g.$$

Se $F > 2k(m + M)g$, então o corpo deslizará pela barra. Nesse caso, as equações do movimento têm a seguinte forma:

$$ma = kmg, \quad Mb = F - kmg - k(M + m)g,$$

donde

$$a = kg, \quad b = \frac{F}{M} - k \frac{(2m + M)}{M} g.$$

Que é facilmente verificável no caso de $b > a$.

103. As equações do movimento da barra e do corpo têm a seguinte forma:

$$ma = f, \quad (1)$$

$$Mb = F - f, \quad (2)$$

onde f é a força de fricção; a e b são as acelerações. Suponhamos que não há deslizamento, então $a = b$. Das equações do movimento podemos determinar a aceleração e a força de fricção. A força de atrito é $f = mF/(M + m)$. A fim de não ocorrer deslizamento, a força de fricção deve satisfazer a seguinte desigualdade: $f \leq kmg$, i.e., $F/(M + m) \leq kg$. Se $F > k(M + m)g$, então, haverá deslizamento. As equações (1) e (2), nesse caso, são escritas da seguinte forma:

$$ma = kmg, \quad Mb = F - kmg.$$

Dessas equações obtemos a e b : $a = kg$, $b = (F - kmg)/M$. É evidente, que $b > a$. A aceleração do corpo relativamente à barra estará dirigida para o lado oposto ao movimento e em grandeza é igual a $(F - kmg)/M - kg$. O tempo de movimento do corpo pela barra é:

$$\tau = \sqrt{\frac{2lM}{F - kg(M + m)}}.$$

104. 1) As forças que agem na mesa e no peso estão representadas na fig. 317. As equações do movimento na direção horizontal têm a seguinte forma:

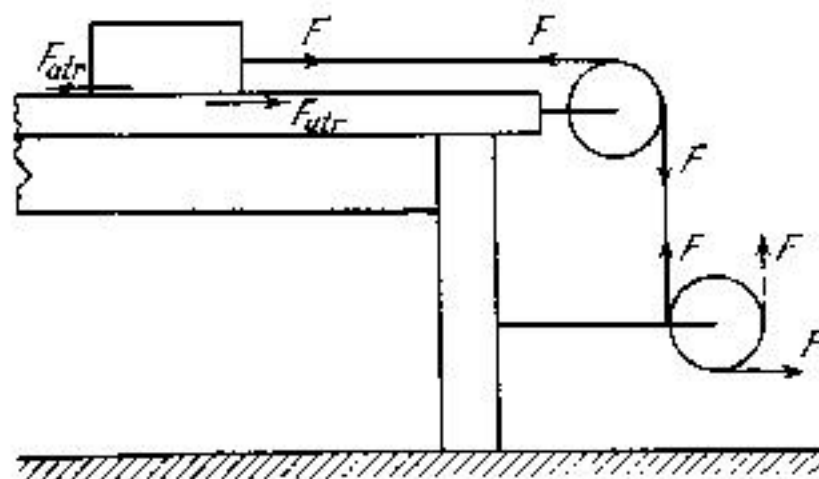


Fig. 317

para a mesa com as roldanas

$$F - F + F_{\text{atr}} = \frac{P_1}{g} a_1;$$

para o peso,

$$F - F_{\text{atr}} = \frac{P_2}{g} a_2.$$

Suponhamos, que a força F seja tão pequena, que o peso não escorrega pela mesa. Então temos $a_1 = a_2$ e $F_{\text{atr}} = FP_1/(P_1 + P_2)$. Aumentando gradualmente a força F , nós aumentaremos, também gradualmente, a força de atrito F_{atr} . Entretanto, se a mesa

e o peso estiverem imóveis, um relativamente ao outro, então, a força de atrito entre os mesmos, não poderá ultrapassar o seguinte valor: $F_{\text{atr. máx}} = kP_2$. Em virtude disso, o deslizamento do peso pela mesa inicia-se para

$$F > F_{\text{atr. máx}} \frac{P_1 + P_2}{P_1} = k \frac{P_2}{P_1} (P_1 + P_2) = 100 \text{ N}.$$

No nosso caso, $F = 80 \text{ N}$, consequentemente, o peso não escorregará e temos, então, que:

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{P_1 + P_2} g = \frac{8}{25} g \approx 3,14 \text{ m/s}^2.$$

- 2) As equações do movimento para a mesa com as roldanas e o peso, nesse caso, têm a seguinte forma:

$$-F + F_{\text{atr}} = \frac{P_1}{g} a_1, \quad F - F_{\text{atr}} = \frac{P_2}{g} a_2.$$

As acelerações da mesa e do peso estão dirigidas em sentidos opostos, e, portanto, o escorregamento será obrigatório. Consequentemente, temos que $F_{\text{atr}} = kP_2$. A aceleração da mesa é:

$$a_1 = \frac{-F + kP_2}{P_1} g = -\frac{2}{15} g \approx -1,31 \text{ m/s}^2.$$

A mesa mover-se-á para a esquerda.

105. A conta ao mover-se sofre a ação de duas forças: a força de atrito kN e a força de reação N . A aceleração absoluta estará dirigida segundo a força resultante F . Da fig. 318, deduz-se que:

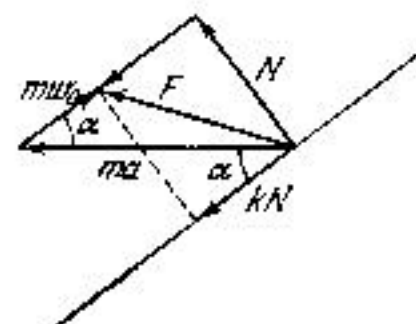


Fig. 318

$N = ma \sin \alpha$, $mg = a \cos \alpha + kN/m = a (\cos \alpha + k \sin \alpha)$,
donde

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{a (\cos \alpha + k \sin \alpha)}}.$$

Se $k \gg \cot \alpha$, então, a conta não se moverá relativamente à barra e, nesse caso, a força de atrito será $ma \cos \alpha$.

106. Baseando-se na segunda lei do Newton, temos que a variação da quantidade de movimento do sistema canhão-projétil, no

momento do tiro τ , deverá ser igual ao impulso das forças que agem no sistema. Então, temos que:

$$mv_0 \cos \alpha = Mv_2 + F_{\text{atr}} \tau,$$

onde $F_{\text{atr}} \tau$ é o impulso das forças de atrito na vertical,

$$mv_0 \sin \alpha = N\tau - (Mg + mg)\tau,$$

onde $N\tau$ é o impulso das forças de pressão normal (reação da área horizontal) e $(Mg + mg)\tau$ é o impulso das forças do peso. Considerando que $F_{\text{atr}} = kN$, obtemos:

$$v_1 = \frac{m}{M} v_0 \cos \alpha - k \frac{m}{M} v_0 \sin \alpha - k \frac{M+m}{M} g\tau,$$

ou, uma vez que $g\tau \ll v_0$, obtemos:

$$v_1 \approx \frac{m}{M} v_0 (\cos \alpha - k \sin \alpha).$$

A solução é válida para $k \ll \operatorname{ctg} \alpha$. Para $k > \operatorname{ctg} \alpha$ o canhão permanece imóvel.

107. 1) A aceleração no momento inicial é $a_0 = F/M \approx 13,3 \text{ m/s}^2$. Em função do tempo, a aceleração varia segundo a lei $a = F/(M - \mu t)$, onde $\mu = 200 \text{ kg/s}$ é a massa do combustível gasta pelo foguete em um segundo. O gráfico da aceleração tem a forma que se vê na fig. 319. A velocidade depois de 20 s

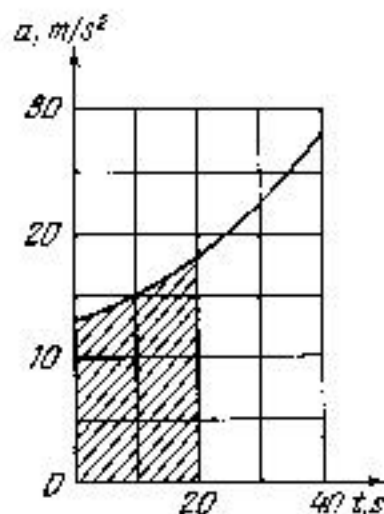


Fig. 319

é numericamente igual a área sombreada no desenho, i.é., $v \approx 300 \text{ m/s}$.

2) De acordo com a segunda lei de Newton, podemos escrever que:

$$(M - \mu t) a = F - (M - \mu t) g - f.$$

Segundo as condições do problema, temos que $t = 20 \text{ s}$ e $a = 0,8 \text{ g}$. Obtemos, então, a força de resistência do ar:

$$f = F - (M - \mu t) g - (M - \mu t) 0,8 \text{ g} \approx 125 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

3) A equação de Newton para o peso tem a seguinte forma: $m_1 a = kx - m_1 g$, onde m_1 é a massa do peso no extremo da mola; a é a aceleração do foguete; k é o coeficiente de elasticidade da mola; x é o alongamento da mola. Segundo a condição do problema, temos $m_1 g = kx_0$, consequentemente, $x = \frac{l_0}{g} (a + g)$.

A escala do aparelho deverá ser uniforme. A divisão em um centímetro corresponde à aceleração g .

108. No sistema de coordenadas, ligado ao segundo cubo, temos:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_1 l, \quad v_2^2 - v_1^2 = 2a_2 l,$$

onde $a_1 = -F(2M + m)/2Mm$ é a aceleração da bala no primeiro cubo; v_1 é a velocidade da bala ao sair do mesmo; $a_2 = -F(M + m)/Mm$ é a aceleração da bala no segundo cubo; v_2 é a velocidade da bala ao sair do segundo cubo. Supondo $v_1 = 0$, encontramos o limite inferior da velocidade v_0 e supondo $v_2 = 0$, obtemos o limite superior. Consequentemente, temos:

$$\sqrt{Fl(2M + m)/mM} \leq v_0 \leq \sqrt{Fl(4M + 3m)/mM}.$$

§ 5. LEI DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

109. Dividamos a massa do disco em pares de elementos iguais, os quais estão localizados em um mesmo diâmetro, a iguais distâncias do centro. A quantidade de movimento de cada par é igual a zero, uma vez que a quantidade de movimento de ambas as massas são iguais e estão dirigidas em sentidos opostos. Consequentemente, a quantidade de movimento de todo o disco é igual a zero.

110. Suponhamos, que a massa da canoa seja M , a massa da carga seja m e a velocidade inicial das canoas seja v_0 . Ao ser lançada a carga da canoa, na mesma atua uma certa força perpendicular a v_0 . Entretanto, a variação da quantidade de movimento da canoa não ocorrerá, uma vez que a força de resistência da água impede o movimento transversal das canoas. A quantidade de movimento da canoa variará somente pela queda da carga na mesma.

Utilizando a lei de conservação da quantidade de movimento no sistema canoa-carga, no primeiro caso podemos escrever:

$$(M + m) v_0 = mv_1 + (M + 2m) v_2 \quad \text{para uma canoa.}$$

$$M v_0 = mv_2 + (M + m) v_2 \quad \text{para a outra canoa.}$$

v_1 e v_2 são as velocidades finais das mesmas. Do sistema de equações dado, obtemos, que:

$$v_1 = -v_2 = \frac{M}{M + 2m} v_0.$$

No caso em que as cargas são lançadas simultaneamente, as velocidades finais das canoas v_1' e v_2' são determinadas das seguintes

tes equações:

$$Mv_0 - mv_0 = (M + m)v'_1,$$

$$-Mv_0 + mv_0 = (M + m)v'_2.$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $v'_1 = -v'_2 = \frac{M - m}{M + m}v_0$. Deste modo, a velocidade final das canoas no primeiro caso será maior.

111. A quantidade de movimento do sistema tábua-rã, na direção horizontal, não varia. Consequentemente, podemos escrever que:

$$mv_0 \cos \alpha = Mu,$$

onde u é a velocidade da tábua relativamente à superfície imóvel do lago. A fim de que a rã atinja o outro extremo da tábua, deverá ser satisfeita a seguinte condição:

$$L - u\tau = (v_0 \cos \alpha)\tau,$$

onde τ é o tempo no decorrer do qual a rã encontra-se no ar; o mesmo é igual a $\tau = 2v_0 \sin \alpha / g$. Das equações existentes, podemos determinar v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(m/M + 1) \sin 2\alpha}}.$$

112. Considerando, que na direção horizontal o sistema bescuro-cunha é fechado, para determinarmos a velocidade v da cunha, podemos utilizar a lei de conservação da quantidade de movimento

$$Mv + m(v - u \cos \alpha) = 0,$$

onde $(v - u \cos \alpha)$ é a componente horizontal da velocidade do bescuro, relativamente a um sistema de coordenadas imóveis. Então, obtemos:

$$v = \frac{m}{M + m} u \cos \alpha.$$

113. Uma vez que não existem forças externas que agem no sistema, na direção horizontal, a projeção da quantidade de movimento total do sistema cunha-cargas, na direção horizontal, continuará constante (igual a zero). Daqui, deduz-se que a cunha começará a mover-se somente no caso do movimento das cargas. A fim de que a carga m_1 movimente-se para a direita, deve ser satisfeita a seguinte condição:

$$m_1 g \sin \alpha \geq m_2 g + k m_2 g \cos \alpha.$$

Donde: $m_1/m_2 \leq \sin \alpha + k \cos \alpha$. Para essa condição, a cunha deslocar-se-á para a esquerda. A fim de que a carga m_2 mova-se para a esquerda, deverá ser verificada a seguinte condição.

$$m_1 g \geq m_2 g \sin \alpha + k m_2 g \cos \alpha,$$

ou $m_1/m_2 \geq \sin \alpha + k \cos \alpha$. A cunha, nesse caso, mover-se-á para a direita. Consequentemente para o equilíbrio da cunha a relação das massas das cargas deverá satisfazer a seguinte

desigualdade:

$$\sin \alpha - k \cos \alpha \leq m_1/m_2 \leq \sin \alpha + k \cos \alpha.$$

114. Para a direção ao longo do plano inclinado, podemos escrever
- $$mv \cos \alpha + Mu = 0,$$

onde u é a velocidade da caixa no momento em que a pedra atinge a mesma. Essa velocidade é igual a $u = \sqrt{2gS \sin \alpha}$. Consequentemente temos

$$v = -\frac{M}{m} \sqrt{\frac{2gS \sin \alpha}{\cos \alpha}}.$$

115. No ponto máximo de ascensão do foguete a velocidade do mesmo é igual a zero. A variação da quantidade de movimento total dos pedaços do foguete, sob a ação das forças externas (forças gravitacionais), é extremamente insignificante, uma vez que o impulso destas forças é muito pequeno, em virtude da curta duração da explosão. Consequentemente, a quantidade de movimento total das partes do foguete, antes e depois da explosão, permanece constante e é igual a zero. Entretanto, os três vetores ($m_1 v_1$, $m_2 v_2$, $m_3 v_3$) terão a resultante igual a zero, quando os mesmos estiverem localizados em um mesmo plano. Daqui concluímos, que os vetores v_1 , v_2 , v_3 localizam-se em um mesmo plano.

116. A velocidade da canoa, relativamente à margem v , está relacionada com a velocidade u do homem, relativamente à mesma, pela relação $u = \frac{m}{m + M} v$. A relação das velocidades, no decorrer do movimento, permanece constante. Como consequência disso, a relação dos caminhos percorridos será igual a relação das velocidades: $S/l = m/(m + M)$, onde S é o trajeto percorrido pela canoa e l é o comprimento da mesma (distância percorrida pelo homem relativamente à canoa). Consequentemente, a fim de que a canoa atraque, o comprimento da mesma não pode ser menor do que $l = \frac{m + M}{m} S = 2,5$ m. A canoa não atracará.

117. Tomemos como origem das coordenadas o ponto donde o homem iniciou seu movimento. Então, a coordenada inicial do centro das massas será:

$$x_1 = \frac{m_1 l/2 + m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Simbolizemos por x_2 a coordenada do centro das massas no momento, em que o homem atinge o extremo da plataforma. Então

$$x_2 = \frac{m_1 (l/2 - s) + m_2 (l - s) + m_3 (l/2 - s)}{m_1 + m_2 + m_3},$$

onde s é o deslocamento da plataforma. Uma vez que na direção horizontal, o sistema homem-criança-plataforma é fechado,

então $x_1 = x_2$. Desta igualdade encontramos s que é igual a:

$$s = \frac{2m_2 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \frac{l}{2}.$$

Segundo os valores numéricos dados, obtemos: $s = 0,6$ m.

118. Na direção horizontal do sistema aró besouro não atuam forças externas. Por isso, o centro de gravidade do sistema (ponto C na fig. 320) não se deslocará no plano horizontal. A distância

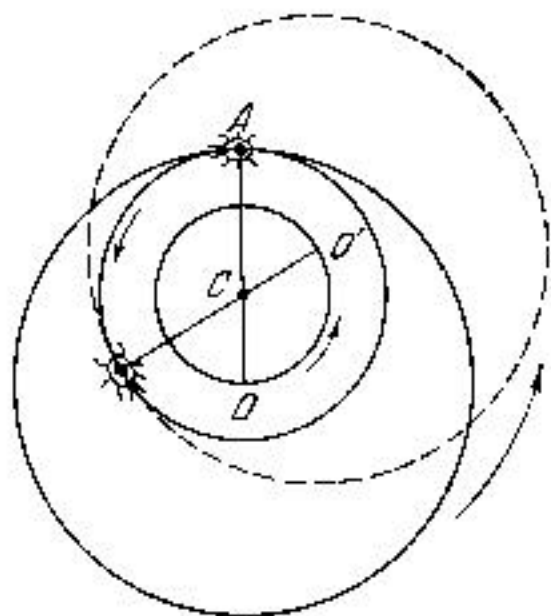


Fig. 320

do centro de gravidade do sistema até o centro do aró é $CO = \frac{m}{m+M} R$. Uma vez que essa distância é constante, o centro do aró O descreverá, relativamente ao ponto imóvel C , uma circunferência de raio CO . Pode-se verificar facilmente, que a trajetória do besouro tem a forma de uma circunferência de raio $AC = \frac{M}{m+M} R$. A localização mútua, assim como a direção do movimento do besouro e do aró, estão indicadas na fig. 320.

119. Simbolizemos por v_k a velocidade do foguete no final do k -ésimo segundo. No final do $(k+1)$ -ésimo segundo, do foguete é lançado o gás de massa m , que leva uma quantidade de movimento $m(-u - v_k)$. Da lei de conservação da quantidade de movimento, deduz-se que:

$$(M - km) v_k = [M - (k+1)m] v_{k+1} + m(-u - v_k).$$

A variação da velocidade do foguete em 1 s é igual a:

$$v_{k+1} - v_k = \frac{mu}{M - (k+1)m}.$$

Conhecendo-se a variação da velocidade em 1 s pode-se encontrar a expressão para a velocidade no final do n -ésimo segundo:

$$v_n = v_0 + u \left(\frac{m}{M-m} + \frac{m}{M-2m} + \dots + \frac{m}{M-nm} \right).$$

120. A velocidade do foguete aumentará. Isto torna-se evidente, se adotarmos um sistema de coordenadas, relativamente ao qual o foguete, em um determinado momento, ficará em repouso. A pressão dos gases expelidos impulsionará o foguete para a frente.
121. Para a análise de todas as quatro possibilidades possíveis, simbolizaremos por v_1 a velocidade inicial do projétil, relativa-

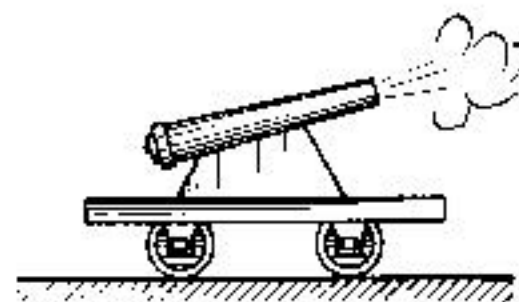


Fig. 321

mente ao canhão; por v_2 , a velocidade inicial do projétil, relativamente à terra; por β , o ângulo de inclinação do cano do canhão; por γ , o ângulo de inclinação do vetor da velocidade inicial v_2 (fig. 321). As relações entre as grandezas indicadas são determinadas pelas seguintes igualdades:

$$v_1 \cos \beta = v = v_2 \cos \gamma, \quad (1)$$

$$v_1 \sin \beta = v_2 \sin \gamma, \quad (2)$$

$$mv_2 \cos \gamma + Mv = 0. \quad (3)$$

Consideremos, como sendo v_1 a velocidade inicial do projétil relativamente à terra, e o ângulo α como o ângulo de inclinação do vetor v_1 (i.e. $v_0 = v_1$, $\alpha = \gamma$), então, da equação (3) obtemos:

$$v = -\frac{m}{M} v_2 \cos \gamma = -\frac{m}{M} v_0 \cos \alpha.$$

Consideremos, agora, v_1 como sendo a velocidade inicial do projétil, relativamente ao cano do canhão, que está dirigida em um ângulo α com relação à horizontal ($v_0 = v_1$, $\alpha = \beta$). Então, das equações (1) e (3), obtemos, que:

$$v = -\frac{m}{M-m} v_1 \cos \beta = -\frac{m}{M+m} v_0 \cos \alpha.$$

Se é dada a velocidade inicial, relativamente à terra, e o ângulo de inclinação do canhão ($v_0 = v_1$, $\alpha = \beta$), então, temos que:

$$v = \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \sin^2 \beta + M^2 \cos^2 \beta}} v_0 \cos \beta =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \sin^2 \alpha + M^2 \cos^2 \alpha}} v_0 \cos \alpha.$$

Finalmente, se v_0 é a velocidade inicial, relativamente ao cano do canhão, e o ângulo de inclinação do vetor da velocidade inicial, relativamente à terra (ângulo inicial da trajetória) é conhecido, temos $v_0 = v_1$ e $\alpha = \gamma$ e obtemos:

$$v = \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \cos^2 \gamma + M^2 \sin^2 \gamma}} v_1 \cos \gamma =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \cos^2 \alpha + M^2 \sin^2 \alpha}} v_0 \cos \alpha.$$

Em todos os casos, o sinal negativo indica que o canhão movimenta-se em sentido oposto ao movimento do projétil.

§ 6. ESTATICA

122. Analisemos uma parte da corda adjacente ao cilindro. Dividamos o ângulo θ em um grande número de partes n , e simbolizemos por $\theta/n = \alpha$ uma das partes. Suponhamos, que a corda é composta de n pedaços ligados entre si e destaquemos um pedaço qualquer j (fig. 322). Nesse pedaço atuam as forças T_j e T_{j+1} das demais partes da corda, a reação do cilindro N_j e a força de atrito kN_j . Considerando, que o ângulo α é pequeno, obtemos a seguinte equação de equilíbrio:

$$T_{j+1} - T_j - kN_j = 0,$$

$$N_j - T_j \alpha/2 - T_{j+1} \alpha/2 = 0.$$

Destas equações obtemos:

$$T_{j+1} = T_j (1 + k\alpha), \text{ i.e.,}$$

$$T_1 = T_0 (1 + k\alpha),$$

$$T_2 = T_1 (1 + k\alpha), \dots,$$

$$T_n = T_{n-1} (1 + k\alpha).$$

Consequentemente, temos $T_n = T_0 (1 + k\alpha)^n = T_0 (1 + k\theta/n)^n$. O para $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0 (1 + k\theta/n)^n = T_0 e^{k\theta},$$

onde $e = 2,71828\dots$ é a base dos logaritmos neperianos.

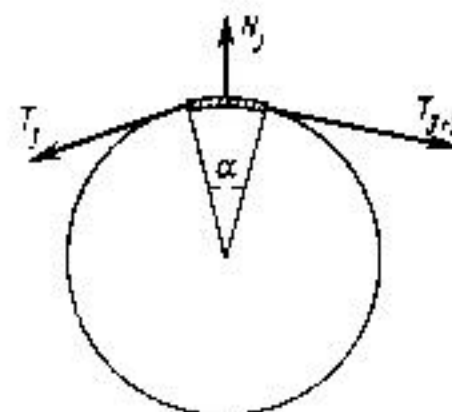


Fig. 322

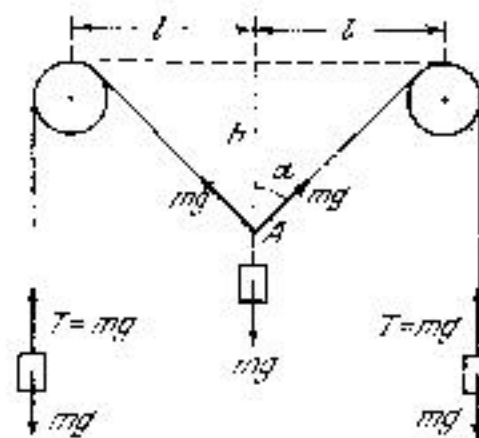


Fig. 323

123. Na posição de equilíbrio (fig. 323), temos $mg - 2mg \cos \alpha = 0$ e, consequentemente, $\alpha = 60^\circ$. A distância procurada é $h = l \cotg \alpha = l/\sqrt{3}$. O equilíbrio estabelece-se depois de extintas as oscilações, provocadas pela descida da carga.
124. A igualdade das projeções das forças na direção vertical (fig. 324), conduz a seguinte equação:

$$2N \sin (\alpha/2) - 2F_{\text{atr}} \cos (\alpha/2) = 0$$

onde N é a força de pressão normal e $F_{\text{atr}} \leq kN$ é a força de atrito. (Normalmente pode-se desprezar a massa da cunha). Resolvendo a equação, obtemos, que $\lg (\alpha/2) \leq k$ e $\alpha \leq 2 \arctg k$.

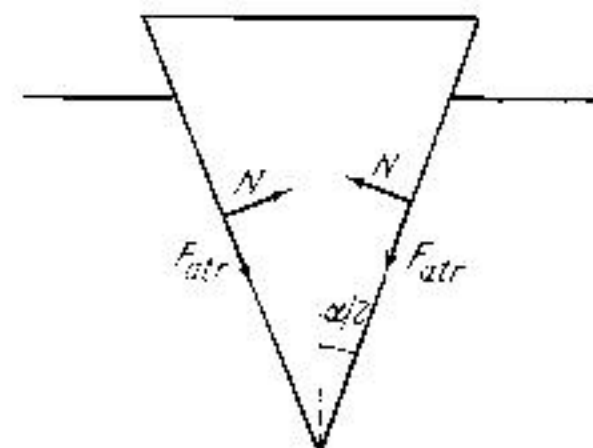


Fig. 324

125. Se o peso P desce em uma altura h , então, o ponto A descerá em $1/3 h$ e o peso Q , consequentemente, elevar-se-á em $2/3 h$. Utilizando a regra fundamental da mecânica, temos que: $Ph = Q \cdot 2/3 h$, donde obtemos $P = 2/3 Q$.
126. Se a caixa não vira, então, o momento da força F , que gira a mesma em sentido anti-horário em redor da aresta da base, é menor,

ou igual ao momento da força de gravidade, que gira a caixa no sentido horário. A fim de que a caixa deslize, a força F deverá ser maior do que a força de atrito máxima aplicada à caixa. Consequentemente, temos, que $Fh \leq mgl/2$, $F \geq kmg$, donde $k \leq 1/2h$.

127. Para girar-se a barra, é necessário que o momento das forças aplicadas aos extremos da mesma, seja maior do que o momento das forças de atrito, quando estas forças atingem seu valor máximo. As forças de atrito estão distribuídas uniformemente ao longo da barra (fig. 325). O braço médio das forças de atrito, que

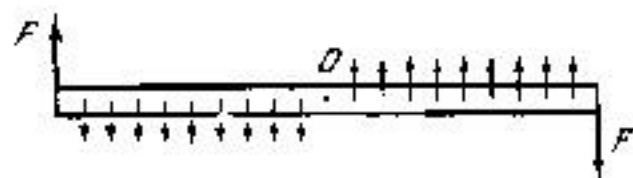


Fig. 325

agem na parte esquerda, ou direita da barra, é igual a $l/4$, onde l é o comprimento total da barra. O momento de todas as forças de atrito, relativamente ao centro da barra, é $2(kP/2)(l/4)$. Consequentemente, para o giro da barra há necessidade de que as forças F aplicadas, satisfaçam a desigualdade $2Fl/2 > kPl/4$. Desta desigualdade obtemos $F > kP/4$. Para o deslocamento de translação da barra é necessário que $2F > kP$. Consequentemente, será mais fácil girar a barra.

128. A equação do movimento do peso tem a seguinte forma: $P_0 a/g = F - P_0$ (fig. 326). A soma das forças que agem no guinaste

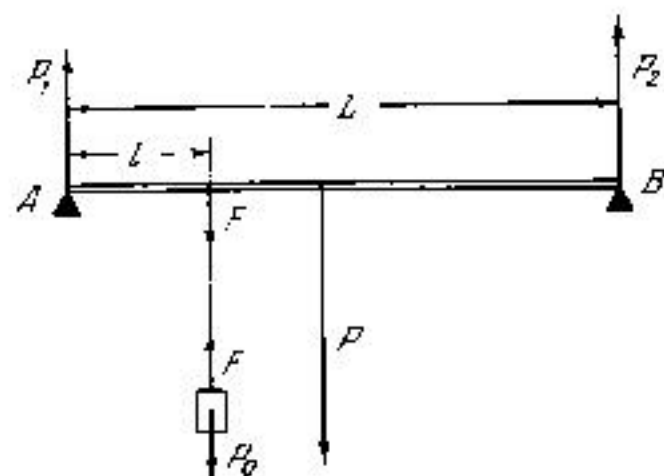


Fig. 326

verticalmente, é igual a zero. Por isso $P_1 + P_2 = P + F$. A soma dos momentos das forças relativamente ao ponto A é igual a zero; consequentemente, $F l + P l/2 = L P_2$. Resol-

vendo o sistema de equações, encontramos que

$$P_1 \approx 2,23 \cdot 10^3 \text{ N}, \quad P_2 \approx 1,77 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

129. Para o equilíbrio, a força da alavanca, aplicada no ponto D, deverá criar um momento igual a $P \cdot AB$. A força será mínima para o braço máximo, igual a BD . Consequentemente, temos, que: $F = P \cdot AB/BD = P/\sqrt{2}$ e está dirigida perpendicularmente a BD .
130. Se o atrito entre o chão e as caixas não existe, então as caixas mover-se-ão simultaneamente. Se o coeficiente de atrito não for igual a zero, então, a caixa localizada à direita mover-se-á principalmente (ver a fig. 49), uma vez que a força aplicada à mesma, por parte da barra, será maior do que a força aplicada à caixa da esquerda. Realmente, da caixa à direita na barra age a força F_1 , oposta a F e da caixa à esquerda, a força F_2 , de mesma direção que F . A soma das forças em equilíbrio é igual a zero. Consequentemente $F_1 = F - F_2$ e a força F_2 , antes da força F_2 atingirá o valor máximo da força de atrito de repouso.
131. A soma dos momentos das forças, que agem na bola, relativamente ao ponto A, é igual a zero (fig. 327) e, consequentemente,

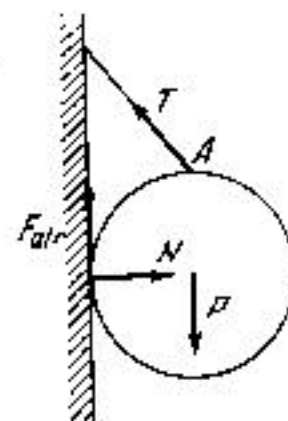


Fig. 327

podemos escrever a seguinte equação:

$$F_{\text{atr}} \cdot R - N R = 0.$$

Uma vez que $F_{\text{atr}} \leq kN$, então $k \geq 1$.

132. A fim de que o corpo encontra-se em equilíbrio, é necessário que a soma dos momentos das forças, que tendem a girar o corpo no sentido horário, seja igual ao momento das forças, que tendem a girar o corpo no sentido anti-horário, em redor de um ponto qualquer (por exemplo, em redor do centro de gravidade). No caso dado, o momento das forças de atrito, que giram o tijolo no sentido horário, deve ser igual ao momento das forças de pressão do plano no tijolo. Daqui, deduzimos, que a força de pressão do plano na parte direita do tijolo será maior do que na parte esquerda. Segundo a terceira lei de Newton, a força de pressão da metade à direita do tijolo no plano será maior, do que a força de pressão da metade à esquerda.

133. A fim de que o rolo suba um degrau é necessário que o momento das forças que giram o rolo em redor do ponto A (fig. 328), no sentido anti-horário, seja, em último caso, igual ao momento das forças, que giram o rolo no sentido horário. Temos, então,

$$P(R-h) = P\sqrt{R^2 - (R-h)^2},$$

donde obtemos: $h = (2 \pm \sqrt{2})R/2$. Uma vez que $h < R$, então

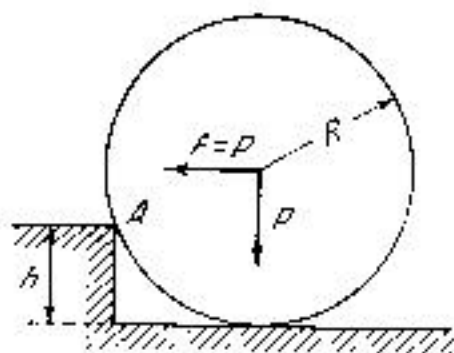
$$h = (1 - \sqrt{2}/2)R \approx 0.29R.$$


Fig. 328

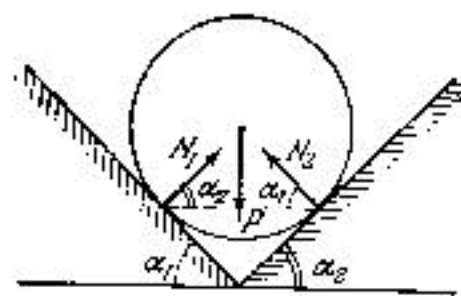


Fig. 329

134. Uma vez que em um dos planos, a força de atrito é zero, então, será igual a zero, também, no outro plano. Em caso contrário, o bola giraria em redor do seu centro, pois o momento de todas as demais forças, relativamente a este centro, é igual a zero (em virtude de serem iguais a zero os braços de cada uma destas forças, relativamente ao centro da bola). As somas das projeções das forças, nas direções vertical e horizontal, são iguais a zero (fig. 329). Temos, então:

$$N_1 \cos \alpha_2 - N_2 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$P - N_1 \sin \alpha_2 - N_2 \sin \alpha_1 = 0,$$

onde N_1 e N_2 são as forças de pressão procuradas. Donde

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$N_2 = \frac{P}{\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

135. Simbolizemos por F a força aplicada a uma alça. Como consequência da ação da força F , a gaveta movimentar-se-á e, em virtude disso, surgirão nos pontos A e B as forças elásticas N_1 e N_2 (fig. 330), que agirão sobre a gaveta por parte do armário. Estas forças aplicadas à gaveta são iguais uma à outra: $N_1 = N_2 = N$. Supondo, que o momento de todas as forças, relativamente ao centro da gaveta C , é igual a zero, temos, que $N = Fl/2a$. A gaveta movimentar-se-á se a força aplicada F , for maior do que o valor máximo da força de atrito de repouso,

i.é., $F > l_1 + f_2 = 2kN$. A fim de ser satisfeita a última desigualdade, é necessário que $k < a/l$.

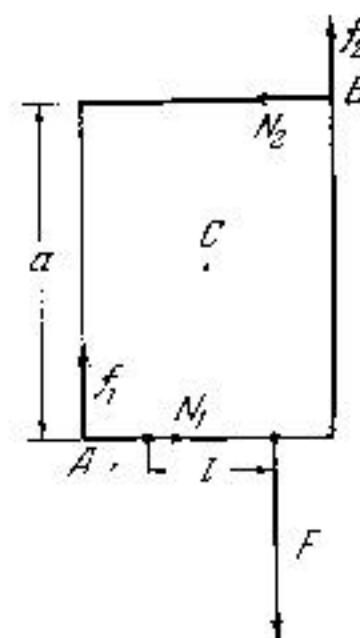


Fig. 330

136. A tábua inclinada em um ângulo α , relativamente à horizontal em um tronco áspero, é análoga ao corpo mantido pelas forças de atrito em um plano inclinado, que tem um ângulo de base igual a α . Temos, então, que nas condições de equilíbrio $F_{\text{atr}} = mg \sin \alpha$. Considerando, $F_{\text{atr}} \leq kmg \cos \alpha$, obtemos $\operatorname{tg} \alpha \leq k$.
137. As forças aplicadas à escada estão representadas na fig. 331. Em caso de equilíbrio, a soma das projeções das forças, ao longo

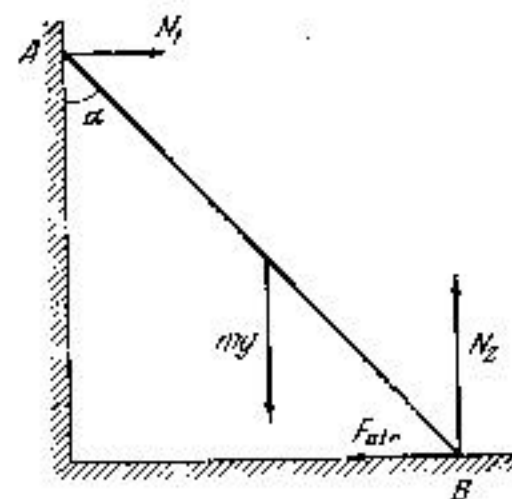


Fig. 331

da vertical e da horizontal, serão iguais a zero. Consequentemente, $N_1 = F_{\text{atr}}$ e $N_2 = mg$. Considerando que a soma dos momentos das forças, relativamente ao ponto B , é igual a zero, obtemos ainda uma equação:

$$N_1 \cos \alpha = (mg \sin \alpha)/2.$$

Resolvendo o sistema, temos que $F_{\text{atr}} = (mg \tan \alpha)/2$. Uma vez que a força de atrito satisfaz a seguinte desigualdade $F_{\text{atr}} \leq kN_1$, então, para o equilíbrio obtemos a seguinte condição, que é necessária e suficiente: $\tan \alpha \leq 2k$.

138. As forças aplicadas à escada estão representadas na fig. 332. Considerando, que a soma das forças e as somas dos momentos

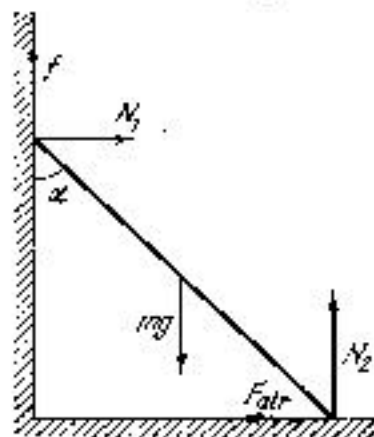


Fig. 332

das forças são iguais a zero, obtemos que:

$$f + N_2 = mg, \quad (1)$$

$$N_1 = F_{\text{atr}}, \quad (2)$$

$$f \sin \alpha + N_1 \cos \alpha = (mg \sin \alpha)/2, \quad (3)$$

As forças de atrito f e F_{atr} satisfazem as desigualdades $f \leq kN_1$ e $F_{\text{atr}} \leq kN_2$. Utilizando a primeira desigualdade e as equações (1) e (3), obtemos que: $\tan \alpha \geq N_2/2N_1 = k/2$. Uma vez que $k \geq N_1/N_2$, então $\tan \alpha \geq (1 - k^2)/2k$. Introduzindo a simbolização: $k = \tan \beta$, obtemos uma forma mais conveniente do cálculo, i.e., $\tan \alpha \geq \tan 2\beta$, ou $\alpha \leq 2\beta$.

139. Se no momento em que o extremo da barra B começa a elevar-se, o valor da força de atrito $F_{\text{atr}} \leq kN$ for suficiente para impedir, que o extremo A escorregue, então, a barra começará a girar em redor do ponto A . Em caso contrário, o extremo A começa a escorregar até o momento, em que a força de atrito $F_{\text{atr}} = kN$ não for suficiente para manter a barra em equilíbrio (fig. 333). Depois disto, a barra começará a girar em redor do extremo A . Determinemos quais valores deverá ter o coeficiente de atrito k , a fim de que o escorregamento cesse para determinado ângulo α ,

entre a barra e a corda. A igualdade das forças no momento, em que a barra está quase na posição horizontal, conduz às seguintes equações:

$$F_{\text{atr}} = T \cos \alpha, \quad P = N + T \sin \alpha.$$

A igualdade dos momentos das forças relativamente ao ponto A são escritas da seguinte forma:

$$Pl/2 = Tl \sin \alpha.$$

Utilizando o sistema de equações dado, encontramos que:

$$k = F_{\text{atr}}/N = \tan \alpha.$$

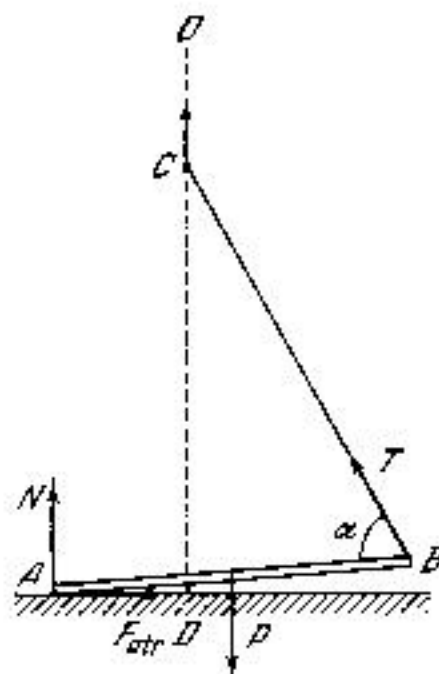


Fig. 333

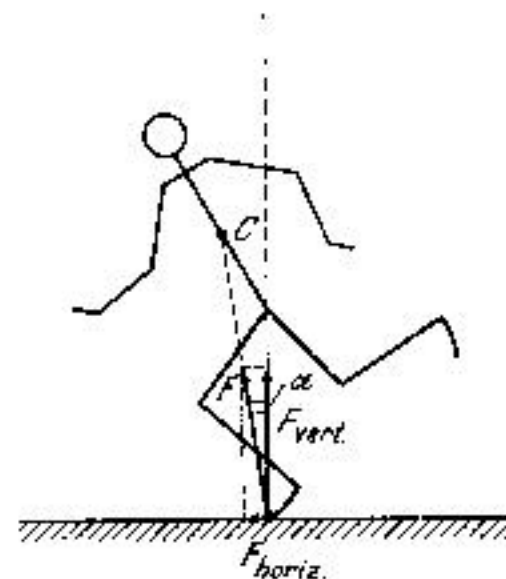


Fig. 334

A fim de que a barra não escorregue, é necessário que $k \geq \tan 60^\circ = 1/\sqrt{3}$.

140. A soma dos momentos das forças, que agem no homem relativamente ao seu centro de gravidade, é igual a zero. Por isto a força F de reação da terra está obrigatoriamente dirigida ao centro de gravidade do homem C (fig. 334). A componente horizontal desta força não pode ser maior do que a força máxima de atrito de repouso, i.e., $F \sin \alpha \leq kF \cos \alpha$, donde $k \geq \tan \alpha$.
141. Na escada atuam a força de gravidade P , a força de reação da terra F e a reação do apoio N . Uma vez que a parede é lisa, a força N (fig. 335) é perpendicular à mesma. A direção da força F é mais fácil de determinar, se encontrarmos o ponto, relativamente ao qual os momentos das forças P e N são iguais a zero. Este ponto será o ponto de intersecção das retas ON e OP . Então,

o momento da força F , relativamente a este ponto, deverá ser também igual a zero. Consequentemente, a força deverá estar dirigida de tal modo que passe pelo ponto O . Como se vê na fig. 335, a direção da força F forma com a escada um ângulo $\beta = 30^\circ - \arctg(1/2\sqrt{3}) \approx 14^\circ 10'$. A força de reação da terra sobre a escada, estará dirigida ao longo da escada somente quando todas as demais forças estiverem aplicadas ao centro de massas da escada, ou atuarem ao longo da mesma.

142. A escada cairá mesmo se for sustentada por cordas unidas ao meio da mesma. Os momentos das forças de reação do chão e da parede, assim como o momento da força de tensão da corda relativamente ao ponto O são iguais a zero para qualquer tensão T (fig. 336). O momento da força de gravidade, relativamente ao mesmo ponto, é diferente de zero. Por isso a escada obrigatoriamente cairá.

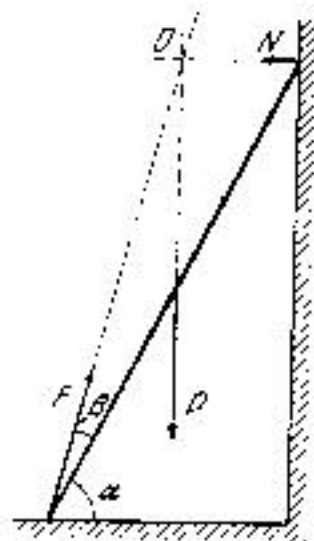


Fig. 335

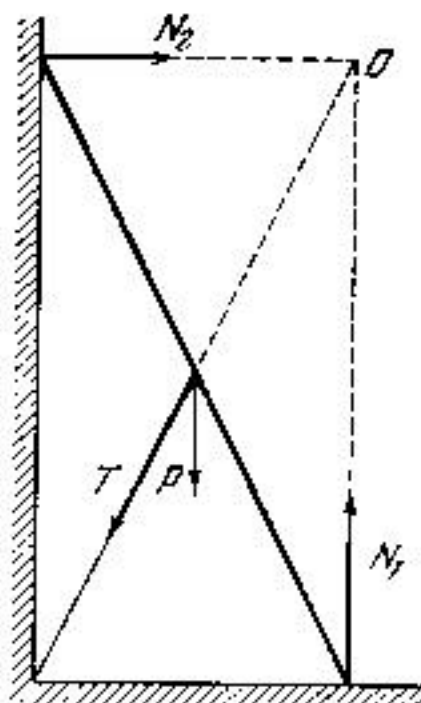


Fig. 336

143. A parede age sobre a escada com uma força de reação igual a N_1 , perpendicular à parede. No extremo inferior da escada atuam as forças N_2 (reação do apoio) e F_{atr} (força de atrito) (fig. 337). Se para simplificar, não considerarmos a massa da escada, então, além dessas forças, atua na mesma o peso do homem P . Da igualdade das projeções das forças, nas direções horizontal e vertical, obtemos, que: $N_2 = P$ e $N_1 = F_{atr}$. Suponhamos que no momento inicial o homem encontre-se na parte inferior da escada (ponto A). A igualdade dos momentos das forças, relativamente ao ponto O , conduz à seguinte equação: $N_1 \cdot CB = P \cos \alpha \cdot AO$. Deste modo

temos que, quanto mais alto estiver o homem, maior será a força N_1 . Porém $F_{atr} = N_1$. Então, a força de atrito que mantém a escada, cresce na medida, em que o homem sobe a escada. Quando a força F_{atr} adquire o seu valor máximo, igual a kP , a escada começará a escorregar.

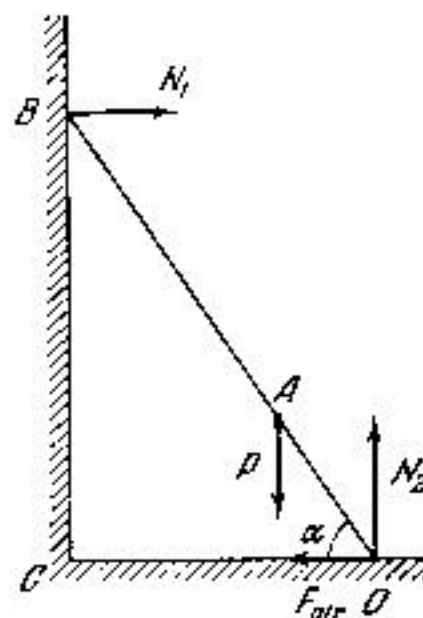


Fig. 337

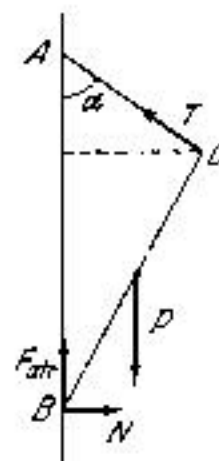


Fig. 338

144. Em equilíbrio, a soma das forças, que agem no quadro (fig. 338), é igual a zero. Consequentemente temos que: $P = F_{atr} + T \cos \alpha$ e $N = T \sin \alpha$. A força de atrito deverá satisfazer a desigualdade $F_{atr} \leq kN$, ou $k \geq F_{atr}/N$. A igualdade dos momentos, relativamente ao ponto B , é dada pela equação:

$$\frac{P}{2} l \sin \alpha = T (l \cos \alpha + \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}) \sin \alpha,$$

donde

$$\frac{F_{atr}}{N} = \frac{l \cos \alpha + 2 \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha},$$

$$k \geq \frac{l \cos \alpha + 2 \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha}.$$

145. Determinemos inicialmente a direção da força f , com a qual a barra BC age na barra CD . Suponhamos que esta força tenha uma componente vertical, dirigida para cima. Então, pela terceira lei de Newton, a barra CD atua na barra BC com uma força, cuja componente vertical está dirigida para baixo. Entretanto isto contradiz a simetria do problema. Consequentemente, a componente vertical da força f deverá ser igual a zero. A força exercida pela barra DE na CD , terá as componentes horizontal e vertical, como está indicado na fig. 339, α .

Considerando, que a soma de todas as forças que agem na barra CD é igual a zero, concluímos que $F = mg$ e $f = f'$. Supondo, que o momento das forças relativamente a D é igual a zero, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$f \sin \beta \cdot CD = mg \cdot CD (\cos \beta)/2 \quad \text{ou} \quad \tan \beta = mg/2f.$$

Na fig. 339, *b* estão representadas as forças que agem na barra DE . Da condição, de que o momento das forças, relativamente ao

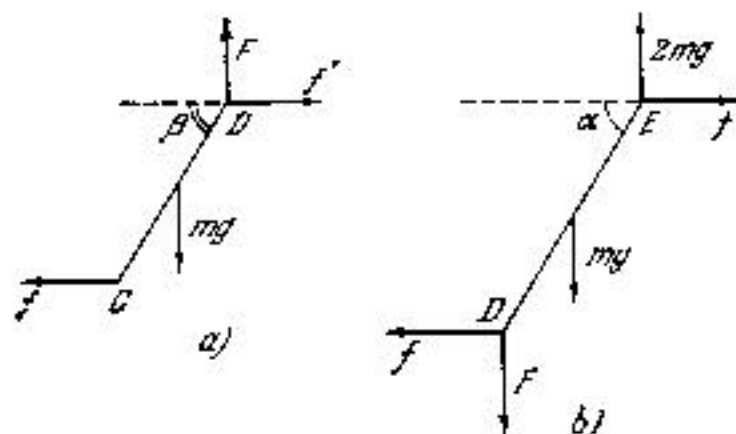


Fig. 339

ponto E , é igual a zero, concluímos que:

$$f \sin \alpha \cdot DE = F \cos \alpha \cdot DE + mg \frac{\cos \alpha}{2} DE \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = \frac{3mg}{2f}.$$

Por conseguinte, temos que: $\tan \alpha = 3 \tan \beta$.

146. As forças que agem sobre a caixa estão representadas na fig. 340. As condições de equilíbrio têm a seguinte forma: $Q \cos \alpha = F_{\text{atr}} + P = N + Q \sin \alpha$. No momento de perda do equilíbrio

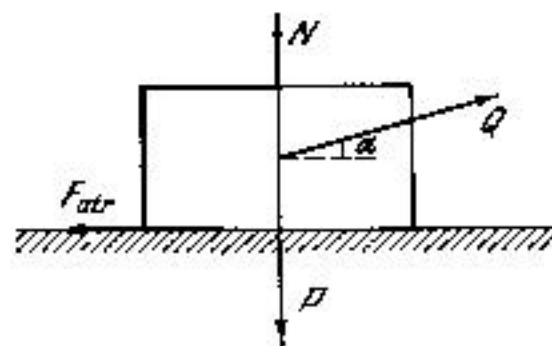


Fig. 340

a força de atrito atinge o seu valor máximo $F_{\text{atr}} = kN$, a qual substituindo-se nas equações anteriores, nos dá $Q = kP/(\cos \alpha + k \sin \alpha)$. O valor de Q será mínimo para o valor do ângulo α ,

que corresponda ao valor máximo do denominador. Para determinarmos o máximo do denominador, transforme-mo-lo, introduzindo no lugar de k uma nova grandeza φ tal, que $\tan \varphi = k$. Então, temos $\cos \alpha + k \sin \alpha = \cos(\alpha - \varphi)/\cos \varphi$, ou $\cos \alpha + k \sin \alpha = \sqrt{1 + k^2} \cos(\alpha - \varphi)$. Uma vez que o (-) valor máximo do $\cos(\alpha - \varphi)$ é igual a 1, concluímos que $Q_{\text{min}} = kP/\sqrt{1 + k^2}$, donde $k = Q/\sqrt{P^2 - Q^2} = 0,75$.

147. As forças, que agem no cilindro, estão representadas na fig. 341. Uma vez que o cilindro não tem movimento de translação, pode-

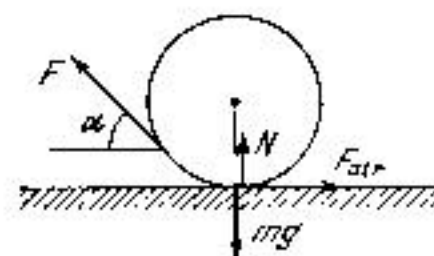


Fig. 341

mos escrever que

$$F_{\text{atr}} - F \cos \alpha = 0 \quad \text{e} \quad F \sin \alpha - mg + N = 0.$$

A força de atrito é $F_{\text{atr}} = kN$. Substituindo-a nas equações anteriores, obtemos: $F = kmg/(\cos \alpha + k \sin \alpha)$. O denominador desta expressão pode ser escrito na forma de $A \sin(\alpha + \varphi)$, onde $A = \sqrt{1 + k^2}$. Consequentemente, a força mínima, qual é necessária para puxar a corda é: $F_{\text{min}} = kmg/\sqrt{1 + k^2}$. O ângulo α_1 obtemos da equação $\cos \alpha_1 + k \sin \alpha_1 = \sqrt{1 + k^2}$, donde $\tan \alpha_1 = k$.

148. As forças, que agem no pistão e na tampa traseira do cilindro, são iguais a $F_1 = F_2 = pS$ (fig. 342, *a*). No ponto A da roda, na direção horizontal, age também a força F_2 , transmitida do

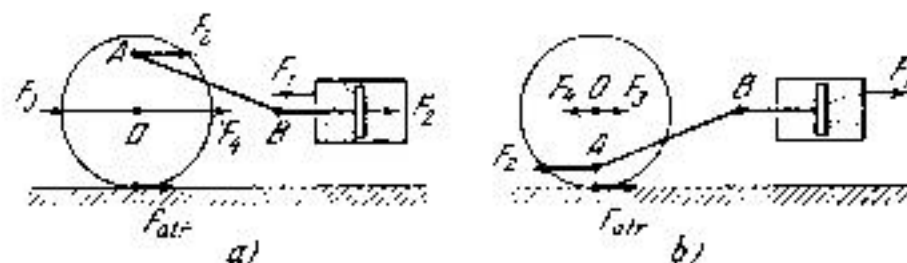


Fig. 342

pistão, através de um mecanismo a manivela.

A soma dos momentos das forças que atuam na roda, relativamente a seu eixo, é igual a zero. (A massa da roda é desprezada). Por conseguinte, temos $F_{\text{atr}} \cdot R = F_2 \cdot r$, onde F_{atr}

é a força de atrito. Uma vez que a soma das forças que atuam na roda também é igual a zero, a força F_R , que age no eixo, por parte da manivela do trem, é igual a: $F_R = F_{atr} + F_2$. Segundo a terceira lei de Newton, no trem, por parte do eixo, age a força $F_1 = F_R$. Consequentemente, a força de tração é $F = F_4 - F_1 = F_{atr} - pSr/R$.

Na segunda posição do pistão e do mecanismo a manivela, interessam-nos as forças representadas na fig. 342, b. $F_{atr} = F_2 r/R$ analogamente ao caso anterior.

A força de tração é $F = F_1 - F_4 - F_{atr} = pSr/R$. Como era de se esperar, a força de tração é igual à força de atrito, uma vez, que a força de atrito é a única força externa que age no trem.

149. O comprimento maior da parte saliente de tijolo superior é igual a $1/2$. O centro de gravidade dos dois tijolos superiores C_2 encontra-se a uma distância $1/4$ em relação ao extremo do segundo tijolo

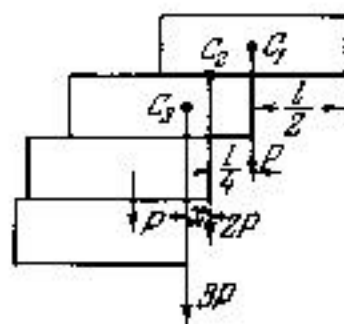


Fig. 343

(fig. 343). Consequentemente, neste comprimento, o segundo tijolo pode ser deslocado, relativamente ao terceiro.

O centro de gravidade dos três tijolos superiores C_2 determina-se pela igualdade dos momentos das forças de gravidade relativamente a C_3 : $P(l/2 - x) = 2Px$, donde $x = l/6$, i.é., o terceiro tijolo pode sobressair o quarto não mais do que $l/6$. Analogamente podemos determinar que o quarto tijolo sobressai o quinto em $l/8$, etc. O caráter da variação do comprimento da parte saliente com o aumento do número de tijolos é evidente. A distância máxima, na qual a parte direita do tijolo superior, salienta-se sobre o tijolo inferior, escreve-se sob a forma de uma série:

$$L = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right).$$

Para um aumento ilimitado do número de tijolos esta soma tende ao infinito. Realmente a soma da série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

é maior do que a soma da série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

e esta última soma é infinitamente grande, no caso de um número infinito de termos. O centro de gravidade de todos os tijolos passa pelo extremo direito do tijolo inferior. O equilíbrio será instável. (Tal configuração seria possível, se a terra fosse plana).

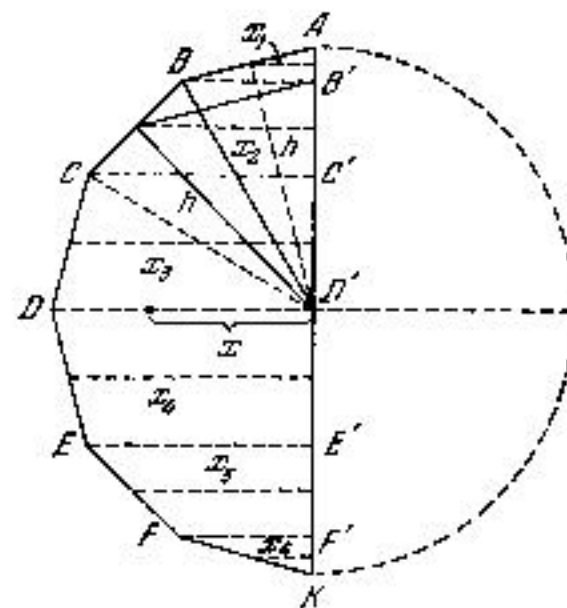


Fig. 344

150. Na circunferência de raio r inscrevemos um polígono regular (fig. 344). Determinemos a seguir o momento das forças de gravidade (relativamente ao eixo AK), aplicadas ao meio dos lados do polígono AB , BC , CD , DE , etc., considerando que a força de gravidade atua perpendicularmente ao desenho. Este momento é igual a $\rho g (ABx_1 + BCx_2 + CDx_3 + DEx_4 + \dots + EFx_6 + FKx_6)$, onde ρ é a massa de uma unidade de comprimento do arame.

Analisando a semelhança dos triângulos correspondentes, pode-se demonstrar que os produtos ABx_1 , BCx_2 , CDx_3 , etc., são iguais correspondentemente a $AB'h$, $B'C'h$, $C'D'h$, etc., onde h é o apótema do polígono. Deste modo o momento é igual a $\rho gh (AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'K) = \rho gh 2r$. Se o número dos lados cresce ilimitadamente, a grandeza h tende a r e o momento tende a $2r^2 \rho g$. Por outro lado, o momento é igual ao produto da força de gravidade do arame ($\pi \rho g$) na distância x do centro de gravidade do eixo AK . Temos, então, que $2r^2 \rho g = \pi \rho g x$, donde $x = 2r/\pi$.

151. Dividimos o semicírculo em triângulos e segmentos, como mostra a fig. 345. O centro de gravidade de um triângulo situa-se, como é conhecido, na interseção das medianas. Neste caso, o centro de gravidade de cada triângulo encontra-se a uma distância

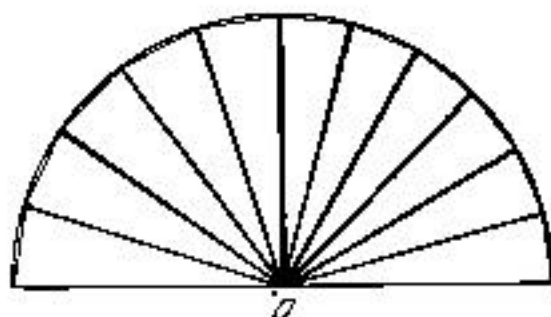


Fig. 345

igual a $2/3h$ do ponto O (h é o apótema). Para um aumento ilimitado do número dos lados, os centros de gravidade dos triângulos localizar-se-ão em uma circunferência de raio $2/3r$, e a área dos segmentos tenderá a zero. Deste modo, o problema reduz-se à determinação do centro de gravidade de um semicírculo de raio $2/3r$. Da solução do problema 150 deduz-se que x é a distância do centro de gravidade do semicírculo ao ponto O e é igual a $x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} r = \frac{4}{3\pi} r$.

152. Utilizando a solução de solução dos problemas 150 e 151, pode-se demonstrar, que o centro de gravidade encontra-se no ponto C , situado a uma distância igual a $CO = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\alpha} r$ do centro de curvatura do arco (ver a fig. 59).
153. Utilizando as soluções dos problemas 150, 151, 152, pode-se demonstrar, que o centro de gravidade encontra-se no ponto C , distante do ponto O a uma distância igual a

$$CO = \frac{4}{3} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} r,$$

154. Para determinar a localização do centro de gravidade de uma lâmina com um corte, poderemos considerá-la contínua, e que na mesma foi colocado um semicírculo de massa negativa, igual em grandeza à massa da parte cortada. O momento das forças de gravidade das massas, tanto positiva como negativa, relativamente ao eixo AB , é igual a:

$$\rho g \left(2r^2 \frac{r}{2} - \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4}{3\pi} r \right) - \frac{1}{3} r^3 \rho g,$$

se a força de gravidade atua perpendicularmente ao desenho, ρ é a massa da unidade de área da lâmina (ver a solução do problema 151). Por outro lado, este momento é igual ao produto da força

de gravidade da lâmina pela distância $x = OC$ do centro de gravidade da mesma até o eixo AB . Consequentemente, temos que:

$$x \rho g (2r^2 - \pi r^2/2) - \frac{1}{3} r^3 \rho g, \text{ donde } x = \frac{2}{3(4-\pi)} r.$$

§ 7. TRABALHO E ENERGIA

155. O trabalho da força não depende da massa do corpo, sobre o qual ela age. Uma força de 30 N realizará um trabalho $A = Fh = 150$ J. Esse trabalho provocará o aumento da energia potencial (50 J) e da energia cinética da carga (100 J).
156. Antes de tudo, é necessário achar a força da pressão do ar em um dos hemisférios. Suponhamos, que a base do mesmo está fechada por uma tampa plana em forma de disco de raio R . Então, se do recipiente obtido, bombearmos o ar, a força da pressão na tampa plana será $F_1 = pS = p\pi R^2$. É evidente, que esta será também a força da pressão do ar no hemisfério. Caso contrário, as forças não se equilibram mutuamente e o recipiente mover-se-á sempre em direção da força maior. O número de cavalos deverá ser F_1/F , uma vez que o outro hemisfério poderá ser, simplesmente, unido a uma coluna. A corda estendida, cria uma força exatamente igual à força criada pelo arrego dos cavalos, puxando desde o lado oposto.
157. A variação da quantidade de movimento do corpo é igual ao impulso da força de gravidade. Uma vez que as forças, que agem na pedra e na terra, são iguais e agem durante um mesmo tempo, então, as variações das quantidades de movimentos desses corpos também serão iguais. A variação da energia cinética do corpo é igual ao trabalho das forças gravitacionais. As forças são iguais, mas os trajetos, percorridos pela pedra e pela terra, são inversamente proporcionais às massas dos mesmos. É precisamente por isso que a lei de conservação da energia pode ser escrita de tal forma, que não considere a variação da energia cinética da terra: $mv^2/2 + W = \text{const}$, onde m é a massa da pedra e W a energia potencial de interação.
158. Segundo a lei de conservação da energia temos que $m_1gh = m_1v_1^2/2$, onde m_1 é a massa do martelo; h é a altura do queda do martelo; v_1 é a velocidade do martelo antes do choque. Como consequência da curta duração do choque, a força resistente não pode variar sensivelmente a quantidade geral do movimento do sistema. Uma vez que o choque é inelástico, temos que: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_2$, onde m_2 é a massa do pilar; v_2 é a velocidade do martelo e do pilar no primeiro momento depois do choque. A energia mecânica do martelo e do pilar são utilizadas no trabalho contra as forças de resistência do solo F :

$$\frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} + (m_1 + m_2) gS = FS,$$

onde S é a profundidade de introdução do pilar no solo. Obtemos, então, que:

$$F = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{h}{S} m_1 g = m_1 g + m_2 g \approx 24500 \text{ N}.$$

159. Como resultado do choque inelástico, a velocidade linear da caixa juntamente com a bala, no primeiro instante de tempo, será igual a $u = \frac{mv}{M+m}$, onde v é a velocidade da bala. O ângulo de desvio α , baseando-se na lei de conservação da energia relaciona-se com a velocidade v da seguinte forma:

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(M+m)} - (M+m)L(1-\cos\alpha)g.$$

Determinamos daqui que:

$$v = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{M+m}{m} \sqrt{Lg}.$$

160. Sendo a explosão muito rápida, as forças externas horizontais (forças de fricção) não podem variar sensivelmente a quantidade geral do movimento do sistema no período da mesma. Antes e imediatamente depois da explosão a mesma permanece igual a zero. Consequentemente, $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$, donde $v_1/v_2 = -m_2/m_1$. Uma vez que as carrretas finalmente param, as energias cinéticas iniciais das mesmas são utilizadas no trabalho contra as forças de fricção:

$$m_1v_1^2/2 = km_1gS_1, \quad m_2v_2^2/2 = km_2gS_2,$$

donde obtemos: $v_1^2/v_2^2 = S_1/S_2$ e, consequentemente, $S_2 = 2m$.

161. Simbolizemos por u a velocidade do corpo e da carrreta depois de cessar o movimento relativo dos mesmos. Baseando-se na lei de conservação da quantidade de movimento, podemos escrever que:

$$(M+m)u = Mv_0. \quad (1)$$

A carrreta perde energia cinética, porque a força de fricção f , que age na mesma, realiza um trabalho negativo igual a $Mv_0^2/2 - Mu^2/2 = fS$, onde S é o trajeto percorrido pela carrreta. O corpo adquire uma energia cinética como consequência do trabalho positivo, realizado pela força de atrito na carrreta. Esta energia é igual a $mu^2/2 = fs$, onde s é o trajeto percorrido pelo corpo.

A variação da energia cinética do sistema é igual a:

$$\frac{Mu_0^2}{2} - \left[\frac{Mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} \right] = f(S-s), \quad (2)$$

e como se vê a variação da mesma é igual a força de atrito multiplicada pelo deslocamento relativo do corpo ao longo da carrreta.

Das equações (1) e (2) deduzimos que: $S-s = \frac{mMv_0^2}{2f(M+m)}$.

Uma vez que $S-s \leq l$, então, $l \geq \frac{mMv_0^2}{2f(M+m)}$. Considerando $f = kmg$, obtemos que:

$$l \geq \frac{Mv_0^2}{2kg(M+m)}.$$

162. Como resultado da combustão da segunda porção, a velocidade v do foguete aumenta na grandeza Δv . Segundo a lei de conservação da quantidade de movimento (uma vez que a combustão ocorre instantaneamente), podemos escrever:

$$(M+m)v = M(v+\Delta v) + m(v-u),$$

onde m é a massa da porção do combustível; M é a massa do foguete sem combustível; u é a velocidade de saída dos gases em relação ao foguete. O incremento da velocidade do foguete

$\Delta v = \frac{m}{M}u$ não depende da velocidade v do mesmo antes da combustão da segunda porção. Ao contrário, o incremento da energia cinética do foguete (sem combustível)

$$\Delta E_c = \frac{M(v+\Delta v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = mu \left(\frac{m}{2M}u + v \right)$$

será maior, quanto maior for v .

A altura de ascensão do foguete determina-se pela quantidade de energia recebida pelo mesmo. Por isso, é mais vantajoso queimar a segunda porção do combustível no instante, em que a velocidade do foguete é a maior possível, i.é., imediatamente depois da primeira porção. Nessas condições, a maior parte da energia mecânica, que surge como consequência da queima do combustível, será transmitida ao foguete e a energia mecânica dos produtos de combustão será mínima.

163. É suficiente analisar a combustão sucessiva de duas porções de combustível. Inicialmente a massa do foguete com o combustível é $M + 2m$. Depois da queima da primeira porção, a velocidade do foguete é $v = mu_1/(M+m)$, onde u_1 é a velocidade dos gases relativamente ao foguete. Consideremos a velocidade inicial do foguete igual a zero. O incremento da velocidade do foguete, depois da combustão da segunda porção, é $\Delta v = mu_2/M$, onde u_2 é o novo valor da velocidade dos gases, relativamente ao foguete.

Depois da queima da primeira porção a energia mecânica liberada é $\Delta E_1 = (M+m)v^2/2 + mu_1^2/2$. Ao queimar a segunda porção libera-se a energia:

$$\Delta E_2 = \frac{M(v+\Delta v)^2}{2} - \frac{m(v-u_2)^2}{2} - \frac{(M+m)v^2}{2}.$$

Segundo a condição do problema: $\Delta E_1 = \Delta E_2$ donde obtemos que

$$u_1^2 \left(\frac{m^2}{2(M+m)} + \frac{m}{2} \right) = u_2^2 \left(\frac{m^2}{2M} + \frac{m}{2} \right).$$

Consequentemente $u_1 > u_2$, i.é., a velocidade dos gases relativamente ao foguete, diminui. Isto relaciona-se com a diminuição da massa do foguete no processo de combustão.

164. Ambos os declives podem ser divididos em um número infinito de planos inclinados pequenos, com diferentes ângulos de inclinação. Analisemos um deles (fig. 346). O trabalho realizado

para a ascensão do corpo, nesse plano inclinado, é igual ao trabalho contra as forças de gravidade $mg \cdot \Delta h$, mais o trabalho contra as forças de atrito $F_{\text{atr}} \cdot \Delta S$. Sabemos, que $F_{\text{atr}} = kmg \cos \alpha$ e $\Delta S = \Delta l / \cos \alpha$, donde obtemos $F_{\text{atr}} \Delta S = kmg \Delta l$. O trabalho

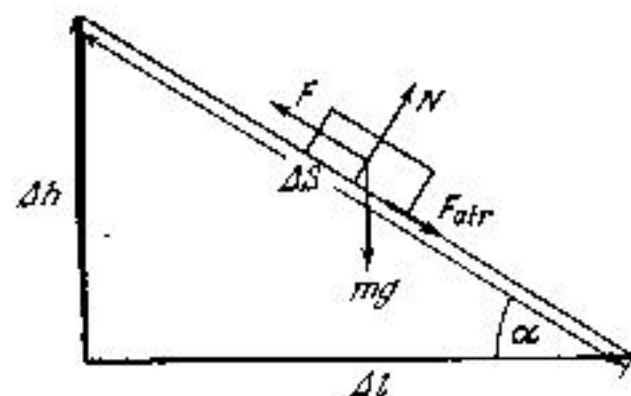


Fig. 346

total será igual a $\Delta A = mg(\Delta h + k\Delta l)$. Considerando todos os planos inclinados e somando os trabalhos elementares, o trabalho total será igual a:

$$A = \sum \Delta A = mg(\sum \Delta h + k \sum \Delta l) = mgh + kmgL.$$

O trabalho determina-se somente pela altura da montanha h e pelo comprimento L da base da mesma.

165. A força aplicada à alavanca será mínima, caso forme com a mesma um ângulo reto. Simbolizando por F o valor da força procurada e baseando-se na lei fundamental da mecânica, teremos que: $2\pi RF = Ph$, donde $F = Ph/2\pi R$.

166. Utilizando a definição de coeficiente de rendimento útil, temos $\eta = A_2/(A_1 + A_2)$, onde $A_1 = PH$ é o trabalho para elevar o peso P a uma altura H , e A_2 é o trabalho realizado nesse processo contra as forças de atrito. Uma vez que a força de atrito é capaz de manter o peso em equilíbrio, o trabalho desta força não pode ser menor do que o trabalho A_1 . O menor valor do trabalho das forças de atrito é igual a $A_2 = A_1$. Deste modo temos que: $\eta \leq 50\%$.

167. Durante a ascensão do homem pela escada, o balão baixa a uma certa altura h . Por conseguinte, o trabalho realizado pelo homem, provocará o aumento da energia potencial do mesmo em uma grandeza $mg(l - h)$, e, também, o aumento da energia potencial do balão, em uma grandeza mgh (no balão, sem o homem, age uma força ascensional mg , dirigida para cima), donde temos que:

$$A = mg(l - h) + mgh = mgl.$$

Este resultado pode ser obtido imediatamente, calculando o trabalho do homem em um sistema ligado à escada.

Se o homem subir com velocidade v relativamente à escada, então, com relação à terra ele terá uma velocidade $v = v_1$,

onde v_1 é a velocidade do balão no tempo de subida do homem. Segundo a lei de conservação da quantidade de movimento,

$$\text{temos } (v - v_1)m = Mv_1, \text{ donde } v_1 = \frac{m}{M+m}v.$$

168. A fim de ser bombeada uma quantidade de água duas vezes maior em uma unidade de tempo, é necessário transmitir uma velocidade duas vezes maior a uma massa de água duas vezes maior. (O trabalho do motor utiliza-se para transmitir à água a energia cinética $mv^2/2$). Por isto, a potência do motor deve ser aumentada em oito vezes.

169. 1) Realiza-se o seguinte trabalho, a fim de bombear-se a água do poço:

$$A_1 = \rho g \frac{H}{2} S \cdot \frac{3}{4} H = \frac{3}{8} \rho g S H^2,$$

onde ρ é a densidade da água. Para se transmitir à água energia cinética, realiza-se o seguinte trabalho:

$$A_2 = \frac{1}{2} \rho \frac{H}{2} S v^2.$$

A velocidade v , com que a água sai do cano na superfície da terra, determina-se da relação $(H/2)S = \pi R^2 v$. O trabalho total é:

$$A = \frac{3}{8} \rho g S H^2 + \frac{1}{16} \rho \frac{H^3 S^3}{\pi^2 R^4 v^2}$$

2) O trabalho realizado para se elevar a água, no segundo caso, é menor do que A_1 em uma grandeza $\Delta A_1 = \rho g S_1 h (H - h/2)$. O trabalho realizado para transmitir à água uma energia cinética é: $A_2' = \frac{1}{2} \rho \frac{(HS/2 - hS_1)^3}{\pi^2 R^4 v^2}$. O trabalho total será igual a: $A' = A_1 - \Delta A_1 + A_2'$.

170. É mais simples resolver o problema em um sistema de coordenadas, relacionado com a escada rolante. O homem percorrerá relativamente à mesma uma distância $l = h/\sin \alpha + vt$, onde vt é o trajeto percorrido pela escada rolante. Para isto ele realizará um trabalho $A = (h/\sin \alpha + vt)mg \sin \alpha$, uma vez que por ocasião da subida, a força mg foi aplicada no trajeto l e formava com o mesmo um ângulo igual a $90^\circ - \alpha$. Uma parte do trabalho mgh destinar-se-á ao aumento da energia potencial do homem, a outra parte do trabalho, $mgvt \sin \alpha$, juntamente com o trabalho do motor que põe a escada rolante em movimento, será destinada para vencer as forças de atrito.

171. A energia da mola, esticada pelo ponto médio O , é $W_1 = (2k)x^2/2$. Quando soltarem a mola, sua energia torna-se igual a $W_2 = kx^2/2$, uma vez que no período de distribuição das deformações elásticas na mola, a massa m não consegue deslocar-se. Consequentemente, a perda de energia na mola será $W_1 - W_2 = kx^2/2$. Isto, evidentemente, é um cálculo aproximado.

172. O homem, agindo com uma força F na mola, realiza um trabalho $A_1 = -FL$. Simultaneamente, no solo do vagão, por parte

do homem, age a força de atrito F . O trabalho desta força é igual a $A_2 = FL$. Deste modo, o trabalho total realizado pelo homem no sistema de coordenadas, ligado à terra, é igual a zero, assim como no sistema ligado ao trem.

173. No sistema do trem, o trabalho realizado é igual à energia potencial da mola estendida, i.e., $A = kx^2/2$, uma vez que a força de atrito entre o homem e o solo do vagão, neste sistema, não realiza trabalho. No sistema, ligado à terra, o trabalho do homem para esticar a mola, é igual ao produto da força média $kx/2$ pelo trajeto percorrido $L - l$, i.e., $A_1 = (kx/2)(L - l)$. No solo do vagão o homem age com a mesma força média $kx/2$. O trabalho da mesma é igual a $A_2 = (kx/2)L$. O trabalho total no sistema de coordenadas dado é: $A = A_1 - A_2 = kx^2/2$, ou seja, o mesmo que no sistema do vagão.

174. Baseando-se nas leis da conservação da quantidade de movimento e de energia, podemos escrever as seguintes equações:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v'^2_1}{2} + \frac{m_2v'^2_2}{2},$$

onde v'_1 e v'_2 são as velocidades das bolas depois do choque. Resolvendo o sistema de equações dado, obtemos que:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

- 1) Se a segunda bola, antes do choque, estivesse em repouso ($v_2 = 0$), então teríamos:

$$v'_1 = (m_1 - m_2)v_1/(m_1 + m_2),$$

$$v'_2 = 2m_1v_1/(m_1 + m_2).$$

Se $m_1 > m_2$, a primeira bola continua movendo-se na mesma direção que tinha antes do choque, mas com velocidade menor. Se $m_1 < m_2$, a primeira bola, depois do choque, volta para trás. A segunda bola mover-se-á no mesmo sentido, em que se movia a primeira bola antes do choque.

- 2) Se $m_1 = m_2$, então, temos:

$$v'_1 = 2mv_2/2m = v_2, \quad v'_2 = 2mv_1/2m = v_1.$$

As bolas depois do choque trocam as velocidades.

175. A energia da deformação elástica tornar-se-á máxima, quando a velocidade relativa das bolas tornar-se igual a zero. Para este instante de tempo, a lei de conservação da energia mecânica e a lei de conservação da quantidade de movimento, podem ser escritos da seguinte forma:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + W,$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u,$$

onde u é a velocidade absoluta das bolas, no momento em que elas possuem a energia máxima W de deformação elástica. Consequentemente, temos que:

$$W = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

176. Como resultado do choque elástico, a barra esquerda adquire uma velocidade v . A da direita, neste momento, ainda está em repouso, uma vez que a mola não se deformou. Simbolizemos por u_1 e u_2 as velocidades das barras esquerda e direita em um momento arbitrário de tempo, por x o alongamento absoluto de mola no mesmo momento de tempo. Baseando-se nas leis da conservação da quantidade de movimento e de energia, obtemos:

$$m(u_1 + u_2) = mv,$$

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

ou $kx^2 = m[v^2 - (u_1^2 + u_2^2)]$. Substituindo na última equação v por $(u_1 + u_2)$, obtemos $kx^2 = 2mu_1u_2$. Consequentemente temos $u_1u_2 = kx^2/2m$ e $u_1 + u_2 = v$. Pelas duas últimas expressões vemos claramente que u_1 e u_2 terão um mesmo sinal, uma vez que ambas as barras movem-se no mesmo sentido.

A grandeza x^2 será máxima, quando o produto das velocidades u_1 e u_2 for máximo. Deste modo, para respondermos a segunda pergunta, é necessário determinar o valor máximo do produto u_1u_2 nas condições, em que a soma $u_1 + u_2$ seja constante e igual a v . Consideremos a desigualdade evidente: $(u_1 - u_2)^2 \geq 0$, ou $u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 \geq 0$. Adicionemos a ambos os membros da igualdade a grandeza $4u_1u_2$. Temos que $u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \geq 4u_1u_2$, ou $(u_1 + u_2)^2 \geq 4u_1u_2$. Uma vez que $u_1 + u_2 = v$, então $4u_1u_2 \leq v^2$. Consequentemente, o valor máximo de u_1u_2 é $v^2/4$ e o mesmo é obtido quando $u_1 = u_2 = v/2$. A distância entre as barras neste momento será igual a:

$$l + x_{\max} = l + v\sqrt{m/2k}.$$

177. Até o momento em que a lâmina inferior estiver sobre a mesa, utilizando a lei de conservação da energia mecânica, podemos escrever que:

$$\frac{kx^2}{2} - mgx = \frac{ky^2}{2} + mgy + \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

onde y é o alongamento da mola; v é a velocidade da lâmina superior. No momento em que a lâmina inferior abandona a mesa, temos que:

$$ky = mg, \quad y = mg/k,$$

sendo $v > 0$. Considerando estas relações, obtemos de (1) que:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - mgx = \frac{3}{2} \frac{m^2g^2}{2k} > 0. \quad (2)$$

A fim de que se verifique a igualdade (2), devemos ter $x > 3mg/k$.

A velocidade v_C do centro de massas, no momento em que a lâmina inferior sai da mesa, é igual a $v_C = v/2$. Depois que a lâmina inferior abandona a mesa, o centro de massas mover-se-á para cima uniformemente retardado, com aceleração g e velocidade inicial v_C . Consequentemente, temos que a altura de ascensão máxima do centro de massas é:

$$H = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{v^2}{8g}. \quad H = \frac{1}{8g} \left(\frac{kx^2}{m} - 2gx - 3 \frac{mg^2}{k} \right),$$

onde H é contada desde a posição que o centro de massas ocupava no momento em que a lâmina inferior abandonou a mesa.

(O problema estudado nos dá uma idéia do que ocorre quando se realizam saltos em altura).

178. No sistema de coordenadas, ligado à parede, a velocidade da bola é $(v; -v)$. Depois do choque, nesse mesmo sistema de coordenadas, a velocidade da bola será $-(v; u)$. A velocidade da mesma depois do choque, relativamente a um sistema de coordenadas fixo, é igual a:

$$-(v - u) = u = -(v - 2u).$$

A energia cinética depois do choque é: $m(v - 2u)^2/2$ e antes do mesmo é: $mv^2/2$. A variação da energia cinética é igual a: $2mu(u - v)$.

Consideremos, agora, o trabalho das forças elásticas, que agem na bola no momento do choque. Suponhamos, que o choque prolongue-se em um tempo τ ; suponhamos, também, para simplificar que, no momento do choque, a força elástica é constante (o resultado não depende desta suposição). Considerando que, como resultado do choque, a quantidade de movimento variou em uma grandeza $2m(v - u)$, a força elástica é igual a: $F = 2m(v - u)/\tau$. O trabalho desta força será

$$A = FS = Fv\tau = 2m(v - u)v\tau/\tau = 2m(v - u)u.$$

Como se vê facilmente este trabalho é igual à variação da energia cinética.

179. 1) Até o momento em que a corda se estica, as pedras caem livremente:

$$S_1 = gt^2/2, \quad S_2 = g(t - \tau)^2/2.$$

O momento em que estica-se a corda, determina-se baseando-se na seguinte condição: $t = S_1 = S_2$, donde obtemos: $t = 3$ s, $S_1 = 44,1$ m, $S_2 = 4,9$ m. Conta-se o tempo desde o momento de queda da primeira pedra. Ao esticar-se a corda, ocorre um choque elástico e as pedras trocam as velocidades (ver o problema 174). No momento do choque temos: $v_1 = gt = 29,4$ m/s, $v_2 = g(t - \tau) = 9,8$ m/s.

O tempo de queda t_1 da primeira pedra (depois que se estica a corda) determina-se da condição:

$$h - S_1 = v_1 t_1 + gt_1^2/2.$$

O tempo t_2 de queda da segunda pedra determina-se, baseando-se na condição:

$$h - S_2 = v_2 t_2 + gt_2^2/2,$$

donde obtemos que: $t_1 \approx 1,6$ s, $t_2 \approx 1,8$ s. A primeira pedra cai em 4,6 s, a segunda em 2,8 s.

2) Caso a corda seja inelástica, as velocidades das pedras igualam-se depois que a mesma for esticada (choque inelástico): $v = (v_1 + v_2)/2 = 19,6$ m/s. O tempo de queda das pedras, depois que a corda é esticada, determina-se pelas equações:

$$h - S_1 = vt_1' + gt_1'^2/2.$$

$$h - S_2 = vt_2' + gt_2'^2/2.$$

S_1 e S_2 são idênticos aos do primeiro caso, donde temos: $t_1' \approx 1,2$ s e $t_2' \approx 3,3$ s. A primeira pedra cai em 4,2 s, a segunda em 4,3 s.

180. Se inclinarmos somente uma bola à direita, então, após o choque a bola de extrema esquerda, salta, formando um ângulo igual ao ângulo de inclinação de bola à direita. Se inclinarmos, simultaneamente, duas bolas a saltar-molas, então, depois do choque à esquerda, saltarão duas bolas da extrema esquerda. Se inclinarmos três bolas da direita, saltarão três da esquerda, etc. No choque da primeira bola com a segunda, a primeira para, transmitindo sua quantidade de movimento à segunda (ver solução do problema 174); a segunda transmite essa mesma quantidade de movimento à terceira, a terceira à quarta, etc. A bola da extrema esquerda não tem outra a seguir, por isso, a mesma salta (se não houver atrito e perda de energia), formando um ângulo igual ao de inclinação da bola da extrema direita. Quando a bola da extrema esquerda, depois de saltar em um ângulo máximo, choca-se com a penúltima bola, o processo de transmissão da quantidade de movimento pela cadeia das mesmas repete-se em sentido contrário.

Se inclinarmos simultaneamente duas bolas de direita, elas transmitirão sua quantidade de movimento à cadeia não simultaneamente, mas uma após a outra, em um intervalo de tempo muito pequeno (imperceptível ao olho humano). Deste modo, a cadeia das bolas receberá não um impulso duplo, mas dois impulsos, que distribuir-se-ão pela cadeia, com um determinado intervalo de tempo. A bola da extrema esquerda saltará ao receber a primeira dose da quantidade de movimento. Em seguida saltará a penúltima, ao receber a dose seguinte da quantidade de movimento, que lhe foi transmitida pela bola da extrema direita.

Se inclinarmos três bolas à direita da cadeia, então, três da esquerda receberão, uma após a outra, depois de um intervalo de tempo muito pequeno, as doses da quantidade de movimento correspondentemente da terceira, segunda e primeira da direita. Se inclinarmos e saltarmos simultaneamente quatro bolas, então, saltarão da esquerda quatro delas e duas permanecerão imóveis.

181. A esfera que choca, salta para trás, e as esferas seguintes, até a esfera de aço, permanecerão imóveis. A esfera de aço e as esferas consecutivas mover-se-ão para a esquerda, sendo que as velocidades das mesmas serão diferentes. A esfera da extrema

esquerda mover-se-á mais rapidamente que as demais. A penúltima à esquerda mover-se-á mais lentamente, etc. As esferas espalhar-se-ão (ver solução dos problemas 174 e 180).

182. Suponhamos, que a carga $2m$ baixou a uma altura H . Então, as cargas m elevar-se-ão a uma altura h (fig. 347). Utilizando a lei de conservação da energia, temos que:

$$2mgh + \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} = 2mgH, \text{ ou } v_1^2 + v_2^2 = 2g(H-h),$$

onde v_1 é a velocidade das cargas m e v_2 é a velocidade da carga de massa $2m$. Na medida em que for baixando o peso $2m$, sua velocidade v_2 aproxima-se da velocidade v_1 , uma vez que os ângulos entre as partes da corda, que passam através da roldana, tendem a zero. No limite, temos $v_2 \approx v_1$ e, simultaneamente, $H \rightarrow h \approx l$. Consequentemente, o valor limite da velocidade das cargas é: $v = \sqrt{gl}$.

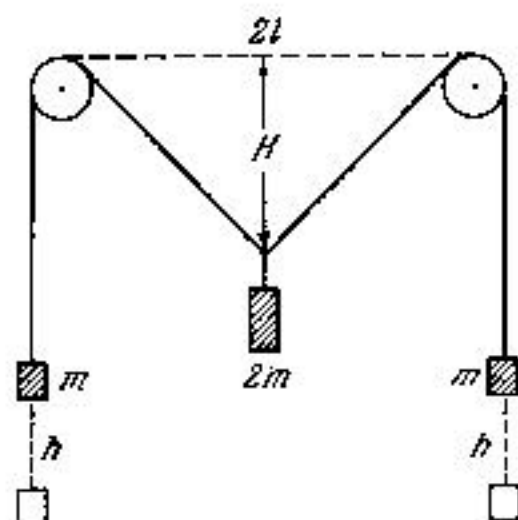


Fig. 347

183. As velocidades dos pesos são iguais, se os trajetos percorridos por eles em um mesmo curto intervalo de tempo, forem iguais. Estes trajetos igualar-se-ão para o valor do ângulo ANB , ao qual a descida do peso m_1 em $\Delta s = NK$ (fig. 348), provoque um aumento no comprimento da corda ANB , também, em uma grandeza Δs . Em virtude disso, igualando as velocidades, obtemos que $HK = BK - BN = \Delta s/2$ e $FK = AK - AN = \Delta s/2$. Os triângulos NHK e NFK aproximar-se-ão mais de triângulos retângulos quanto menor for o segmento Δs . Para $\Delta s \rightarrow 0$ os ângulos NHK e NFK tendem a um ângulo reto e os ângulos KNH e KNF tendem a 30° . Consequentemente, as velocidades serão iguais para $\angle ANB = 120^\circ$. Utilizando a lei de conservação da energia, determinamos os valores destas velocidades:

$$m_1gh = 2(2 - \sqrt{3})m_2gh + \frac{m_1 + m_2}{2}v^2,$$

donde:

$$v^2 = 2gh \frac{m_1 - 2(2 - \sqrt{3})m_2}{m_1 + m_2} \approx 0.$$

Os pesos oscilarão em redor da posição de equilíbrio, a que corresponde o valor do ângulo $ANB = 2 \arccos(m_1/2m_2) \approx 148^\circ$. Ao ângulo $ANB = 120^\circ$ corresponde o desvio máximo da posição de equilíbrio.

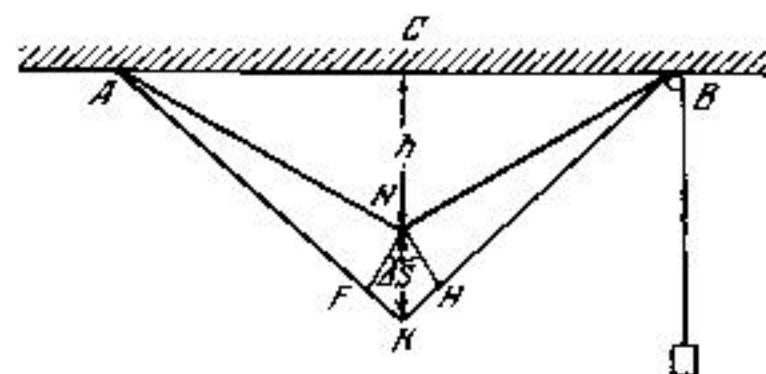


Fig. 348

184. Uma vez que não existe deslizamento da tábua e dos roletes na superfície horizontal, então, a distância entre os eixos dos roletes, por ocasião do movimento permanece constante. Em virtude disso, o movimento da tábua será de translação. A tábua deslocar-se-á na direção horizontal e, simultaneamente, para baixo ao longo dos roletes. Se os roletes deslocarem-se em uma distância qualquer l , então, cada ponto da tábua (e em particular o centro de gravidade A) percorrerá, ao longo da horizontal, essa mesma

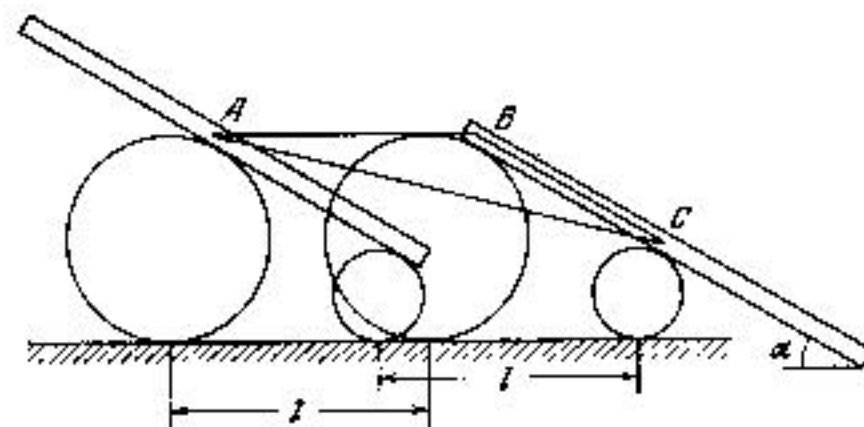


Fig. 349

distância l e, simultaneamente, deslocar-se-á nessa mesma distância ao longo dos roletes: $AB = BC = l$ (fig. 349). (Isto torna-se evidente, se analisarmos o movimento dos roletes no sistema de

coordenadas, que se move juntamente com os mesmos). Como resultado, o centro de gravidade da tábua mover-se-á ao longo da reta AC , que forma um ângulo $\alpha/2$ com a horizontal, uma vez que o triângulo ABC é isósceles. O movimento será uniformemente acelerado. A tábua adquirirá energia cinética em consequência da perda de energia potencial: $mv^2/2 = mgl \sin \alpha$, ou $v^2 = 2gl \sin \alpha$. Por outro lado, no movimento uniformemente acelerado, temos: $v^2 = 2aS$, onde $S = AC = 2l \cos (\alpha/2)$. Consequentemente, obtemos que a aceleração é: $a = v^2/2S = g \sin (\alpha/2)$.

185. Calculemos a diferença das energias potenciais para duas posições da corrente: a mesma está totalmente sobre a tábua e parte dela,

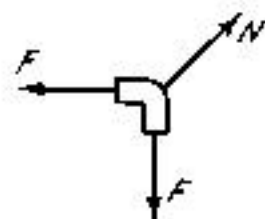


Fig. 350

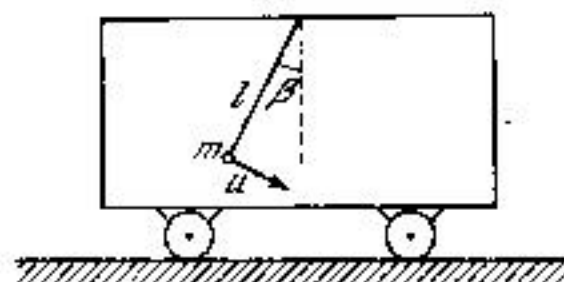


Fig. 351

cujos comprimentos é igual a x , está dependurada. Esta diferença é igual à força da gravidade $(M/2l)gx$ da parte dependurada, multiplicada por $x/2$, uma vez que a corrente é homogênea e o centro de gravidade do extremo dependurado encontra-se a uma distância $x/2$ da borda da tábua. Baseando-se na lei de conservação da energia, podemos escrever que $Mx^2/2 = (Mg/4l)x^2$, ou $v = \sqrt{gx^2/2l}$. A aceleração nesse mesmo instante de tempo podemos determinar, utilizando a segunda lei de Newton: $Ma = (M/2l)gx$. Consequentemente, temos $a = gx/2l$. Para calcularmos a reação da borda de tábua, encontremos, inicialmente, a tensão da corrente no ponto de contato com a tábua. A tensão é igual ao produto da massa de parte da corrente que está sobre a tábua, pela aceleração da corrente: $Mgx(2l - x)/4l^2$.

Analisemos, agora, um segmento muito pequeno da corrente que toca a borda da tábua. Neste segmento atuam três forças (fig. 350). Elas provocam a variação da quantidade de movimento da corrente tanto na horizontal, como na vertical:

$$(N \cos \alpha - F) \Delta t = - Mv^2 \Delta t/2l,$$

$$(F - N \sin \alpha) \Delta t = Mv^2 \Delta t/2l.$$

Consequentemente, o ângulo de inclinação de força N e a horizontal é: $\alpha \approx 45^\circ$ e $N = Mgx(l - x) \sqrt{2}/l^2$.

186. Simbolizemos por v a velocidade da carreta. A componente horizontal da velocidade do pêndulo, relativamente à carreta, é: $u \cos \beta$ (fig. 351) e relativamente aos trilhos, é igual a $v + u \cos \beta$. No sistema não atuam forças externas na direção horizontal. Por isso, baseando-se na lei de conservação da quantidade de

movimento, temos

$$m(v + u \cos \beta) + Mv = 0, \quad (1)$$

uma vez que inicialmente o sistema estava em repouso. A componente vertical da velocidade do pêndulo, relativamente à carreta e aos trilhos é igual a $u \sin \beta$. Utilizando o teorema de Pitágoras, o quadrado da velocidade do pêndulo, relativamente aos trilhos, é igual a $(v + u \cos \beta)^2 + u^2 \sin^2 \beta$. Baseando-nos na lei de conservação da energia, obtemos uma segunda equação que relaciona as velocidades v e u :

$$\frac{m}{2} [(v + u \cos \beta)^2 + u^2 \sin^2 \beta] + \frac{M}{2} v^2 = mgl (\cos \beta - \cos \alpha). \quad (2)$$

Das equações (1) e (2), obtemos que

$$v^2 = \frac{2m^2gl}{(M+m)} \frac{(\cos \beta - \cos \alpha) \cos^2 \beta}{(M + m \sin^2 \beta)}.$$

Em um caso particular para $\beta = 0$ (considerando $m/M \ll 1$), obtemos:

$$v^2 = 2 \frac{m^2}{M^2} gl (1 - \cos \alpha),$$

ou

$$v = 2 \frac{m}{M} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl}.$$

187. Simbolizemos por v a velocidade da cunha e por u_x e u_y as componentes horizontal e vertical da velocidade u da viga relativamente ao sistema fixo de coordenadas (fig. 352). Utilizando as leis de

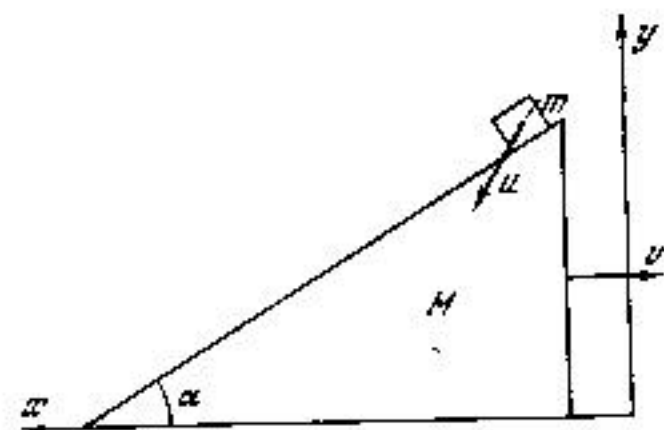


Fig. 352

conservação da quantidade de movimento e de energia podemos escrever:

$$-Mv + mu_x = 0, \\ \frac{Mv^2}{2} + \frac{m}{2} (u_x^2 + u_y^2) = mgh.$$

Salientemos, que o ângulo α com o plano horizontal é formado não pela velocidade absoluta da viga u (por velocidade absoluta, neste caso, entendemos a velocidade relativamente ao plano horizontal fixo), mas, sim, pela velocidade relativa u_{rel} i.é., a velocidade da viga relativamente à cunha em movimento.

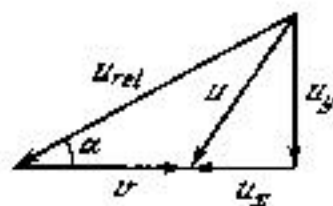


Fig. 353

Do triângulo de velocidades (fig. 353) deduzimos que $u_y/(v + u_x) = \operatorname{tg} \alpha$. Resolvendo as equações dadas relativamente a v obtemos que:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M + m \left[\left(\frac{M}{m} \right)^2 + \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{2gh}{\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m} \right)^2 + \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

A velocidade absoluta da viga, neste mesmo momento de tempo, é igual a:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} =$$

$$\sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M} \left(1 + \frac{M}{m} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

No caso, em que a massa da cunha seja muito maior do que a massa da viga, u tende, como era de esperar, à grandeza $\sqrt{2gh}$.

188. A velocidade da barra, relativamente à cunha em movimento, forma um ângulo α com a horizontal. Caso somemos esta velocidade relativa à velocidade da cunha, como resultado, obteremos a velocidade absoluta da barra u (fig. 354). É evidente, que a relação das velocidades é: $u/v = \operatorname{tg} \alpha$.
Da lei de conservação da energia deduzimos:

$$\frac{Mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mgh.$$

Excluindo dessas duas equações u , obtemos uma expressão para v , i.é.: $v = \sqrt{2mgh/(M + m \operatorname{tg}^2 \alpha)}$. Então, para a velocidade

de relativa da barra, podemos escrever

$$u_{rel} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{2mgh}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

A velocidade da barra será igual a:

$$u = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2mgh}{m - M \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{2 \frac{mg \operatorname{tg}^2 \alpha}{m + M \operatorname{tg}^2 \alpha} h}.$$

Da última expressão vê-se que a velocidade da barra varia, de acordo com o trajeto h percorrido, segundo a lei do movimento

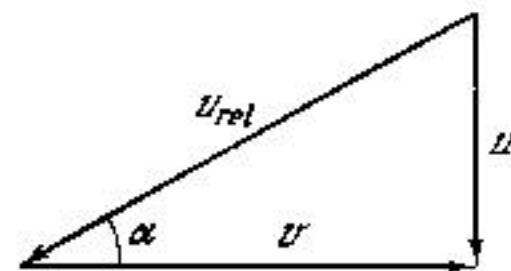


Fig. 354

uniformemente acelerado: $u = \sqrt{2ah}$. Consequentemente, a aceleração da barra é igual a

$$a = \frac{mg \operatorname{tg}^2 \alpha}{m + M \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

§ 8. DINÂMICA DO MOVIMENTO CURVILINEO

189. Utilizando a segunda lei de Newton, podemos escrever:

$$\frac{(M + m) u^2}{L} = T - (M + m) g, \text{ onde } u = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \sqrt{Lg}$$

(ver o problema 159), donde

$$T = (M + m) g \left(4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right).$$

190. $T_1 = 10m\omega^2 l$; $T_2 = 9m\omega^2 l$; $T_3 = 7m\omega^2 l$; $T_4 = 4m\omega^2 l$.

191. As distâncias do centro de gravidade até os pesos com massas m_1 e m_2 são iguais, correspondentemente, a:

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad y = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

Simbolizemos por v a velocidade do centro de gravidade, por ω a velocidade angular de rotação. Então, temos que:

$$u + \omega x = v_1 \text{ e } u - \omega y = v_2, \text{ donde } \omega = \frac{v_1 - v_2}{l}, \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

192. A velocidade de rotação diminuirá. A plataforma transmite ao projétil uma quantidade de movimento complementar, pela tangente à trajetória do extremo do cano do canhão. Segundo a terceira lei de Newton, o projétil expelido exercerá pressão na parte interna do cano, dirigida em sentido contrário à rotação.
193. No momento em que o corpo toca o plano horizontal, as componentes horizontal e vertical da velocidade do corpo terão valores iguais a $v_{\text{vert}} = \sqrt{2gH} \sin \alpha$ e $v_{\text{hor}} = \sqrt{2gH} \cos \alpha$. No caso de um choque absolutamente elástico a componente vertical mudará de sinal e a componente horizontal permanecerá a mesma. A trajetória do corpo terá a forma de partes de parábolas (fig. 355),

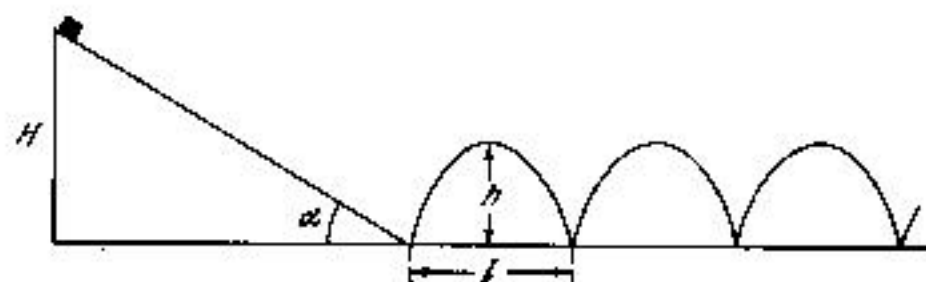


Fig. 355

uma vez que $h = H \sin^2 \alpha$ e $l = 2H \sin 2\alpha$. Se o choque for absolutamente inelástico, a componente vertical da velocidade tornar-se-á igual a zero e o corpo mover-se-á uniformemente no plano horizontal com velocidade $v = \sqrt{2gH} \cos \alpha$.

194. Por parte da terra na motocicleta atuam duas forças (fig. 356): N que é a reação do apoio e f que é a força de atrito. A soma destas forças T está dirigida ao longo da motocicleta. (Em caso contrário, relativamente ao centro de gravidade O agiria o momento das forças que derrubaria a motocicleta). No centro de gravidade do corpo age a força resultante $F = T + P$, onde P é a força de gravidade. Uma vez que $F = T \cos \alpha = f$, então, a aceleração centrípeta é transmitida à motocicleta somente pela força de atrito f . De acordo com a segunda lei de Newton, temos: $f = m\omega^2 R$, sendo $f \leq kmg$. Como vê-se na fig. 356, $mg = f \tan \alpha$. O valor mínimo de R , obtido do sistema de equações dado, é $R_{\min} = v^2/kg = 147 \text{ m}$, sendo, nesse caso, a $\tan \alpha = Rg/v^2 \approx 3,33$ e, consequentemente, $\alpha \approx 73^\circ 20'$.

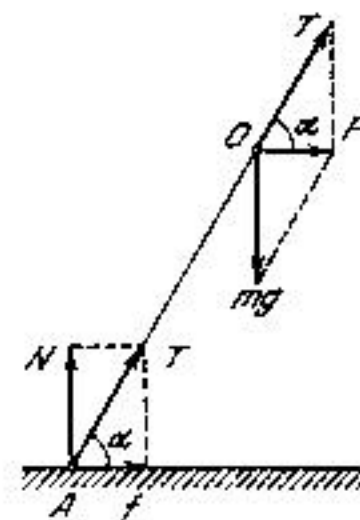


Fig. 356

195. Analisemos uma posição intermediária da barra, quando a mesma inclina-se, em relação à vertical, em um ângulo α . Segundo a lei de conservação da energia, temos que: $MgR = MgR \cos \alpha + \frac{1}{2} M\omega^2 R^2$, onde R é a distância do extremo da barra até o centro de gravidade da esfera. Obtemos, então, que a velocidade angular ω expressa-se da seguinte forma:

$$\omega = 2 \sin(\alpha/2) \sqrt{g/R}.$$

Para determinado α ela será muito menor, quanto maior for R . Consequentemente, a barra cairá mais rapidamente, se for colocada no extremo B .

196. De acordo com a segunda lei de Newton: $m\omega^2 R = mg \cos \alpha - N$, onde R é a força com a qual a barra deformada age na esfera. No momento em que cessa a pressão da barra no solo, a deformação da mesma desaparece e $N = 0$. Como foi demonstrado no problema 195, $\omega = 2\sqrt{g/R} \sin(\alpha/2)$. Colocando este valor de ω na equação

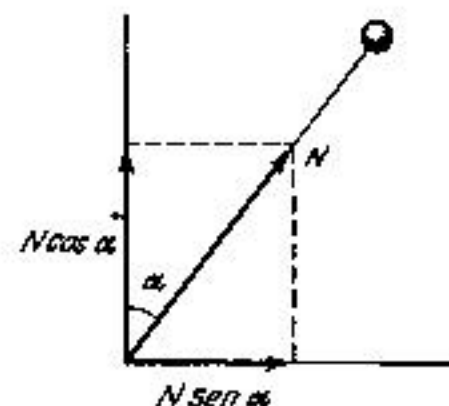


Fig. 357

do movimento, encontramos o valor do $\cos \alpha = 2/3$, donde $\alpha = 48^\circ 10'$. A fim de que a barra não deslize, há necessidade de satisfazer a seguinte condição: $N \sin \alpha \leq kN \cos \alpha$ (fig. 357). Consequentemente, $k \geq \tan \alpha$; donde $k \geq \sqrt{5}/2$.

197. Se $k > \sqrt{5}/2$, a barra não escorregará até o momento, em que N não se torne igual a zero, i.é., enquanto $\alpha \leq \arccos(2/3)$. Para $\alpha > \arccos(2/3)$, da equação $m\omega^2 R - mg \cos \alpha - N$ obtemos $N < 0$. Isto significa, que se um dos extremos estava fixado no solo, a barra foi esticada. Se a barra não estiver fixada, a esfera começará a cair livremente desde o momento, em que o ângulo atinge o valor igual a: $\alpha_0 = \arccos(2/3)$. Neste momento a velocidade $v = \omega R = \sqrt{\frac{2}{3} g R}$ forma um ângulo α_0 com a horizontal

e a altura da esfera sobre o solo é igual a $CD = \frac{2}{3} R$ (fig. 358).

Utilizando a lei da queda livre, encontraremos a distância procurada:

$$AB = AL : DB = R (5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})/27 \approx 1,12 R.$$

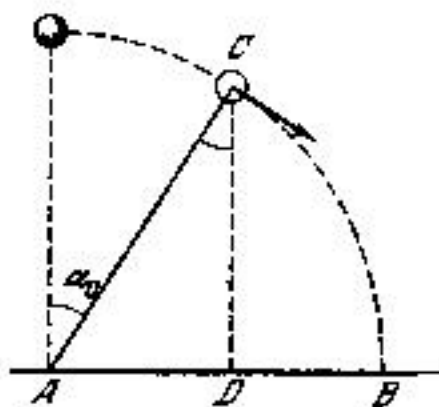


Fig. 358

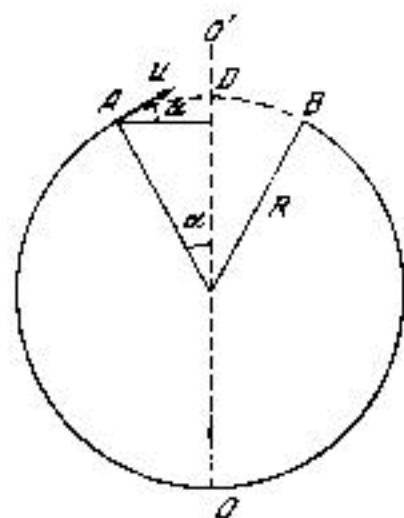


Fig. 359

198. No segmento ADB (fig. 359) a conta mover-se-á sob a ação de força de gravidade. A fim de que ela abandone o arame no ponto A e caia no ponto B , há necessidade de que o trajeto percorrido horizontalmente pela mesma, seja igual a $2R \sin \alpha$. Para isto a velocidade da conta no ponto A deverá satisfazer a condição:

$$(2u^2 \sin \alpha \cos \alpha)/g = 2R \sin \alpha$$

(ver o problema 40). Dessa condição obtemos: $u^2 = gR/\cos \alpha$.

A conta terá no ponto A uma velocidade u , se no ponto O lhe for transmitida uma velocidade v , igual a:

$$v = \sqrt{u^2 + 2gR(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{gR \left(2 + 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}$$

de acordo com a lei de conservação da energia.

199. Suponhamos, que o trajeto não tenha interrupções. Então, no

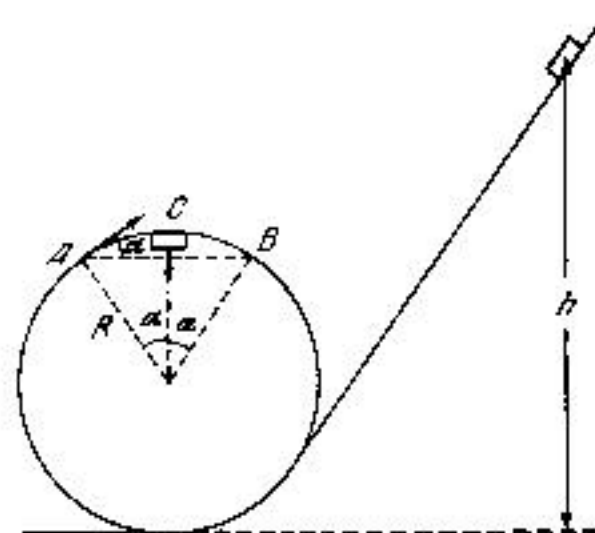


Fig. 360

ponto C (fig. 360) temos que

$$mg = mv^2/R \quad (1)$$

e segundo a lei de conservação da energia obtemos:

$$mgh = mg 2R + mv^2/2. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos, que $h = 5/2 R$. A velocidade no ponto A determina-se pela lei de conservação da energia:

$$mg 5/2 R = mv_A^2/2 + mgR(1 + \cos \alpha). \quad (3)$$

O corpo, cuja direção de lançamento forme um ângulo α com a horizontal, voará pela horizontal uma distância igual a:

$$AB = (v_A^2 \sin 2\alpha)/g. \quad (4)$$

Por outro lado, temos:

$$AB = 2R \sin \alpha. \quad (5)$$

De (4) e (5) obtemos: $v_A^2 = Rg/\cos \alpha$. Substituindo esse valor na equação (3), temos:

$$mg 5/2 R = \frac{mgR}{2 \cos \alpha} + mgR + mgR \cos \alpha,$$

onde determinamos $\cos \alpha = (3 + 1)/4$ e, consequentemente, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$. Não é difícil verificar que, se $\alpha > 60^\circ$, o corpo cairá dentro de arco; se $\alpha < 60^\circ$, o corpo voará para fora.

200. Analisemos as forças que agem no fio, que passa através do prego, situado à esquerda (fig. 361). As componentes verticais das forças de tensão T , que agem nos corpos, são iguais a mg , se o fio estiver

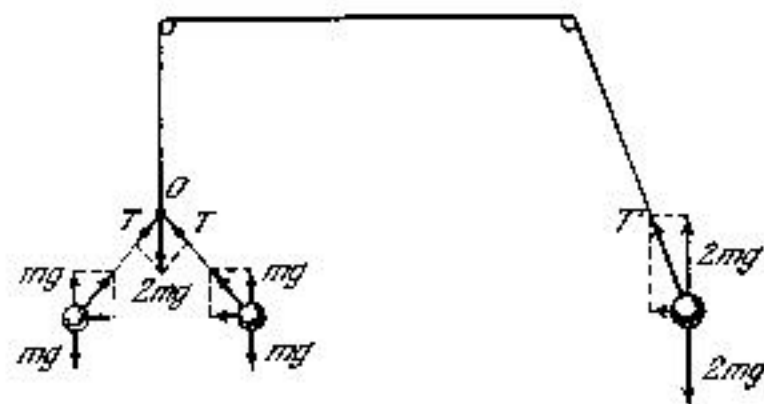


Fig. 361

fixo no prego. No nó (ponto O), segundo a terceira lei de Newton agem as mesmas forças T . A soma das mesmas está dirigida verticalmente para baixo e é igual a $2mg$. No caso de um corpo que gira, a componente vertical da tensão do fio T' é igual a $2mg$ (se o corpo não descer). Mas, a própria tensão do fio $T' > 2mg$ (fig. 361). Consequentemente, nosso sistema não permanecerá em equilíbrio. O peso da direita puxará o fio.

201. A direção da aceleração coincide com a direção da força resultante. A aceleração está dirigida verticalmente para baixo nas posições extremas superiores B e C da esfera (fig. 362); verticalmente para

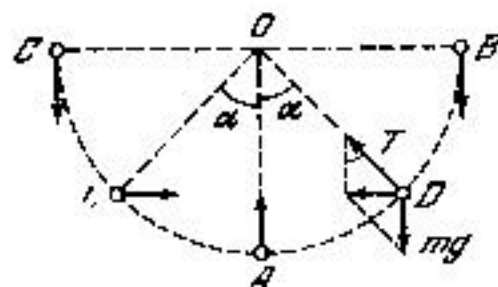


Fig. 362

cima, na posição extrema inferior A e horizontalmente nas posições D e L, determinadas pelo ângulo α . Achamos α . De acordo com a segunda lei de Newton, o produto da massa pela aceleração centrípeta é igual a soma das projeções das forças na direção do raio de rotação:

$$mv^2/l = T - mg \cos \alpha.$$

Por outro lado, como vê-se da fig. 362, $T = mg/\cos \alpha$. Baseando-se na lei de conservação da energia, podemos escrever que:

$$mv^2/2 = mgl \cos \alpha.$$

Dessas equações determinamos que $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ e, consequentemente: $\alpha \approx 54^\circ 45'$.

202. Simbolizemos por ω a velocidade angular da barra, no momento em que a mesma passa pela vertical. Baseando-se na lei de conservação de energia, podemos escrever:

$$\frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) - g(1 - \cos \alpha) (m_1 r_1 + m_2 r_2),$$

ou

$$\omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}},$$

donde temos que:

$$v_1 = \omega r_1 = 2r_1 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}},$$

$$v_2 = \omega r_2 = 2r_2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}.$$

203. A resultante das forças aplicadas à esfera, $F = mg \tan \alpha$, deverá criar uma aceleração centrípeta $a = \omega^2 r$, onde $r = l \sin \alpha$

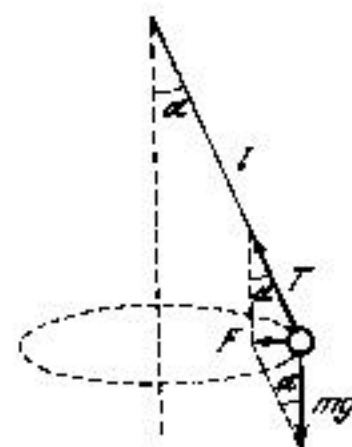


Fig. 363

(fig. 363). Donde temos que:

$$mg \tan \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha.$$

Esta equação tem duas soluções:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \arccos(g/\omega^2 l).$$

No segundo caso são válidas ambas as soluções: $\alpha_1 = 0$ (nessa condição, a esfera encontra-se em equilíbrio instável) e $\alpha_2 = 60^\circ$. No primeiro caso é válida somente a solução $\alpha_1 = 0$.

204. Decomponemos a força F , com que a barra age no peso m , nas componentes perpendiculares entre si T e N (fig. 364). Projetemos as forças na vertical e na horizontal e escrevamos as equações de Newton para estas direções:

$$m\omega^2 l \sin \varphi = T \sin \varphi - N \cos \varphi, \quad mg = T \cos \varphi + N \sin \varphi.$$

Destas equações determinaremos T e N :

$$T = m(\omega^2 l \sin^2 \varphi + g \cos \varphi), \\ N = m(g - \omega^2 l \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Consequentemente, temos que:

$$F = \sqrt{T^2 + N^2} = m \sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \varphi}.$$

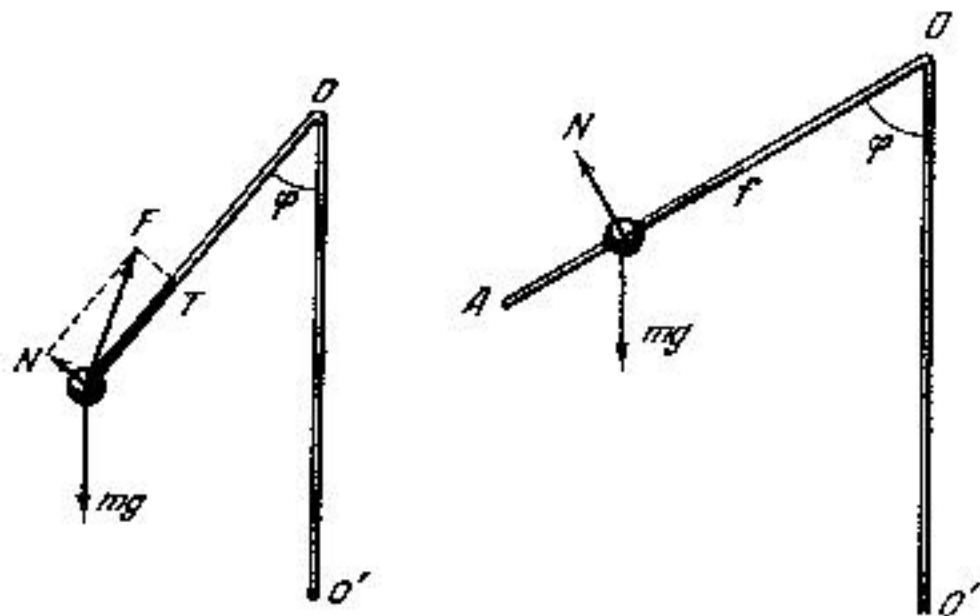


Fig. 364

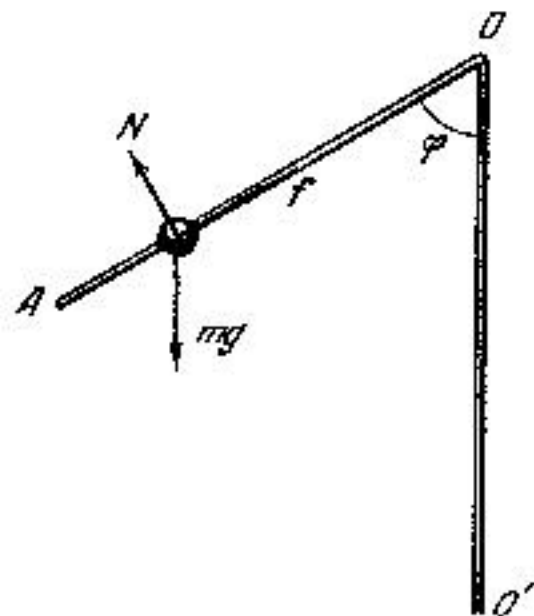


Fig. 365

205. As forças, que agem na conta, estão representadas na fig. 365: f é a força de atrito; mg é a força de gravidade; N é a força normal da reação. As equações de Newton para as projeções das forças, nas direções horizontal e vertical, têm a seguinte forma:

$$m\omega^2 l \sin \varphi = f \sin \varphi - N \cos \varphi, \\ f \cos \varphi + N \sin \varphi = mg.$$

Dessas equações determinamos que:

$$f = m\omega^2 l \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi, \\ N = mg \sin \varphi - m\omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi.$$

Em caso de equilíbrio temos: $f \leq kN$, ou $m\omega^2 l \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi \leq k(mg \sin \varphi - m\omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi)$, donde obtemos

$$l \leq \frac{(k \sin \varphi + \cos \varphi) g}{\sin \varphi (\sin \varphi + k \cos \varphi) \omega^2}.$$

Em um caso particular temos: $\varphi = \pi/2$, $l \leq kg/\omega^2$.

206. Na fig. 366 estão representadas as forças que agem nos pesos. T_1 e T_2 são as tensões dos fios. Escrevamos as equações de Newton para as projeções nas direções horizontal e vertical: para o primeiro peso:

$$T_1 \sin \varphi - T_2 \sin \psi = m\omega^2 l \sin \varphi, \\ T_1 \cos \varphi - T_2 \cos \psi - mg = 0; \quad (1)$$

para o segundo peso:

$$m\omega^2 l (\sin \varphi + \sin \psi) = T_2 \sin \psi, \\ T_2 \cos \psi = mg. \quad (2)$$

Excluindo do sistema de equações (1) e (2) T_1 e T_2 , obtemos as seguintes equações:

$$\alpha \sin \varphi - 2 \lg \varphi - \lg \psi, \\ \alpha (\sin \varphi + \sin \psi) = \lg \psi,$$

onde $\alpha = \omega^2 l/g$. Destas equações deduzimos, que: $2 \lg \varphi - \lg \psi < < \lg \psi$ e por conseguinte $\varphi < \psi$.

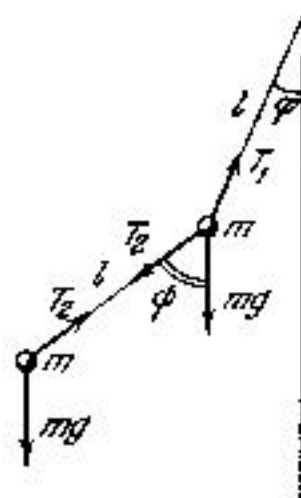


Fig. 366

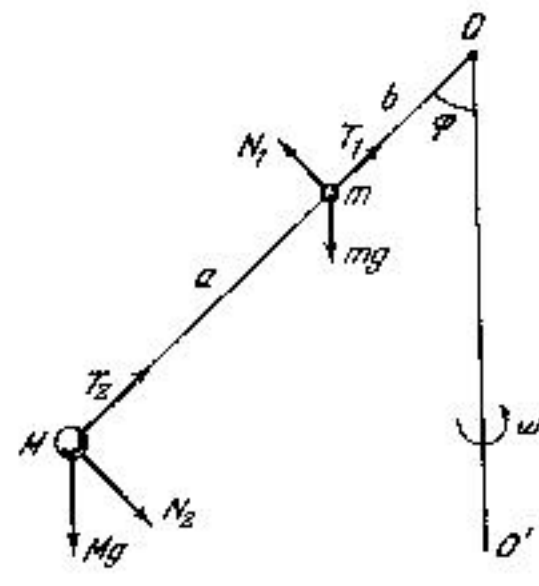


Fig. 367

207. As forças que agem nos pesos, estão representadas na fig. 367. T_1 e N_1 , T_2 e N_2 são as componentes das forças, com que a barra

age nos pesos m e M . N_1 e N_2 estão dirigidas em sentidos opostos, uma vez que a soma dos momentos das forças, que agem na barra relativamente ao ponto O , é igual a zero como consequência da imponderabilidade da barra: $N_1 b - N_2 (b + a) = 0$. As equações do movimento dos pesos para as projeções, nas direções horizontal e vertical, têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} m\omega^2 b \sin \varphi &= T_1 \sin \varphi - N_1 \cos \varphi, \\ T_1 \cos \varphi &= N_1 \sin \varphi + mg, \\ M\omega^2 (b + a) \sin \varphi &= T_2 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi, \\ T_2 \cos \varphi &= N_2 \sin \varphi + Mg. \end{aligned}$$

Exluindo do sistema as incógnitas T_1 , T_2 , N_1 e N_2 , obtemos que:

1) $\varphi = 0$;

$$2) \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2} \frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}.$$

A primeira solução é válida para qualquer velocidade angular de rotação, e a segunda, para $\omega \geq \sqrt{\frac{mb + M(a+b)}{R \frac{mb^2 + M(a+b)^2}{R}}}$ (ver solução do problema 203).

208. Em equilíbrio, temos que: $m\omega^2 x = kx$, onde x é a distância do corpo até o eixo. Daqui vê-se, claramente, que para qualquer x a mola transmite ao corpo a aceleração centrípeta necessária à rotação. Em virtude disso, depois do corpo ter sido empurrado, o mesmo mover-se-á com velocidade constante até o apoio A , ou até o momento, em que se verificar para a mola a lei da proporcionalidade direta entre a força e a deformação.

209. Escrevamos a segunda lei de Newton para um pequeno segmento da corrente de massa igual a $(m/l)R\Delta\alpha$, representado na fig. 368:

$$(m/l)R\Delta\alpha(2nn)^2 R = 2T \sin(\Delta\alpha/2).$$

Uma vez que o ângulo $\Delta\alpha$ é pequeno, então, $\sin(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$, donde $T = mln^2 \approx 90$ N.

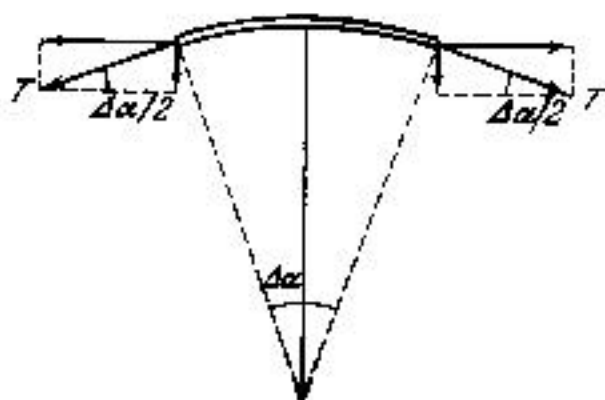


Fig. 368

210. Destaquemos um pequeno segmento do tubo de comprimento igual a $R\Delta\alpha$ (fig. 369). As paredes esticadas do tubo transmitem ao líquido que passa por este segmento, uma aceleração $a = v^2/R$.

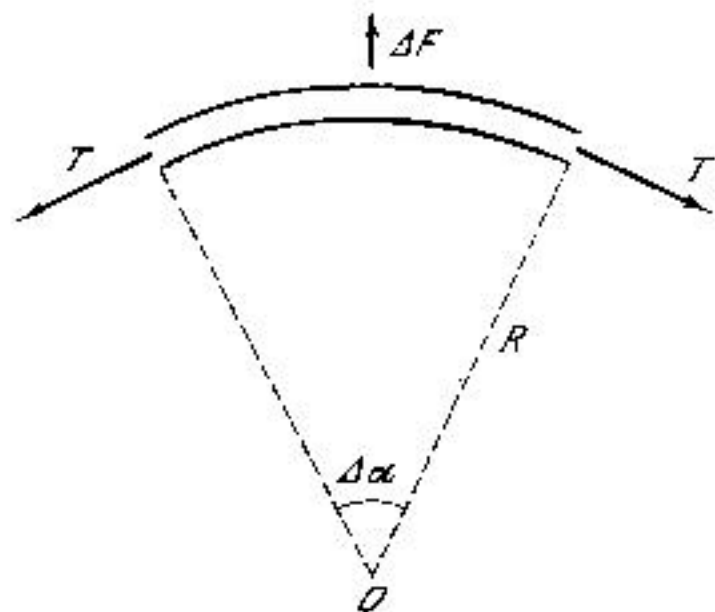


Fig. 369

Pela terceira lei de Newton o líquido age sobre o segmento com uma força igual a:

$$\Delta F = \rho \frac{\pi d^2}{4} R \Delta\alpha \frac{v^2}{R},$$

onde ρ é a densidade do líquido. As forças de tensão T do anel compensam a força ΔF . Da condição de equilíbrio, considerando que $\Delta\alpha$ é pequeno, temos:

$$\Delta F = 2T \sin(\Delta\alpha/2) \approx T\Delta\alpha.$$

Consequentemente, a força procurada é $T = (\rho\pi d^2/4)v^2$.

211. Dividamos a barra em n partes de igual comprimento e analisemos uma parte arbitrária com índice i (fig. 370). As acelerações dos diferentes pontos desta parte serão diferentes, uma vez que as distâncias dos pontos até o eixo de rotação são diferentes. Entretanto, se a diferença $(r_{i+1} - r_i)$ é pequena, pode-se considerar, que a aceleração da parte i é igual a $\omega^2(r_{i+1} + r_i)/2$, o que será tanto mais exato, quanto menor for o comprimento da parte i .

Na parte i age a força elástica T_{i+1} , por parte da seção deformada $(i+1)$, e a força T_i , por parte da seção $(i-1)$. Uma vez que a massa da parte i é igual a $(m/l)(r_{i+1} - r_i)$, então, baseando-se na segunda lei de Newton, temos:

$$T_i - T_{i+1} = \frac{m}{l} (r_{i+1} - r_i) \omega^2 \frac{r_{i+1} + r_i}{2},$$

ou

$$T_{i+1} - T_i = -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

Escrevamos as equações do movimento para as partes de n até k

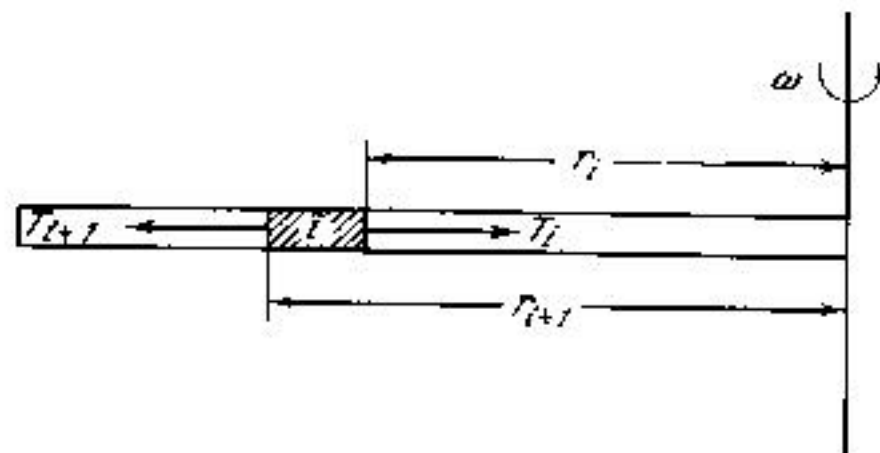


Fig. 370

inclusive, considerando, que $r_{n+1} = l$ e $r_k = x$:

$$\begin{aligned} -T_n &= -\frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r_n^2), \\ T_n - T_{n-1} &= -\frac{m\omega^2}{2l} (r_n^2 - r_{n-1}^2), \\ &\dots \\ T_{k+2} - T_{k+1} &= -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{k+2}^2 - r_{k+1}^2), \\ T_{k+1} - T_k &= -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{k+1}^2 - x^2). \end{aligned}$$

Na primeira equação deste sistema consideramos que a força elástica no extremo da barra não age, i.e., $T_{n+1} = 0$. Somando as equações do sistema, obtemos que a tensão procurada é $T_r = -\frac{m\omega^2}{2} (l^2 - x^2)$. Quanto mais próximas as seções da barra estiverem do eixo de rotação, tanto maior será o grau de extensão da mesma.

212. Em um sistema de coordenadas fixo, em relação ao eixo, a força de tensão da barra não realizará trabalho, uma vez que a mesma todo o tempo estará dirigida perpendicularmente à velocidade da esfera. Num sistema em movimento esta força realiza um trabalho diferente de zero; graças a este trabalho ocorre a variação da energia cinética da esfera.

213. Uma seção do aro AB , da massa m , possui na posição mais alta uma energia igual a $mg2R + m(2v)^2/2$. As energias cinética e potencial da seção AB começam a diminuir durante o movimento. A perda da energia ocorre como consequência do trabalho das forças de deformação elástica do aro, cuja resultante é a força centrípeta sempre dirigida para o centro. A velocidade da seção AB forma um ângulo obtuso α com a força F (fig. 371). Em virtude disso, o trabalho da força $A_r = FAS \cos \alpha$ é negativo e, consequentemente, diminui a energia da seção de massa m . Como a seção AB passa pela posição extrema inferior, o trabalho da força F , como é fácil ver, torna-se positivo e a energia da seção AB começa a aumentar.

214. Tracemos do ponto A , que é o eixo instantâneo de rotação (ver o problema 57), uma tangente à circunferência interna da bobina (fig. 372). Se a direção do fio coincidir com a tangente AC , o momento das forças, que giram a bobina relativamente ao eixo instantâneo, será igual a zero. Por isso, a bobina, que está em repouso, não girará em redor do eixo instantâneo e, consequentemente, não deslizará. O valor do ângulo α , no qual ocorre a variação da direção do movimento da bobina, determina-se do triângulo AOR : $\sin \alpha = r/R$. Se a inclinação do fio for maior do que α , a bobina rolará para a direita, se for menor, então, rolará para a esquerda,

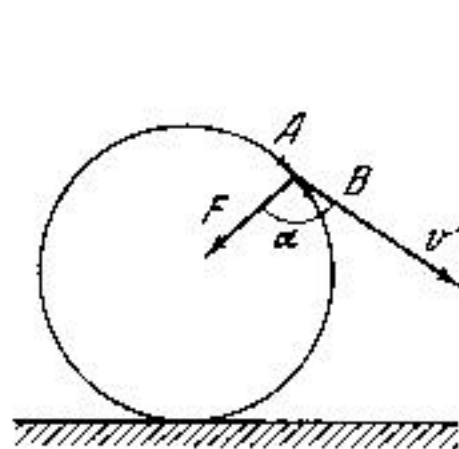


Fig. 371

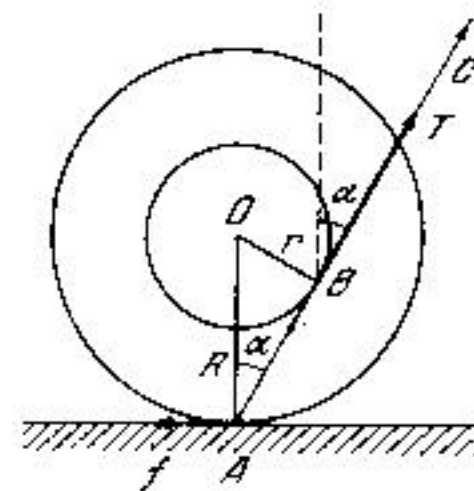


Fig. 372

considerando que não haja escorregamento. Se a tensão do fio F satisfaz a condição $Fr \leq fR$, onde f é a força de atrito, então a bobina permanece fixa. Em caso contrário, para o valor de $\sin \alpha = r/R$ ela começa a girar no lugar, em sentido anti-horário, em redor do ponto O .

215. Dividamos todo o aro em seções pequenas e iguais de massa Δm cada uma. Analisemos duas seções simétricas (relativamente ao centro). Todas as partículas do aro participam, simultaneamente, em dois movimentos: no movimento de translação com velocidade v e no movimento de rotação com velocidade $\omega = v/R$. A veloci-

dade resultante v_2 da seção superior do aro determinamos como a soma geométrica das velocidades v e v_1 (fig. 373):

$$v_2^2 = v_1^2 + v^2 + 2vv_1 \cos \alpha,$$

Para a seção simétrica, temos

$$v_2^2 = v^2 + v^2 - 2vv_1 \cos \alpha.$$

A energia cinética resultante de ambas as seções é igual a:

$$\Delta E = \Delta mv_2^2/2 + \Delta mv_1^2/2 = \Delta mv^2 + \Delta m\omega^2 R^2.$$

Uma vez que esta expressão é válida para qualquer uma das duas

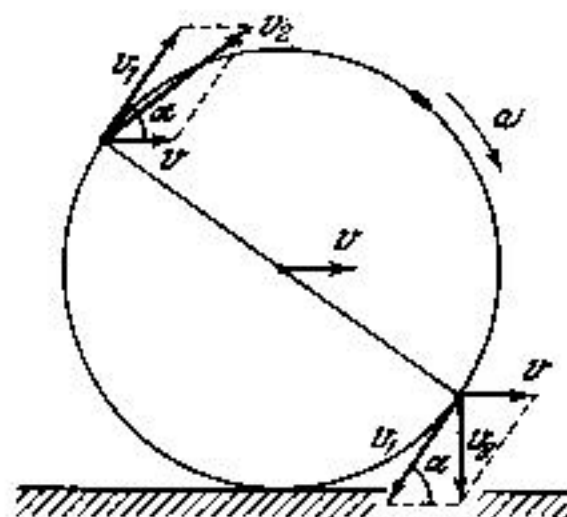


Fig. 373

seções, então, podemos escrever para todo o aro que:

$$E = Mv^2/2 + MR^2\omega^2/2.$$

Se o aro rola sem escorregamento, então temos que: $v = \omega R$ e consequentemente, $E = Mv^2$.

216. $E = \frac{2Pv^2}{g} (\pi r + l).$

217. O cilindro de material mais denso evidentemente será o ôco. Para velocidades iguais do movimento de translação, a energia cinética do movimento de rotação será maior para o cilindro ôco, uma vez que as partículas de sua massa distanciam-se mais do centro e, consequentemente, possuem maior velocidade. Em virtude disso, no processo de rolamento, sem escorregamento, de um plano inclinado, o cilindro ôco adquire uma velocidade menor do que o cilindro sólido. As energias cinéticas de ambos os cilindros no final do trajeto serão iguais, o que é possível somente para diferentes velocidades, uma vez que para velocidades iguais as energias do movimento de translação serão iguais e a energia do movimento de rotação do cilindro sólido será obrigatoriamente menor do que a do cilindro ôco.

218. No movimento da bobina, a força de atrito não realiza trabalho, uma vez que não há escorregamento do cabo e da bobina. Consequentemente, a energia do sistema não varia e é igual a:

$$\frac{P}{g} v^2 + PR - \frac{P - \rho x}{g} u^2 + (P - \rho x) R,$$

onde u é a velocidade procurada. Da equação obtemos: $u = \sqrt{(Pv^2 + PRgx)/(P - \rho x)}$ que tende ao infinito para $P = \rho x$, em virtude de não termos considerado a massa da bobina. A quantidade de movimento diminui como resultado da ação da força de atrito, dirigida em sentido oposto ao do movimento.

219. Uma vez que a força de atrito é constante, o movimento será uniformemente retardado. A potência desenvolvida pela força de atrito é igual a fv , onde $v = \omega r$ é a velocidade instantânea do ponto da roldana, ao qual foi aplicada a força f . O trabalho em um tempo t é igual a potência média, multiplicada pelo tempo:

$$A = f \frac{\omega_0 r + \omega r}{2} t.$$

A variação da energia cinética da roldana é igual a este trabalho:

$$\frac{\pi r^2}{2} (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{f r t}{2} (\omega_0 + \omega),$$

donde: $\omega = \omega_0 - ft/\pi r$.

220. Como a força de atrito f é constante, a variação da quantidade de movimento do aro em um tempo t será igual a $mv = ft$. No caso de rolamento sem escorregamento, a velocidade do ponto do aro, ao qual foi aplicada a força de atrito, é igual a zero. Igualando o trabalho das forças de atrito à diferença das energias cinéticas, obtemos que:

$$\frac{m\omega_0^2 r^2}{2} - mv^2 = f \frac{\omega_0 r + 0}{2} t$$

(ver o problema 215). Resolvendo a equação relativamente a v , obtemos que $v = \omega_0 r/2$.

221. As equações que expressam a variação da quantidade de movimento e a variação da energia cinética do aro, têm a seguinte forma:

$$m(v_0 - v) = ft, \quad \frac{mv_0^2}{2} - mv^2 = f \frac{v_0 + 0}{2} t$$

onde $v = \omega r$ é a velocidade do centro do aro, no rolamento sem escorregamento. Resolvendo estas equações, relativamente a v , obtemos que: $v = v_0/2$. Consequentemente, a grandeza procurada é: $\omega = v_0/2r$.

222. As equações que expressam a variação da quantidade de movimento e a variação da energia cinética do aro, têm a seguinte forma:

$$m(v_0 - v) = ft, \quad \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 r^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2} = f \frac{(v_0 - \omega_0 r) + (v + \omega r)}{2} t$$

onde v é a velocidade do centro do aro em qualquer momento de tempo subsequente. Resolvendo o sistema de equações dadas, obtemos que:

$$v = v_0 - (\mu r) t, \quad \omega = \omega_0 - (v/\mu r) t.$$

Se $v_0 < \omega_0 r$, no instante de tempo $\tau = mv_0/f$ o aro para, girando com velocidade angular igual a $\omega = \omega_0 - v_0/\tau$. Depois o aro começa a mover-se em sentido contrário, com escorregamento. Depois de um tempo determinado, cessa o escorregamento e o aro rolará sem escorregamento à esquerda com velocidade de translação $v = (\omega_0 r - v_0)/2$ (ver o problema 221).

Se $v_0 > \omega_0 r$, então, depois de um tempo $\tau = m r \omega_0 / f$, o aro para de girar, movendo-se para a direita, com velocidade de translação $v = v_0 - r \omega_0$. Posteriormente, a rotação do aro ocorrerá em sentido contrário e, passado um certo tempo, o aro rolará sem escorregamento à direita: a velocidade angular será igual a: $\omega = (v_0 - r \omega_0) / 2\tau$. Salientemos, como demonstra a experiência, que o aro freará mesmo na ausência de escorregamento. Nós não obtivemos tal resultado, devido a que não consideramos especificamente a fricção de deslizamento.

223. Uma vez que os aros não escorregam, então v_0 , a velocidade do centro de gravidade dos aros, e v , a velocidade do peso, relacionam-se pela seguinte relação:

$$v_0 = v \frac{R}{R-r}.$$

Suponhamos, que o peso elevou-se a uma altura h . Considerando, que, no momento inicial, o sistema estava em repouso e utilizando a lei de conservação da energia, podemos escrever que:

$$mgh = mv^2/2 + Mv_0^2$$

(ver o problema 215). Da última relação determinamos a velocidade do peso:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}},$$

e determinamos a aceleração do peso, que é igual a:

$$a = \frac{mg}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}.$$

O peso move-se para baixo com aceleração a sob a ação de duas forças: a força da gravidade mg e a tensão do fio T . A tensão do fio procurada é igual a:

$$T = m(g - a) = \frac{2mMg \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}.$$

Uma vez, que o centro de gravidade do aro move-se com aceleração $a \left(\frac{R}{R-r} \right)$, sob ação da força T e da força de fricção F , então,

baseando-se na segunda lei de Newton, para a força F obtemos a igualdade:

$$F - T = Ma \frac{R}{R-r},$$

ou

$$F = \frac{Mmz \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \left(2 - \frac{R}{R-r} \right)}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2} = \frac{Mmz \left(1 - \frac{r}{R} \right)}{m \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2 + 2M}.$$

O valor da força de fricção de repouso não pode ultrapassar a grandeza kMg . Em virtude disso, o escorregamento começará quando:

$$\frac{Mmz \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \left(1 - \frac{r}{R} \right)}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2} > kMg, \quad \text{ou } k < \frac{1 - \frac{r}{R}}{2 \frac{M}{m} + \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2}.$$

224. O centro de gravidade da bobina não se deslocará, se a tensão do fio satisfaz à igualdade $R = Mg \sin \alpha$. Para a determinação da tensão do fio T , determinemos inicialmente a aceleração do peso de massa m . Suponhamos, que o peso abaixe a uma altura h . Uma vez que o centro de gravidade da bobina, pela condição do problema, deverá manter-se em repouso, então, a variação da energia potencial é igual a mgh . Se v é a velocidade do movimento do peso de massa m , então, a velocidade dos pontos da bobina, que distanciam-se em R do eixo de rotação, é igual a: vR/r . Consequentemente, a energia cinética do sistema é:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} \frac{R^2}{r^2}.$$

Da lei de conservação de energia deduzimos que:

$$(m + MR^2/r^2) v^2/2 = mgh \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + MR^2/r^2}}.$$

Dessa equação obtemos, que a aceleração do peso é igual a $a = \frac{mg}{m + MR^2/r^2}$. Sabendo a aceleração do peso, encontramos a tensão do fio:

$$T = m(g - a) = mg \frac{MR^2/r^2}{m + MR^2/r^2}.$$

Deste modo, para o $\sin \alpha$ obtemos a seguinte expressão:

$$\sin \alpha = \frac{1}{M/m + r^2/R^2}.$$

O centro de gravidade da bobina ficará em repouso somente no caso em que:

$$M/m + r^2/R^2 \geq 1.$$

225. Se a velocidade da tábua é igual a v , a velocidade do centro de gravidade de cada rolete é: $v/2$ (ver o problema 57). A energia cinética do sistema (tábua e ambos os roletes) será igual a:

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{2mr^2}{4} = \frac{M+m}{2} v^2.$$

Igualando a energia cinética ao trabalho da força Q , no trajeto S , obtemos que:

$$\frac{M+m}{2} v^2 = QS, \quad v = \sqrt{\frac{2QS}{M+m}}$$

(fig. 374). (As forças de fricção não realizam trabalho, uma vez que não existe escorregamento).

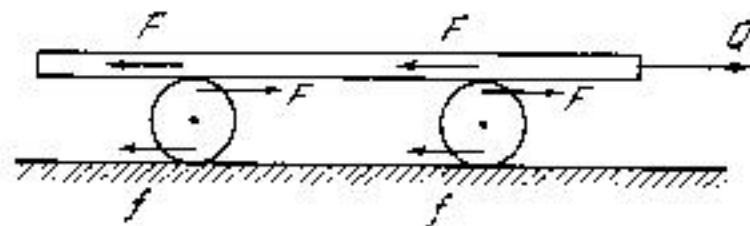


Fig. 374

Da expressão para a velocidade do movimento da tábua deduzimos, que a aceleração da mesma é igual a: $a = Q/(M+m)$. Para a determinação da força de atrito, que age do rolete na mesa, escrevemos a equação do movimento da tábua: $Ma = Q - 2f$. Substituindo o valor da aceleração a na equação, obtemos que: $f = mQ/2(M+m)$. Uma vez que a velocidade do centro de gravidade dos roletes é duas vezes menor do que a velocidade da tábua, então, a aceleração do centro de gravidade dos roletes será duas vezes menor do que a aceleração da tábua. Em virtude disto, a equação do movimento do centro de gravidade dos roletes terá a seguinte forma: $ma/2 = F - f$. Desta equação determinamos que: $f = 0$.

226. Suponhamos, para maior determinação, que $m_1 R > m_2 r$. Neste caso, o primeiro peso baixará e o segundo elevar-se-á. Suponhamos, que o primeiro peso baixou a uma altura h . Então, o segundo elevou-se em hr/R . Então a perda da energia potencial será igual a:

$$m_1 gh - m_2 gh r/R = gh(m_1 - m_2 r/R).$$

Se o valor absoluto da velocidade do primeiro peso é v , então, a velocidade do segundo será igual a: vr/R . Todos os pontos da primeira divisão da roldana têm velocidades v e todos os pontos da segunda divisão da mesma possuem uma velocidade: vr/R . A energia cinética do sistema será igual a:

$$\frac{m_1 + M_1}{2} v^2 + \frac{m_2 + M_2}{2} \frac{r^2}{R^2} v^2.$$

Da lei de conservação da energia deduzimos que:

$$\frac{m_1 + M_1}{2} v^2 + \frac{m_2 + M_2}{2} \frac{r^2}{R^2} v^2 = \left(m_1 - m_2 \frac{r}{R} \right) gh,$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2 r/R) gh}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2) r^2/R^2}},$$

donde determinamos, que aceleração do primeiro peso é igual a:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2 r/R}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2) r^2/R^2} g.$$

Da relação $a_1/a_2 = R/r$, onde a_2 é a aceleração do segundo peso, determinamos:

$$a_2 = \frac{(m_1 - m_2 r/R) gr/R}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2) r^2/R^2}.$$

As tensões dos fios T_1 e T_2 , baseando-se na segunda lei de Newton são iguais a:

$$T_1 = \frac{M_1 - m_2 \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} (m_2 + M_2)}{m_1 + M_1 + (m_2 + M_2) \frac{r^2}{R^2}} m_1 g,$$

$$T_2 = \frac{m_1 + M_1 + \frac{r}{R} (m_1 + M_2 \frac{r}{R})}{m_1 + M_1 + (m_2 + M_2) \frac{r^2}{R^2}} m_2 g.$$

A força F , com a qual o sistema age no eixo da roldana, é igual a

$$F = T_1 + T_2 + (M_1 + M_2)g.$$

227. Suponhamos que o trajeto percorrido pelo centro de gravidade do cilindro, em um tempo t , seja S , e a velocidade do centro de gravidade, neste momento de tempo, seja igual a v (fig. 375). Baseando-se

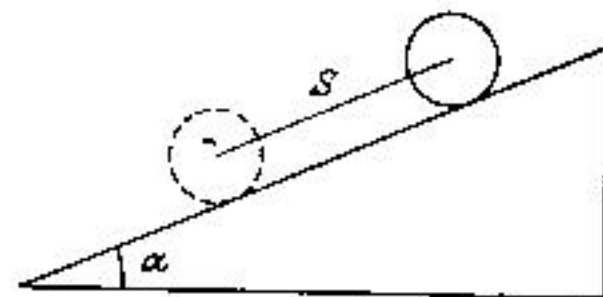


Fig. 375

na lei de conservação da energia, podemos escrever que:

$$Mv^2 = MgS \sin \alpha,$$

donde a velocidade é igual a $v = \sqrt{gS \sin \alpha}$ e, conseqüentemente, a aceleração é $a = g \sin \alpha/2$. A velocidade do centro de gravidade do cilindro e a velocidade angular de rotação do mesmo serão, respectivamente, $v = (g \sin \alpha/2)t$ e $\omega = (g \sin \alpha/2R)t$.

§ 9. LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

228. Pela segunda lei de Newton temos, que: $m_i g = F$, onde m_i é a massa inercial, i.é. a grandeza que caracteriza a capacidade dos corpos de adquirirem uma ou outra aceleração, sob a ação de uma determinada força. Por outro lado, segundo a lei de atração universal $F = \gamma m_g M_g / R^2$, onde o coeficiente de proporcionalidade γ é, também, denominado de constante gravitacional, e m_g e M_g são as massas gravitacionais de interação dos corpos. A massa gravitacional determina a força de atração gravitacional e, neste sentido, pode ser chamada de «carga gravitacional».

Anteriormente, não era evidente que: $m_i = m_g$. Entretanto, somente pela satisfação desta igualdade (é suficiente a proporcionalidade), a aceleração da queda livre é única para todos os corpos, e que ao substituirmos as forças de atração na segunda lei de Newton, as massas m_i e m_g podem ser canceladas e $g = \gamma M/R^2$. Somente a força gravitacional transmite a todos os corpos uma mesma aceleração, independentemente da massa dos mesmos.

229. A aceleração é $g = \gamma M/R^2$ (ver o problema 228). Tomando $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, encontramos que: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.

230. Os corpos, dentro de uma nave cósmica, não exercerão mais pressão em suas paredes, se os mesmos tiverem uma aceleração igual à aceleração da nave cósmica. Uma mesma aceleração, nesta região do espaço, a todos os corpos independentemente da massa dos mesmos, pode ser transmitida somente pela força gravitacional. Conseqüentemente, há necessidade de que o motor da nave esteja desligado e que não exista resistência do meio externo. A nave pode movimentar-se em qualquer direção, relativamente à direção das forças gravitacionais.

231. A força de gravidade transmite uma mesma aceleração ao pêndulo e ao quadro. No sistema não surge nenhuma deformação na queda livre, provocada pela gravitação. Em virtude disso, relativamente ao quadro, o pêndulo mover-se-á, como se não existisse a gravitação (ver solução do problema 230). O mesmo girará com velocidade angular constante até o momento em que durar a queda do quadro.

232. Na seção BCA (fig. 376), a força gravitacional realiza um trabalho positivo (o ângulo θ_1 é agudo) e, conseqüentemente, a velocidade do planeta aumenta. No ponto A a velocidade atinge seu valor máximo. Na seção ADB a força gravitacional realiza um trabalho negativo (o ângulo θ_2 é obtuso) e, conseqüentemente, no movimento por esta seção a velocidade do planeta diminui, atingindo seu valor mínimo no ponto B .

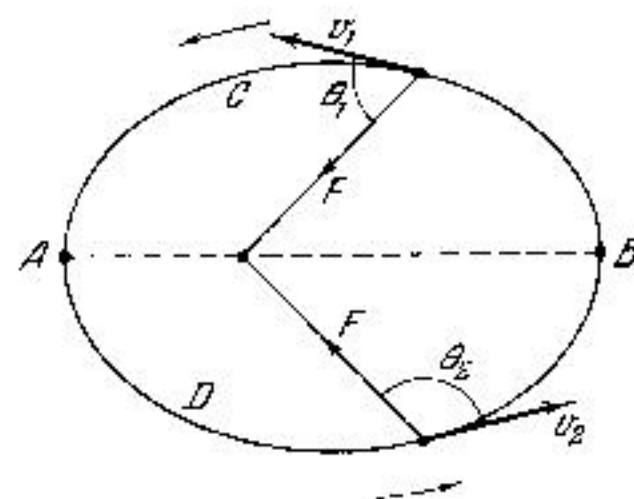


Fig. 376

233. A fim de que o satélite mova-se em uma órbita fechada (circunferência de raio igual a $R + h$) no mesmo deverá agir uma força dirigida ao centro. Esta força, neste caso, é a força de atração da Terra. Pela segunda lei de Newton temos que:

$$mv^2/(R + h) = \gamma mM/(R + h)^2,$$

onde M é a massa da Terra, $R = 6370 \text{ km}$ é o raio do globo terrestre; γ é a constante gravitacional. Na superfície da Terra, temos: $\gamma mM/R^2 = mg$. Conseqüentemente,

$$v = \sqrt{gR^2/(R + h)} \approx 7,5 \text{ km/s}.$$

234. Sob a influência da resistência atmosférica, o satélite gradualmente, no decorrer do tempo, aproxima-se da Terra. O raio da sua órbita diminui. Uma vez que nas camadas superiores a resistência é pequena, então, em uma volta a diminuição do raio é insignificante. Considerando a órbita aproximadamente circular, podemos escrever que:

$$mv^2/R = \gamma mM/R^2,$$

onde R é o raio da órbita. Obtemos que: $v = \sqrt{\gamma M/R}$, i.é., a velocidade do satélite aumenta com a diminuição de R . Este resultado pode explicar-se da seguinte forma. Como conseqüência da resistência atmosférica o movimento do satélite lançado, por exemplo, em uma órbita circular (linha pontilhada na fig. 377) será na realidade segundo uma certa espiral (linha cheia na fig. 377). Em virtude disso, a projeção da força gravitacional F na direção da velocidade do satélite v é diferente de zero. O trabalho da força F (a força F é maior do que a força de resistência da atmosfera f) aumentará a velocidade.

Ao mover-se na atmosfera, a energia mecânica total do satélite diminui, e a energia potencial, ao se aproximar da terra, diminui mais rapidamente do que a energia total. Como conseqüência disto, a energia cinética aumenta. É conveniente salientar que nas camadas atmosféricas densas, em conseqüência da

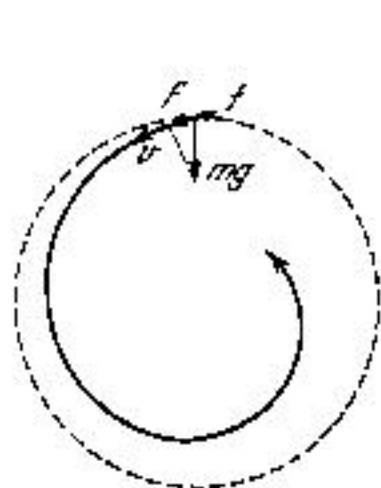


Fig. 377

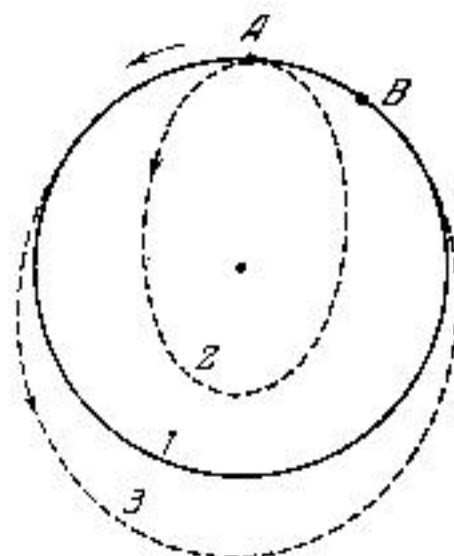


Fig. 378

grande força de resistência, não podemos nem ao menos aproximadamente, considerar o movimento do satélite como giratório em uma circunferência e, conseqüentemente nossa conclusão não é válida.

235. Se lançarmos o recipiente no sentido oposto ao movimento do satélite A, então, o mesmo mover-se-á segundo a elipse 2, localizada dentro da órbita do satélite (fig. 378). O período de rotação do recipiente será muito menor que o período de rotação do satélite B e como consequência disso, eles poderão encontrar-se no ponto de contato das órbitas, depois que os mesmos derem um grande número de voltas.

O recipiente deverá ser lançado na direção do movimento do satélite A. Ele iniciará um movimento segundo a elipse 3. É necessário escolher a velocidade v de tal modo, que em uma volta do recipiente o satélite B, também, dê uma volta e percorra completamente o trajeto AB. Isto é realmente possível, uma vez, que o período de rotação pela elipse 3 é várias vezes maior do que o período de rotação pela órbita circular 1. O recipiente encontrar-se-á com o satélite no ponto de contato das órbitas 3 e 1.

236. Considerando a órbita da Terra aproximadamente curva, para a força gravitacional podemos escrever a expressão: $F = m\omega^2 R$, onde m é a massa da Terra e $\omega = 2\pi/T$ é a velocidade angular da Terra ($T = 365$ dias). Por outro lado, de acordo com a lei de gravidade $F = \gamma m M/R^2$, onde M é a massa do Sol, obtemos que:

$$\gamma m M/R^2 = m\omega^2 R, \text{ ou } M = \omega^2 R^3/\gamma \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

237. Uma vez que tanto a Lua como o satélite movem-se no campo gravitacional da Terra, utilizaremos a terceira lei de Kepler, i.é.:

$$T_1^2/T_2^2 = (h + H + 2R_0)^3/8R^3$$

(fig. 379), donde $h = 2R(T_1/T_2)^{2/3} - H - 2R_0 = 220 \text{ km.}$

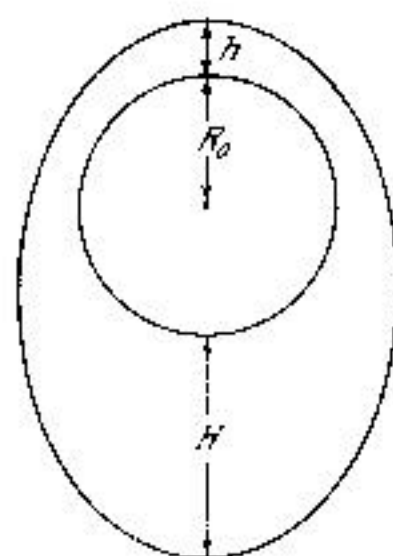


Fig. 379

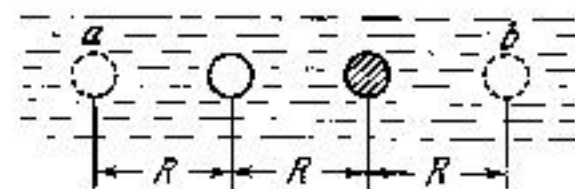


Fig. 380

238. Uma vez que a massa da bola é maior do que a massa da água, em um mesmo volume, então, o campo gravitacional é maior junto da bola, do que distante da mesma. Conseqüentemente, a água junto da bola está um pouco mais comprimida. A força de pressão do líquido, que age na bolha localizada à esquerda, será algumas vezes menor do que a força que age na bolha à direita. Por outro lado, a força gravitacional, entre o ar na bolha e a bola, é maior do que a força de atração entre o ar e o volume da água, destacado por pontos (volume σ na fig. 380). Uma vez que a massa de ar na bolha é muito pequena, então, é decisiva a ação do primeiro fator. A bolha afastar-se-á da bola.

O movimento da bola de ferro, ao contrário, será determinado pelo fato de que a força de atração entre o ar na bolha e a bola é muito menor do que a força de atração entre a bola e o volume de água, destacado por pontos (fig. 380, volume δ). O cálculo da força é feito utilizando as seguintes considerações. Em um meio homogêneo (água) existe uma esfera com ausência quase total de massa (bolha) e uma esfera com massa excessiva (bola). Formalmente, isto pode ser analisado como a presença de massas negativa e positiva.

A força de interação entre as esferas no líquido é igual à força de interação no vácuo entre uma massa negativa, igual à massa da água no volume da bolha e uma massa positiva, igual à diferença entre a massa da bola de ferro e a massa da água no mesmo volume. Conseqüentemente, temos que: $F = -\gamma m_1 \times (m_2 - m_1)/R^2$, onde m_1 é a massa da água na esfera de raio r , e m_2 é a massa da bola de ferro.

239. Nas proximidades da bolha o campo de gravitação é menor do que em um líquido homogêneo. Conseqüentemente, se o líquido é menos comprimido. Por isso, uma bolha tende à seção do líquido, onde exista uma outra bolha e inversamente. As bolhas atrair-se-ão. Duas bolhas em um líquido homogêneo, cujas massas

são insignificantes, podem ser consideradas, formalmente, como massas negativas, superpostas em uma massa positiva m do meio no volume da bolha:

$$F = \gamma (-m) (-m)/R^2 = \gamma m^2/R^2.$$

240. Se a esfera fosse sólida, então, a força gravitacional seria igual a: $F_1 = \gamma M m/l^2$, onde $M = 4/3 \pi R^3 \rho$ é a massa da esfera sem a cavidade. A presença da cavidade é equivalente ao surgimento da força de repulsão $F_2 = \gamma m' m/S^2$, onde $m' = 4/3 \pi r^3 \rho$, sendo S a distância entre o centro da cavidade e o ponto material.

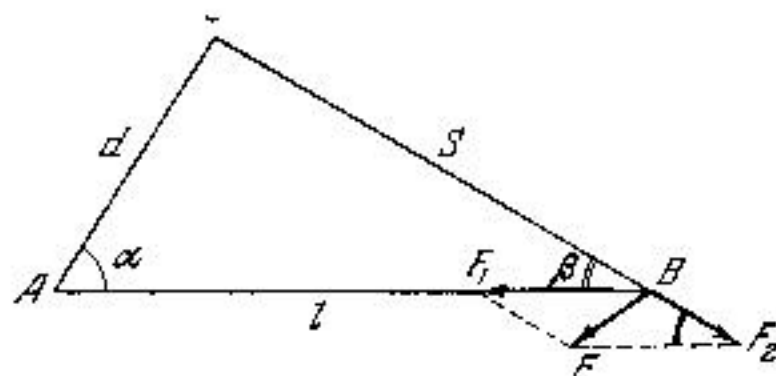


Fig. 381

A força procurada F é a soma geométrica das forças F_1 e F_2 (fig. 381). Aplicando o teorema dos cossenos, obtemos que:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta} = -\frac{4}{3} \pi \gamma m \rho \sqrt{\frac{R^6}{l^3} + \frac{r^6}{(l^2 - d^2)^2} - \frac{2R^3 r^3 \cos \beta}{l^2 (l^2 - d^2)}} \approx 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ N}.$$

241. A força de atração procurada será a soma geométrica das forças de atração, criadas pelas diferentes seções da esfera. As seções pequenas σ_1 e σ_2 (fig. 382) cortam-se da esfera como cones com vértice no ponto A , os quais são obtidos, girando a geratriz BC em redor do eixo S_1S_2 . As áreas das seções são iguais, correspondentemente, a $(AS_1)^2 \omega / \cos \alpha_1$ e $(AS_2)^2 \omega / \cos \alpha_2$, e suas massas iguais a: $(AS_1)^2 \omega \rho / \cos \alpha_1$ e $(AS_2)^2 \omega \rho / \cos \alpha_2$, onde ω é o ângulo sólido pelo qual são vistas ambas as seções desde o ponto A ; ρ é a densidade superficial da esfera (a massa em uma unidade de área); $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$, uma vez que o triângulo S_1OS_2 é isósceles. As forças de atração, criadas pelas seções, são iguais, correspondentemente, a:

$$\gamma \frac{m (AS_1)^2 \omega \rho}{(AS_1)^2 \cos \alpha_1} = \gamma \frac{m \omega \rho}{\cos \alpha_1};$$

$$\gamma \frac{m (AS_2)^2 \omega \rho}{(AS_2)^2 \cos \alpha_2} = \gamma \frac{m \omega \rho}{\cos \alpha_2}.$$

onde m é a massa do corpo, e estão dirigidas em sentidos opostos. A resultante das mesmas é igual a zero.

Considerando analogamente as outras seções correspondentes da esfera, convencemo-nos, que todas elas, em pares, se compensam mutuamente. Consequentemente, a força de atração, que age da esfera no corpo, localizado dentro da mesma, é igual a zero. Salientemos, que este resultado é correto, também, para uma esfera de dimensões finitas, uma vez que a mesma pode ser dividida em qualquer quantidade conveniente, de camadas esféricas finas, para cada uma das quais é válida a demonstração feita acima.

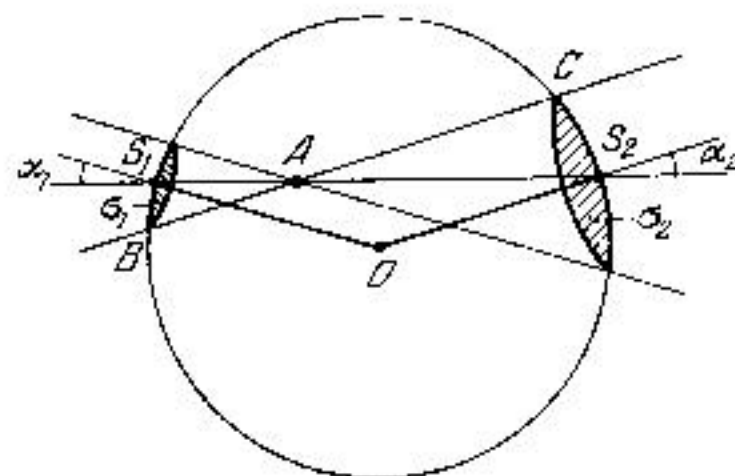


Fig. 382

242. A força de atração é igual a força, com que o corpo de massa m aproxima-se da esfera de raio r e densidade ρ . As camadas espessas externas da terra, não exercem, como foi demonstrado no problema 241, nenhuma influência no corpo. Em virtude disso, a força procurada será igual a:

$$F = \gamma \frac{(4\pi/3) \rho r^3 m}{r^2} = \gamma \frac{4\pi}{3} \cdot \rho m r.$$

Esta força diminui proporcionalmente a r , na medida em que aproxima-se do centro da Terra.

§ 10. HIDRO E AEROSTÁTICA

243. O nível da água não variará, uma vez que a quantidade de água deslocada continuará a mesma.
244. O equilíbrio não será violado, uma vez que, de acordo com a lei de Pascal, a pressão no fundo do recipiente será igual em todos os lugares.
245. 1) Uma vez que o pedaço de gelo flutua, toda a água deslocada pelo mesmo é igual ao peso do próprio gelo, ou da água obtida do mesmo. Por isso, a água, que se forma depois da fusão do gelo,

ocupará um volume igual ao volume da parte submersa do pedaço de gelo e, conseqüentemente, o nível da água não variará.

2) O volume da parte submersa do pedaço de gelo com a pedra é maior do que os volumes da pedra e da água que é obtida depois da fusão do gelo. Conseqüentemente, o nível da água no copo abaixará.

3) O peso da água obtida é igual ao peso do gelo (o peso do ar na bolha pode ser desprezado). Em virtude disso, como no caso 1), o nível da água não variará.

246. O peso do corpo submerso no líquido, no primeiro caso, é igual a $P_1 = (d - d_1) V$; no segundo caso é igual a $P_2 = (d - d_2) V$, onde V é o volume do corpo; donde obtemos que:

$$d = (P_2 d_2 - P_1 d_1) / (P_2 - P_1).$$

247. Somente nos pequenos açudes o gelo pode ser mantido fixo pela margem. No centro de um grande lago ele obrigatoriamente flutuará. A relação das densidades do gelo e da água é igual a 0,9. Conseqüentemente, 0,9 de toda a espessura do gelo encontra-se na água. A distância da superfície do gelo até a água é igual a 1 m.

248. Depois que se tirou a pedra da caixa, a mesma tornou-se mais leve, em um peso igual ao da pedra e, conseqüentemente, o volume da água deslocada pela caixa, diminuiu na grandeza $V_1 = P/d_1$, onde P é o peso da pedra e d_1 é o peso específico da água. Ao submergir na água, a pedra desloca um volume de água igual ao seu próprio volume, i.e., $V_2 = P/d_2$, onde d_2 é o peso específico da substância da pedra. Uma vez que $d_2 > d_1$, então, $V_1 > V_2$ e, conseqüentemente, o nível da água na xícara diminuirá.

249. Em ambos os casos o trabalho das bombas é igual, uma vez que a mesma quantidade de água bombeada eleva-se a uma mesma altura.

250. Uma figura, em forma de Γ , está em uma posição estável, no fundo de um recipiente vazio, devido a que a linha perpendicular, traçada do centro de gravidade da figura, não sai dos limites da área da base. À medida em que colocamos água no recipiente, começa a aumentar a força de empuxo, que age no retângulo (supõe-se, que a água tenha a possibilidade de passar sob a figura). Para uma profundidade de água no recipiente igual a $0,5 a$, a soma dos momentos das forças que tendem a girar o corpo no sentido horário, será igual à soma dos momentos das forças que tendem a girar o corpo no sentido antihorário. Se continuarmos a encher o recipiente de água, a figura cairá.

251. O comprimento do tubo x determina-se da condição $dx = d_0(x - h)$, que expressa a igualdade das pressões na profundidade do extremo inferior do tubo. d_0 é o peso específico da água. Obtemos, então, que: $x = d_0 h / (d_0 - d) = 50$ cm.

252. A pressão no fundo é igual a $p = \rho g (H - h)$ (fig. 383). Como o recipiente é cilíndrico, temos, então, que $p = (P - mg) / \pi R^2$. A altura h podemos determinar igualando uma à outra as forças, que agem no pistão: $\rho g h \pi (R^2 - r^2) = P$, donde obtemos que:

$$H = \frac{1}{\pi R^2 \rho} \left(m - \frac{P}{g} - \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) \approx 10 \text{ cm.}$$

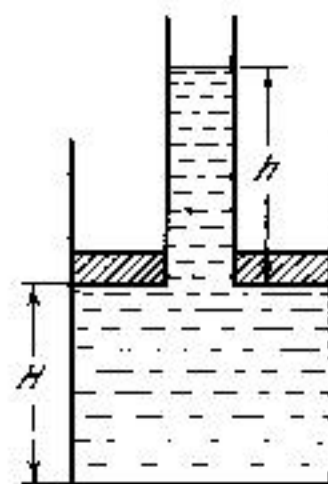


Fig. 383

253. Aplicando a lei de conservação da energia e a lei de Arquimedes, obtemos a seguinte equação:

$$mgx = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho - m \right) gh,$$

onde ρ é a densidade da água e x , a altura procurada. Resolvendo a equação, obtemos que: $x = (4/3 \pi R^3 \rho - m) h / m$.

254. Da igualdade dos momentos relativamente ao ponto A (fig. 384), que agem na tábua, obtemos que:

$$P_1 (l - a - x) \cos \alpha = P (l - a) \cos \alpha,$$

onde $P_1 = S d_0$, $P = S d$. S é o área da seção transversal da

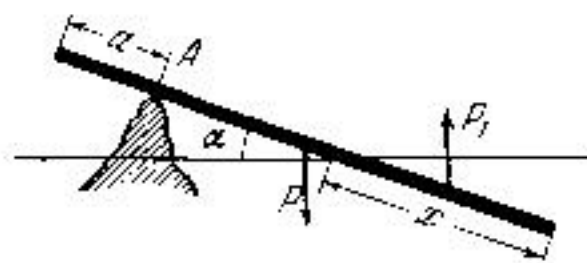


Fig. 384

tábua e d_0 é o peso específico da água. Donde

$$x = (l - a) \pm \sqrt{(l - a)^2 - (d/d_0) l (l - 2a)}.$$

Uma vez que $x < l - a$, então, é válida somente uma solução

$$x = (l - a) - \sqrt{(l - a)^2 - (d/d_0) l (l - 2a)}.$$

255. O homem não atingirá seu objetivo, uma vez que, aumentando a força de empuxo, o homem juntamente com sua carga aumenta

substancialmente o peso (a densidade do ar comprimido na câmara é maior do que a densidade do ar circundante).

256. A indicação da balança aumentará, se a densidade média do corpo, que se quer pesar, for menor do que a densidade dos pesos da balança. A indicação da balança diminuirá, se a densidade média do corpo for maior do que a densidade dos pesos da balança. No caso em que os pesos e o corpo tenham uma densidade média igual, o equilíbrio da balança não será violado.
257. A verdadeira massa do corpo é igual a:

$$M = M_1 + d_0(V - M_1/d_1) \approx 801,16 \text{ g}$$

O erro relativo permitido (em %) é:

$$\frac{M - M_1}{M} \cdot 100\% \approx 0,14\%$$

258. A pressão atmosférica normal é igual, aproximadamente a 10^5 Pas. Isto significa, que o peso de uma coluna de ar atmosférica, com área igual a 1 m^2 , é igual a 10^5 N . Conhecendo-se a superfície do globo terrestre, podemos calcular a massa de toda a atmosfera da Terra. A superfície da Terra é igual a $S = 4\pi R^2$, onde $R = 6370 \text{ km}$ é o raio médio da Terra. A massa da atmosfera é igual a $M \approx 4\pi R^2 \cdot 1 \text{ kg/cm}^2 \approx 5 \cdot 10^{25}$ toneladas.
259. Suponhamos, que interior da garrafa esteja cheio de vidro. Se exercermos pressão na superfície externa, então, essa mesma pressão surgirá em todas as seções internas do vidro. Ocorrerá uma compressão e o volume da parte interna da garrafa diminuirá. Não importa que o líquido, que exerce pressão na superfície externa da garrafa, seja a água ou o vidro, que enche a mesma. Se a garrafa for submetida a uma pressão, interna e externa, igual a p , a capacidade da mesma diminuirá.
260. A pressão do líquido no ponto B é igual a zero e no ponto A é igual a ρgh . Uma vez que a pressão na parede lateral aumenta linearmente, então, a pressão média é igual a:

$$p_{\text{med}} = (0 + \rho gh) \cdot 2.$$

A força, com que o líquido age na parede lateral inclinada, é igual a:

$$F = \frac{\rho gh}{2} \frac{h}{\sin \alpha} b = \rho g \frac{h^2 b}{2 \sin \alpha}.$$

A força f , com a qual as paredes laterais agem no fundo, está dirigida para cima e é igual a:

$$f = 2F \cos \alpha = \rho gh^2 b \operatorname{ctg} \alpha.$$

(A componente vertical da força resultante, que age no fundo do recipiente, será igual, sem dúvida, à força de gravidade do líquido colocado). Realmente temos que:

$$\rho gh^2 b - f = \rho gh^2 b (\alpha - h \operatorname{ctg} \alpha) = \rho gV,$$

onde V é o volume do líquido colocado).

261. A força, com que o líquido eleva o recipiente, é igual a:

$$F = \pi(R^2 - r^2)\rho gh,$$

consequentemente,

$$\pi(R^2 - r^2)\rho gh = P, \quad \rho = \frac{P}{\pi(R^2 - r^2)gh}.$$

262. A pressão no fundo do recipiente é igual a: ρgh . A força, com que a parte sublinhada do líquido (fig. 385) pressiona a mesa é $\rho gh\pi(2Rh \operatorname{tg} \alpha - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Pela terceira lei de Newton, temos

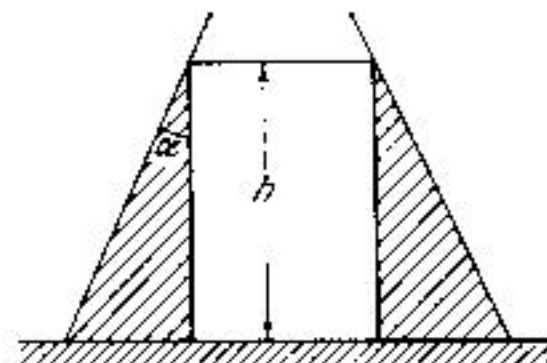


Fig. 385

que a mesma força age sobre o líquido. A condição de equilíbrio do líquido, no momento em que o recipiente deixa de pressionar a mesa, tem a seguinte forma

$$P - P_1 = \rho gh\pi(2Rh \operatorname{tg} \alpha - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

onde P_1 é o peso de toda a parte riscada do líquido (o cone truncado menos o volume do cilindro):

$$P_1 = \frac{\rho g h}{3} \{ \pi R^2 + \pi (R - h \operatorname{tg} \alpha)^2 + \pi R (R - h \operatorname{tg} \alpha) \} - \rho gh\pi (R - h \operatorname{tg} \alpha)^2,$$

donde determinamos que:

$$\rho = \frac{3P}{\pi gh^2 \operatorname{tg} \alpha (3R - h \operatorname{tg} \alpha)}.$$

263. No recipiente cilíndrico, o fundo desprender-se-á em todos os três casos, uma vez que a força da pressão no fundo do recipiente, de cima para baixo, será a mesma todas as vezes. No recipiente, que se estreita na parte superior, o fundo desprender-se-á somente se colocarmos óleo, uma vez que o nível do óleo será maior que no recipiente cilíndrico. No recipiente, que se torna mais largo na parte superior, o fundo desprender-se-á, se colocarmos mercúrio, cujo nível será maior do que no recipiente cilíndrico; o mesmo sucederá se colocarmos um peso que se distribui em uma área menor do que nos outros dois casos.

264. Se o nível da água nos recipientes for igual, então, será também igual o nível do mercúrio até o instante, em que for colocado o pedaço de madeira. O efeito de colocarmos no recipiente um pedaço de madeira será o mesmo, que colocarmos uma quantidade de água, igual à deslocada por esse pedaço, i.é., uma quantidade de água igual, em peso, ao pedaço de madeira. Consequentemente, se as seções dos recipientes forem iguais, os níveis da água e do mercúrio em ambos os recipientes serão os mesmos. Se as seções forem diferentes, então a água ficará mais acima e o mercúrio mais abaixo no vaso, cuja seção é menor. Isso ocorre, porque a adição de quantidades iguais em peso (e volume) de água nos vasos com diferentes seções conduz a um aumento diferente da pressão na superfície do mercúrio.

265. O mercúrio em ambos os recipientes elevar-se-á a uma altura x depois de ser colocado o cubo no segundo recipiente e ocupará a posição AB (fig. 386). A altura necessária da coluna de água, no

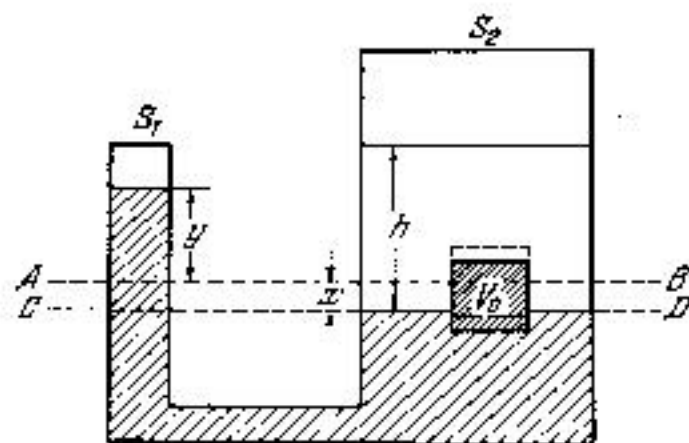


Fig. 386

segundo vaso, determina-se pela igualdade das pressões, por exemplo, no nível CD : $(y + x)\rho_1 g = h\rho_2 g$, onde ρ_1 é a densidade do mercúrio; ρ_2 é a densidade da água. y pode ser determinado, utilizando a condição de conservação do volume do mercúrio $(x + y)S_1 = V_2$, onde V_2 é o volume do mercúrio, deslocado pelo cubo, depois de ser colocada água.

Se a água cobre, totalmente, o cubo, então, pela lei de Arquimedes, podemos escrever que:

$$V_0 \rho_0 g = V_2 \rho_1 g + (V_0 - V_2) \rho_2 g,$$

onde ρ_0 é a densidade do ferro. Resolvendo as equações, obtemos que:

$$h = \rho_1 (\rho_0 - \rho_2) V_0 / \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) S_1.$$

Se a água não cobrir o cubo, então, a lei de Arquimedes será escrita da seguinte forma:

$$V_0 \rho_0 g = V_2 \rho_1 g + h S \rho_2 g,$$

onde $S = V_0^{2/3}$ é a área de uma face do cubo. Neste caso, a altura procurada será: $h = \rho_0 V_0 / \rho_2 (S_1 + V_0^{2/3})$. A primeira solução é válida para

$$S_1 \leq \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_2)}{\rho_2 (\rho_1 - \rho_0)} V_0^{2/3},$$

a segunda para

$$S_1 \geq \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_2)}{\rho_2 (\rho_1 - \rho_0)} V_0^{2/3}.$$

266. Devido à variação da pressão atmosférica, a força de Arquimedes que age no barômetro por parte do ar, altera-se, tanto pela variação da densidade do ar, como pela variação do volume do barômetro, ao alterar-se o nível do mercúrio nas seções abertas do mesmo.

Considerando todas as condições do problema, os barômetros têm não somente o mesmo peso mas, também, o mesmo volume. Por isso, para cada um deles a variação da força de empuxo, graças à primeira causa, é igual. A variação dos volumes, no entanto, será diferente. No barômetro em forma de U, para uma variação da diferença de níveis, em uma determinada grandeza, o nível do mercúrio, em cada uma das colunas, variará somente na metade desta grandeza. No barômetro em forma de taça, o nível do mercúrio na taça, varia muito pouco e na coluna altera-se, praticamente, em toda a grandeza de variação da diferença de níveis. Além disso, na mesma quantidade em que varia o volume do mercúrio na coluna, variará, também, o volume na taça. Consequentemente, para o barômetro em forma de taça, a variação do volume será duas vezes maior, do que para o barômetro em forma de U (para diâmetros iguais das colunas). Aumentando a pressão, o volume do barômetro de taça torna-se menor do que o volume do barômetro em forma de U, a força de Arquimedes, que age no barômetro em forma de taça, também, será menor e por isso ele excede em peso.

267. Ficando o homem em pé no colchão, todo o seu peso distribui-se em uma área menor (área da planta dos pés), do que quando o mesmo deita-se. Por isso, o estado de equilíbrio será atingido, no primeiro caso, para uma pressão maior de ar no colchão do que no segundo caso.

268. Analisemos, inicialmente, a câmara cheia de ar (na fig. 387, a, vemos um corte da câmara). Para o equilíbrio das seções AB e CD é evidente a necessidade de que a tensão das paredes esticadas da câmara T , equilibre a pressão interna excedente da câmara p . Consideremos as forças, que atuam nas seções AB e CD no caso, em que a câmara foi colocada na roda (fig. 387, b). Na parte superior da câmara, a distribuição das forças, que agem na seção AB , essencialmente não variam. Na parte inferior, a situação será, totalmente, diferente. Na seção CD agirá uma força elástica por parte do aro, igual à carga aplicada à roda (o peso da roda é um quarto do peso do automóvel). Sob a ação desta força complementar, a câmara deforma-se e o ângulo entre as forças de tensão da borracha T aumenta. A força resultante da tensão, que age na seção CD , diminui e, por isso, a pressão excedente do ar na

câmara equilibra tanto a força de tensão, como o peso da roda e parte do automóvel. Desta forma, o aro não cai, uma vez que o mesmo mantém-se pela pressão excedente de ar na câmara. Na parte superior da

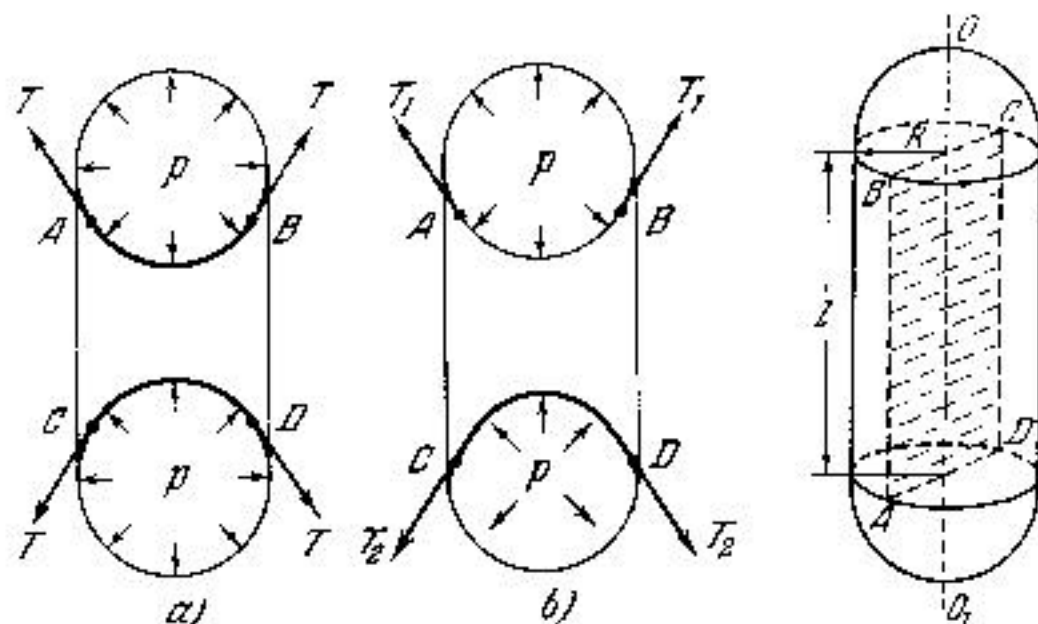


Fig. 387

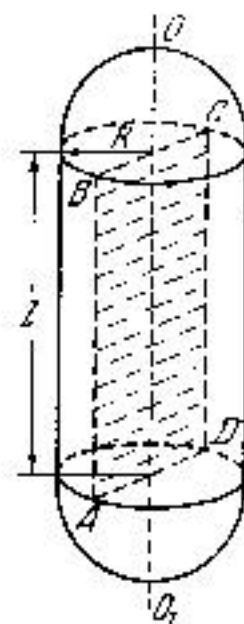


Fig. 388

câmara, esta pressão excedente equilibra a tensão das paredes da mesma, e na parte inferior ela equilibra, tanto a tensão das paredes, que diminuiu, como a força aplicada à roda.

269. A força, por unidade de comprimento, com a qual estica-se a parede da parte cilíndrica da caldeira, na direção perpendicular ao eixo da mesma OO_1 , é igual a $f_1 = (2Rl/2l)p = pR$, onde $2Rl$ é a área da seção da caldeira $ABCD$ e p é a pressão no interior da mesma (fig. 388); $2Rlp$ é a força que atua na metade do cilindro (ver o problema 156). O valor máximo da força, aplicada na unidade de comprimento dos fundos esféricos, pode ser determinado pela fórmula:

$$f_2 = (\pi R^2/2\pi R)p = pR/2 = f_1/2.$$

Portanto, os fundos esféricos podem suportar uma pressão duas vezes maior do que a parte cilíndrica da caldeira (para uma mesma espessura das paredes). Para que a resistência da caldeira seja igual em todas as suas partes, a espessura dos fundos pode ser duas vezes menor do que a espessura das paredes cilíndricas, ou seja, 0,25 cm.

270. A forma da caldeira deve ser tal, que a força aplicada a uma unidade de comprimento da seção da caldeira, seja a mínima possível. Esta força é igual a $f = pS/l$, onde S é a área da seção da caldeira; l é o perímetro da seção; p é a pressão do vapor. A força f será mínima, se a relação entre a área da seção e o perímetro da

seção for mínima. Como se sabe, esta relação tem seu valor mínimo para a forma de um círculo. Além disso, a seção de uma esfera, em qualquer plano, é um círculo. Por isso, a forma mais vantajosa da caldeira, do ponto de vista de sua resistência, é a forma esférica.

271. Destaquemos no interior do líquido uma coluna de altura h (fig. 389). A equação do movimento desta coluna, tem a seguinte forma: $ma = mg - pS$, onde $m = \rho Sh$ é a massa do líquido; p é a pressão a uma profundidade h . Consequentemente obtemos que $p = \rho h(g - a)$.

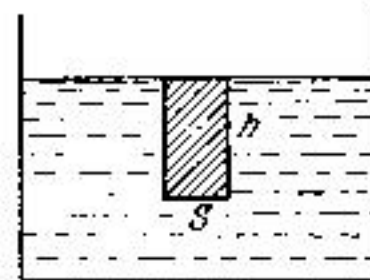


Fig. 389

272. Em conformidade com a solução do problema 271, a força de empuxo pode ser escrita da seguinte forma: $F = \rho V(g - a)$, onde V é o volume da parte submersa do corpo. A equação do movimento do corpo flutuante, de massa M , terá a seguinte forma: $Ma = -Mg - \rho V(g - a)$, donde, obtemos que $V = M/\rho$, como ocorre em um recipiente imóvel. O corpo não emergirá.
273. A pressão do líquido na tampa da cisterna, a uma distância x da parede dianteira, é igual a $p = \rho x a$. Uma vez, que esta pressão cresce linearmente, a medida que nos afastamos da parede dianteira, então, a força procurada será igual a:

$$F = \frac{\rho a l}{2} \cdot 0 \rightarrow \frac{\rho a l^2}{2}.$$

274. $F = \rho h l d g + \rho (l^2 d/2) a$.

275. Se o tanque estivesse em repouso, ou movendo-se uniformemente, então, a pressão a uma profundidade h seria igual a $p_1 = \rho gh$. Por outro lado, se mesmo tivesse um movimento acelerado e não existisse a força de gravidade, então, a pressão no ponto A seria igual a $p_2 = \rho a l$. É precisamente essa pressão, que, de acordo com a segunda lei de Newton, transmitiria à coluna de líquido de comprimento l a aceleração necessária a . No movimento acelerado do tanque, surgirá no campo gravitacional tanto a pressão p_1 , como a pressão p_2 . Segundo a lei de Pascal, a pressão no líquido é uma só em todas as direções. Por isso, as pressões p_1 e p_2 somam-se e a pressão resultante no ponto A será igual a $p = \rho(gh + al)$.

276. Teremos que (fig. 390):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}, \quad \frac{H-h}{l/2} < \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}.$$

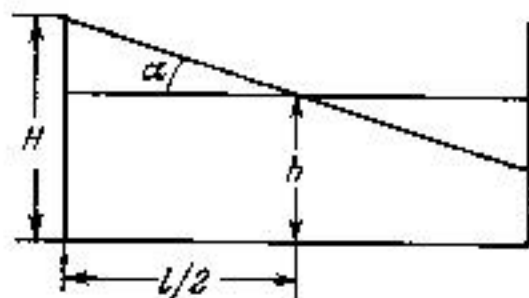


Fig. 390

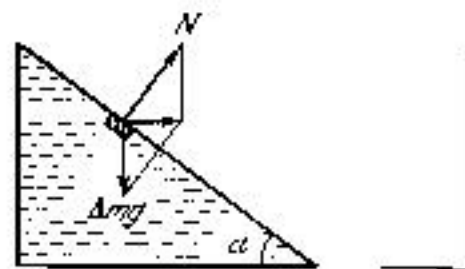


Fig. 391

277. A fim de que o líquido não se entorne, deveremos transmitir uma aceleração ao recipiente, de tal modo, que a superfície do líquido ocupe a posição representada na fig. 391. O volume máximo do líquido é igual a $bcS/2l$. A massa de todo o sistema é $M + \frac{bcS}{2l} \rho$.

A aceleração necessária é determinada pela condição de que a soma das forças, que agem em um pequeno volume do líquido de massa Δm , na superfície, esteja dirigida horizontalmente (fig. 391). Pela segunda lei de Newton, temos que: $\Delta ma = \Delta mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Consequentemente, a força procurada é igual a

$$F = \left(M + \frac{bcS}{2l} \rho \right) g \frac{b}{c}.$$

278. O movimento do líquido no sifão é garantido pelas forças de coesão entre os elementos do líquido. O líquido na coluna longa eleva o líquido na coluna curta, o que conduz ao bombeamento do mesmo. Baseando-se nesta afirmação, deduziríamos que, com a ajuda do sifão, poderíamos bombear água através de uma parede de qualquer altura. Entretanto isso não ocorre. Para uma altura de elevação igual a 10 m, a pressão dentro do líquido torna-se igual a zero. Surgirão, então, bolhas de ar, que existem sempre na água, que começarão a dilatar-se e a coluna de água deixará de ser contínua. Tão logo isso ocorra, o sifão deixará de funcionar.
279. Inicialmente o aparelho funcionará como um sifão. A água será despejada através de um tubo fino na caixa de água. Em seguida, por A passará uma bolha de ar e dividirá a coluna superior do líquido em duas partes. O líquido depois disto deixará de ser despejado.
280. A pressão da água, imediatamente abaixo de cada pistão da bomba, será menor do que a pressão atmosférica em uma grandeza igual a $\rho g(H + h)$, onde ρ é a densidade da água. Por isso, para manter o pistão, é necessário puxá-lo para cima com uma força igual a $F = \rho g(H + h)S$, onde S é a área do pistão. Consequentemente, é preciso utilizar uma força maior, para puxar o pistão que tiver uma maior área.
281. Na metade inferior da câmara coloca-se um ar mais denso. Na metade superior ele sai da câmara. Como consequência disso, a pressão gradualmente igualar-se-á e a máquina trabalhará até o momento, em que a diferença de pressões entre as metades do recipiente for suficiente para elevar água pelo tubo até a metade superior do recipiente.

282. No caso dado, a roda não é simétrica e a pressão do ar na parte direita é maior do que a pressão na parte esquerda. A força da pressão excedente, que age na parte direita da roda, é igual a $F = (p_1 - p_2)S$, onde S é a área da seção transversal da câmara. O peso das câmaras cheias de água não pode ultrapassar $P =$

$$= \rho gSh. \text{ Uma vez, que } h \leq \frac{p_1 - p_2}{\rho g}, \text{ então, } F \geq P. \text{ A roda}$$

começará a girar no sentido anti-horário. Por isso, as câmaras elevar-se-ão da parte inferior do recipiente para a parte superior cheia de ar. A roda girará no sentido anti-horário até o momento, em que a diminuição da diferença de pressões, não se torne insuficiente para elevar a água a uma altura h .

283. O stetos do globo estratosférico não é determinado pela altura máxima, a que pode elevar-se o globo, mas, sim, pela altura para a qual a descida é feita com uma velocidade dentro dos limites de segurança. Como se sabe, o envoltório do globo estratosférico encontra-se cheio de um gás leve (hidrogênio ou hélio), somente de maneira parcial e, uma vez que no processo de ascensão do mesmo, o gás dilata-se, expulsando do envoltório o ar. Isto permite, que se mantenha a força de ascensão aproximadamente constante. Em uma altura qualquer, o gás ocupa todo o volume do envoltório. Entretanto, depois disso, a força de ascensão do globo estratosférico continua aumentando, em virtude de que o gás é expulso pela abertura inferior do mesmo. Então, o peso do globo começa a diminuir. Somente depois que uma determinada quantidade de gás foi expulsa do envoltório, o globo estratosférico atinge o stetos.

Para a descida do mesmo há necessidade de que se libere uma quantidade complementar de gás, através da torneira superior do envoltório. Para uma descida suave, a força de ascensão deverá ser um pouco menor do que o peso do globo estratosférico. Para uma altura pequena, a velocidade de descida torna-se excessivamente grande, uma vez que o volume do gás diminui e a quantidade do mesmo será menor, do que no processo de ascensão. Lançando-se sacos para fora, obtém-se a diminuição da velocidade de descida.

§ 11. HIDRO E AERODINAMICA

284. Simbolizemos por h a distância do nível da água até o orifício superior, por x a distância procurada do recipiente até o ponto de intersecção do jorro na direção horizontal e por y a distância do nível de água no recipiente até o mesmo ponto (fig. 392). O ponto de intersecção do jorro permanecerá em um mesmo lugar, se o nível de água, no recipiente, não variar. Para isto, é necessário que: $Q = Sv_1 + Sv_2$, onde $v_1 = \sqrt{2gh}$ e $v_2 = \sqrt{2g(H + h)}$ são as velocidades, com que os jorros saem do orifício. Baseando-se nas leis da cinemática, podemos escrever que:

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2, \quad y = h + gt_1^2/2 = h + H + gt_2^2/2,$$

onde t_1 e t_2 são os tempos de queda da água desde o orifício até o ponto de interseção dos jorros. Então obtemos que:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} - H^2 \frac{2gS^2}{Q^2} \right) = 120 \text{ cm.}$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} + H^2 \frac{2gS^2}{Q^2} \right) = 130 \text{ cm.}$$

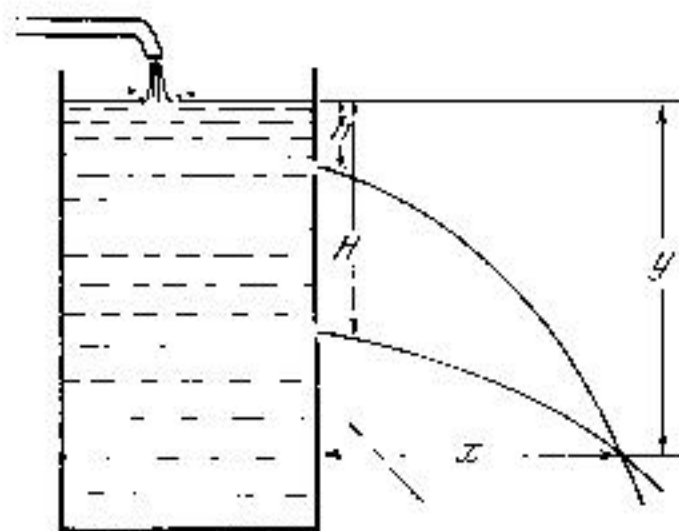


Fig. 392

285. A velocidade da corrente da água no orifício é $v = \sqrt{2gh}$. O impulso da força, com que o recipiente age na água expelida, é $F\Delta t = -\Delta m v$, onde $\Delta m = \rho S v \Delta t$ é a massa de água expelida no intervalo de tempo Δt . Consequentemente, $F = \rho v^2 S = 2\rho ghS$. A pressão no fundo é $p = \rho gh$ e por isso $F = 2pS$. Com essa mesma força o jorro atuará sobre o recipiente. Deste modo, a água age na parede com orifício com uma força menor em uma grandeza igual a $2pS$ do que a força com que a água age na parede oposta, e não em pS como parecia a primeira vista. Isto está relacionado com a diminuição de pressão na parede com orifício, como consequência da grande velocidade da corrente de água junto desta parede. O recipiente entrará em movimento, se $kQ < 2pS$, ou $k < 2\rho ghS/Q$.

286. Pela segunda lei de Newton obrigatoriamente verificar-se-á a igualdade $\rho S_0 = 2pS$. Consequentemente, com a passagem do líquido pelo tubo, a área da seção transversal do jorro deverá diminuir em duas vezes: $S = S_0/2$. Esta compressão do jorro explica-se do seguinte modo. As partes extremas do jorro do líquido, que se aproximam do tubo na parte superior, não podem, como consequência da inércia, ultrapassar o extremo do tubo, tangenciando, justamente as paredes e tendem ao centro do jorro. Submetida à pressão das partículas, que se movem próximas ao centro do jorro, as linhas da corrente adquirem uma direção correta e o jorro comprimido do líquido passa ao longo do tubo.

287. Desprezando a água derramada, nós consideramos o choque do jorro, sobre a parede, como absolutamente inelástico. Pela segunda lei de Newton, a variação da quantidade de movimento da água no intervalo de tempo Δt é igual a: $\Delta m v = F\Delta t$, onde $\Delta m = \rho(\pi d^2/4)v\Delta t$ é a massa de água, que passa no intervalo de tempo Δt , através da seção transversal do tubo, donde, obtemos, que $F = (\pi \rho d^2/4) v^2 \approx 0,08 \text{ N}$.

288. Pelo movimento do gás no tubo (fig. 393), a quantidade de movimento do mesmo não varia em grandeza, mas varia em direção. Na unidade de tempo, pela seção transversal I da parte vertical

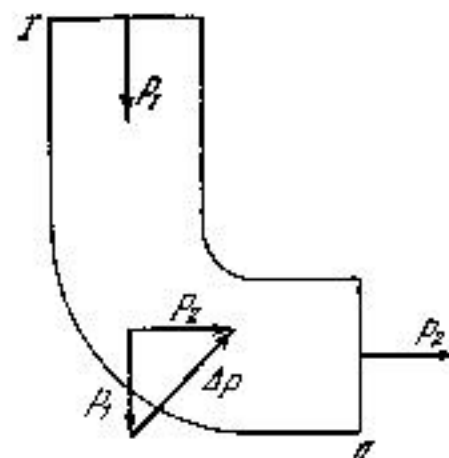


Fig. 393

do tubo, passa a massa $\rho S v$, que possui uma quantidade de movimento igual a $p_1 = \rho S v v_1$, onde v_1 é o vetor da velocidade da corrente do gás, na parte vertical, numericamente igual à velocidade dada v . Neste mesmo tempo, pela seção II passa a massa que possui uma quantidade de movimento igual a $p_2 = \rho S v v_2$, onde v_2 é o vetor da velocidade, na parte horizontal, também numericamente igual a v .

A variação da quantidade de movimento é igual ao impulso da força F , com que o tubo atua sobre o gás: $F = \rho S v (v_2 - v_1)$. Em grandeza a força $F = \rho S v^2 \sqrt{2}$. Segundo a terceira lei de Newton, o gás reage com a mesma força sobre o tubo. Esta força está dirigida para o lado oposto à curva do tubo.

289. A velocidade inicial da água, relativamente à pá, é $v = \sqrt{2gh} - \omega R$. Em virtude disto, por unidade de tempo, a pá desloca uma massa de água igual a $m = \rho S (\sqrt{2gh} - \omega R)$. A velocidade da água, relativamente à pá, depois do choque é igual a 0 e por isso, a variação da quantidade de movimento da água, na unidade de tempo, é igual a mv . Pela segunda lei de Newton, temos:

$$F = \rho S (\sqrt{2gh} - \omega R)^2.$$

290. Inicialmente o navio mover-se-á para a direita, uma vez que a pressão na borda direita diminui em uma grandeza igual a $2pS$.

onde p é a pressão na profundidade h da brecha e S é a área da mesma (ver o problema 285). Logo após o jorro de água ter atingido a parede oposta, na mesma começará a atuar uma força $F = \rho S v^2$, onde v é a velocidade do jorro, relativamente ao navio (ver o problema 287). F é maior do que $2pS$, já que $v > \sqrt{2gh}$, e, graças a isto, o navio move-se ao encontro do jorro. Em consequência, o movimento começará a retardar-se.

291. A velocidade de corrente do líquido no tubo é constante, em toda a seção, em virtude da pouca compressibilidade do mesmo e da inseparabilidade do jorro. Esta velocidade é igual a $v = \sqrt{2gH}$. A velocidade do líquido no recipiente é muito pequena e, praticamente, igual a zero, uma vez que a área do recipiente é muito maior do que a área da seção do tubo. Consequentemente, na fronteira recipiente-tubo deverá haver um salto de pressão que simbolizaremos por $(p_1 - p_2)$. O trabalho das forças de pressão provoca a variação da velocidade de 0 até $\sqrt{2gH}$. Baseando-se na lei de conservação da energia, podemos escrever que:

$$\Delta m v^2/2 = (p_1 - p_2) S \Delta h,$$

onde S é a área da seção do tubo; Δh é a altura de um volume pequeno do líquido e $\Delta m = \rho S \Delta h$ é a massa deste volume. Consequentemente, $p_1 v^2/2 = p_2 - p_0 - \rho g H$.

Graças à constância da velocidade da corrente, a pressão no tubo varia segundo a lei $p = p_0 - \rho g(h - x)$, como em um líquido imóvel. p_0 é a pressão atmosférica e x é a distância calculada desde o extremo superior do tubo. A variação da pressão com a

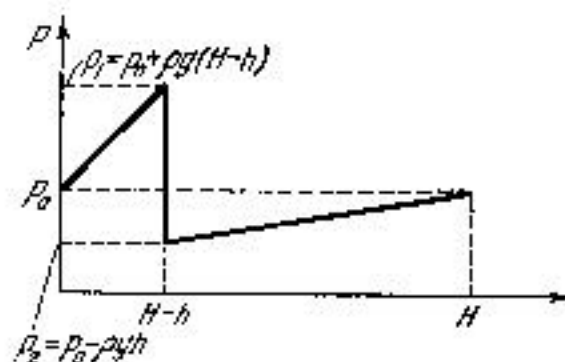


Fig. 394

altura está representada na fig. 394. No eixo das ordenadas, encontra-se a pressão e no eixo das abscissas, a distância da superfície do líquido no recipiente.

292. A água que sai do tubo em um pequeno intervalo de tempo Δt , possui uma quantidade de movimento igual a $\Delta p = \rho S v^2 \Delta t$, onde $v = \sqrt{2gH}$ é a velocidade do jorro de água (ver o problema 291). Pela segunda lei de Newton, temos que: $F \Delta t = 2\rho g H S \Delta t$. Com a mesma força o jorro agirá sobre o vaso com água. Consequentemente, a indicação da balança diminuirá inicialmente em $2\rho g H S$.

293. Nos primeiros instantes, enquanto o jorro não atingiu o prato, o equilíbrio é violado. O prato subirá, uma vez que a água, que sai do recipiente, deixa de exercer pressão no fundo do mesmo. Entretanto, depois que o jorro atinge o prato, o equilíbrio restabelece-se. Analisemos uma seção do jorro de massa Δm . Atingindo o prato, ela transmite ao mesmo na direção vertical o impulso $\Delta m \sqrt{2gh}$, onde h é a altura da torneira sobre o prato. Por outro lado, esta seção, abandonando o recipiente, deixa de exercer pressão no fundo do mesmo e no prato, no decorrer do tempo de queda igual a $t = \sqrt{2h/g}$. Isto equivale ao surgimento do impulso da força, que age no recipiente verticalmente para cima, no período de queda do volume do líquido. O valor deste impulso, no tempo médio de queda, é igual a

$$\Delta m g \sqrt{2h/g} = \Delta m \sqrt{2gh}.$$

Deste modo, a cada volume de líquido Δm está relacionado, no tempo médio de queda, o surgimento de dois impulsos de força iguais e de sentidos opostos. Uma vez que o jorro corre ininterruptamente, a balança encontrar-se-á em equilíbrio. No momento em que cessa o jorro, o prato desce, já que o último volume do líquido, caindo no prato, age no mesmo com uma força que ultrapassa seu peso e a diminuição da pressão no fundo do recipiente cessará.

294. Baseando-se na lei de conservação da energia, podemos escrever que: $M v^2/2 = mgh$, onde M é a massa de água, que permanece no tubo, ao fecharmos a válvula K ; m é a massa de água, que se eleva até uma altura h . Donde temos: $\frac{\rho \pi d^2 v^2}{4} \frac{v^2}{2} =$

$-\rho V_0 gh$, onde V_0 é o volume da massa m . Em 2 s eleva-se em média um volume de água $V_0 = \pi d^2 v^2/8gh = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Em uma hora de trabalho da prensa hidráulica eleva-se um volume $V = 1,7 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 60 \approx 3 \text{ m}^3$.

295. A pressão exercida pelo fluxo de ar, que envolve o teto, é menor do que a pressão do ar em repouso. Este excedente de pressão do ar imóvel, sob o teto, provoca os fenômenos descritos.
296. Devido a grande velocidade da corrente de gás no jato, a pressão interna do jato é menor do que a atmosférica. Por baixo a bola será mantida pela pressão do jato e pelos lados, pela pressão atmosférica estática.
297. A corrente de ar ao passar entre os discos, diminui sua velocidade, à medida que se aproxima das bordas dos mesmos. Nas bordas a velocidade é mínima. A pressão no jato do ar será tanto menor, quanto maior for sua velocidade. Por isso, a pressão entre os discos é menor do que a atmosférica. A pressão atmosférica aperta o disco inferior até o superior e por isso cessa a corrente de ar. Depois disso, a pressão estática do ar, novamente, desloca o disco e o processo repete-se.
298. No fluxo de água circulante a pressão diminui à medida que aumenta a velocidade da corrente. A velocidade da corrente de água no recipiente é sensivelmente menor do que a velocidade da corrente no tubo, e, consequentemente, a pressão da água no recipiente é maior do que no tubo. Na fronteira recipiente-tubo

a velocidade da corrente aumenta e a pressão diminui; como consequência disto, a bola colocada na rede fica comprimida à mesma e não emergirá.

299. Em um intervalo de tempo τ , o pistão desloca-se, em uma distância $u\tau$ (fig. 395). Nesse caso, a força F realizará um trabalho

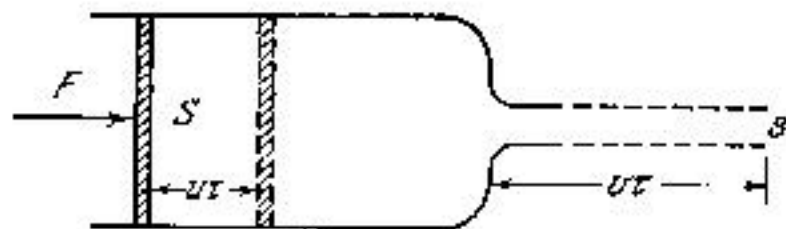


Fig. 395

$A = F u \tau$. A massa do líquido expelido, no tempo τ , é igual a $\rho S u \tau$. A velocidade da corrente do líquido é determinada da relação: $S u = s v$. A variação da energia cinética do líquido no tempo τ é igual a:

$$\rho S u \tau (v^2/2 - u^2/2).$$

Esta variação da energia deve ser igualada ao trabalho da força F :

$$F u \tau = \rho S u \tau (v^2/2 - u^2/2).$$

Excluindo u determinamos, que $v^2 = \frac{2F}{S\rho} \frac{1}{1 - s^2/S^2}$. Se

$s \ll S$, então, $v = \sqrt{2Fs/\rho}$.

300. Ao resolvermos o problema 299, consideramos que a velocidade de qualquer volume do líquido, que se encontra na bomba, é constante. A variação da velocidade de u até v ocorre na saída do líquido da bomba. Entretanto isto não ocorre imediatamente depois que a força começa a atuar sobre a bomba. Há necessidade de um certo tempo, no qual o processo se estabelece, i.e., as partículas do líquido no cilindro adquirem uma velocidade constante. Para $s \ll S$ o intervalo de tempo tende ao infinito e por isso a velocidade adquirida pelo líquido, sob a ação de uma força constante, torna-se infinitamente grande.

301. Introduzimos o sistema de coordenadas, representado na fig. 396. A velocidade da corrente do líquido pela fórmula de Torricelli é: $V = \sqrt{2gy}$, onde y é a espessura da camada de água no recipiente superior. Como consequência da incompressibilidade da água, temos que: $sV = Sv$, onde v é a velocidade do descenso do nível superior da água; S é a área do mesmo e s , a área do orifício. Se considerarmos, que o recipiente possui uma simetria axial, então, $S = \pi x^2$, onde x é a coordenada horizontal da parede do recipiente. Consequentemente, $\pi x^2/\sqrt{2gy} = sv = \text{const}$, uma vez que

pela condição o nível da água deverá baixar com velocidade constante. Daqui determinamos, que a forma do recipiente é dado pela equação $y = kx^4$, onde $k = \pi^2 v^2/2 g s^2$.

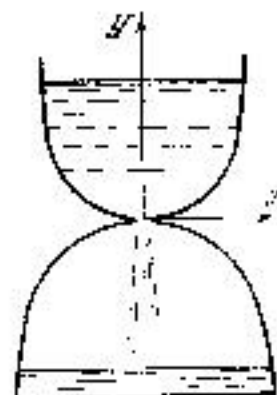


Fig. 396

302. Na seção horizontal, a pressão, em dependência da distância r do eixo, varia segundo a lei $p = p_0 + (\rho \omega^2/2)r^2$, onde p_0 é a pressão no eixo do recipiente e ρ é a densidade do líquido. A deformação da compressão do líquido será maior junto às paredes do recipiente, no mesmo tempo, que a deformação de distensão da barra em rotação (problema 211) será máxima no eixo.
303. A uma distância r do eixo de rotação a pressão excedente é $p = (\rho \omega^2/2)r^2$ (ver solução do problema 302). Por outro lado, esta pressão determina-se pela diferença entre o nível do líquido a essa distância e nível no eixo: $p = \rho gh$ (fig. 397). Igualando estas expressões, temos que: $h = (\omega^2/2g)r^2$. Esta é a equação de uma parábola. Correspondentemente, a superfície do líquido no recipiente em rotação tem a forma de um parabolóide de rotação.

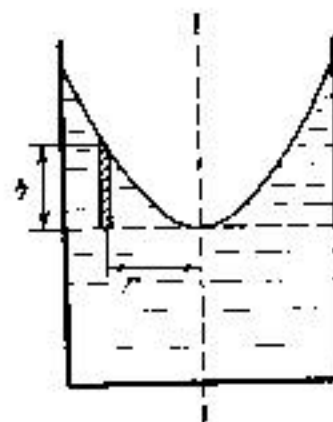


Fig. 397

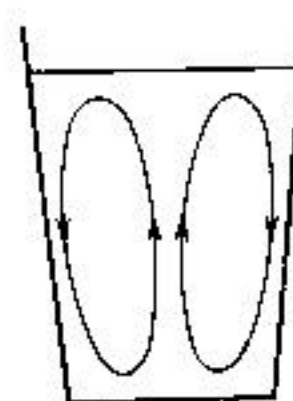


Fig. 398

304. Ao mexermos a água, damos às partículas de água no copo uma velocidade angular qualquer ω . A distribuição da pressão no líquido

do será aproximadamente a mesma, que foi obtida na solução do problema 302. A pressão excedente dentro do líquido equilibra a pressão, provocada pela diferença de níveis nas bordas do copo e no eixo (ver o problema 303). Depois que paramos de mexer, como consequência do atrito no fundo, a velocidade de rotação do líquido no fundo começa a diminuir, tanto mais sensivelmente, quanto mais distante o líquido encontrar-se do eixo. Agora, a pressão excedente, provocada pela rotação, não equilibrará o peso da coluna de líquido junto às bordas do recipiente. Em consequência disto, surge uma circulação do líquido que se vê esquematicamente na fig. 308. Por isso, as folhas de chá reúnem-se no centro do fundo do copo.

Capítulo II

Calor. Física molecular

§ 12 DILATAÇÃO TÉRMICA DOS CORPOS SÓLIDOS E LÍQUIDOS

305. $\Delta t \approx 420^\circ \text{C}$.
306. A grande resistência das estruturas de concreto armado, só é possível graças a que o coeficiente de dilatação do concreto é muito próximo ao coeficiente de dilatação do ferro.
307. A quantidade de calor transmitida, na unidade de tempo, de um corpo a outro, é proporcional à diferença de temperaturas destes corpos. Para uma diferença grande de temperaturas, entre um termómetro e os objetos que o circundam, a variação de volume do mercúrio será rápida. Se a indicação do termómetro é próxima à temperatura dos corpos que o circundam, a variação de volume do mercúrio será lenta. Em virtude disso, para uma variação de temperatura é necessário esperar um intervalo de tempo relativamente longo, enquanto o termómetro não adquire exatamente a temperatura do corpo. Colocamos o termómetro aquecido em contato com o ar relativamente frio do quarto, a coluna de mercúrio, devido a grande diferença de temperaturas «cai» tão rapidamente, que o termómetro pode ser «sacudido» quase que imediatamente.
308. Ao esfriarmos a escala de t_1 até $t_0 = 0^\circ \text{C}$, o valor de cada divisão diminui. Por isso, a altura da coluna de mercúrio, calculada para a temperatura $t_0 = 0^\circ \text{C}$, terá, em realidade, outro valor igual a $H = H_1 (1 - \alpha t_1)$. As alturas das colunas de mercúrio para diferentes temperaturas e iguais pressões são inversamente proporcionais às densidades:

$$H_0/H_1 = \rho_1/\rho_0 = 1/(1 + \beta t_1),$$

donde

$$H_0 = H_1 (1 - \alpha t_1)/(1 + \beta t_1) \approx H_1 (1 + \alpha t_1 - \beta t_1).$$

309. Pode-se, previamente, esfriar o termómetro em uma geladeira e sacudi-lo. Se não existir geladeira, então, é necessário manter o termómetro sob o braço um longo período e depois sacudi-lo imediatamente. O termómetro indicará a temperatura do corpo.

310. A diferença dos comprimentos das réguas para uma temperatura t_1 é igual a $l'_0(1 + \alpha_1 t_1) - l''_0(1 + \alpha_2 t_1) = l$. Para uma temperatura t_2 esta diferença é:

$$l'_{02}(1 + \alpha_1 t_2) - l''_{02}(1 + \alpha_2 t_2) = l.$$

O sinal positivo corresponde ao caso, em que a diferença do comprimento das réguas permanece invariável (fig. 399, a). O sinal negativo corresponde à dependência do comprimento das réguas,

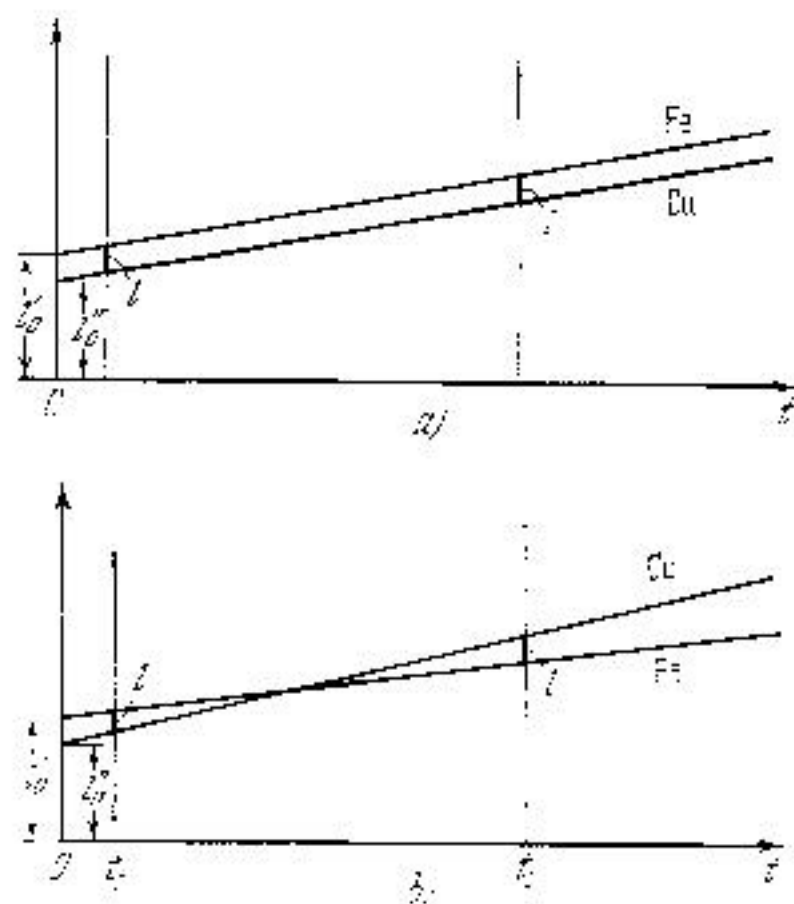


Fig. 399

em relação à temperatura que se vê na fig. 399, b. No primeiro caso, o sistema de equações conduz aos seguintes resultados:

$$l'_{0(1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} l = 0,9 \text{ cm}, \quad l'_{0(2)} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} l = 4,8 \text{ cm}.$$

No segundo caso, aos seguintes resultados:

$$l'_{0(2)} = \frac{2 + \alpha_2(t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} l = 2008,5 \text{ cm},$$

$$l'_{0(1)} = \frac{2 + \alpha_1(t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} l = 2006 \text{ cm}.$$

Para $t = 0^\circ\text{C}$ o comprimento da régua de ferro deverá ser maior do que o de cobre.

311. O possível esquema de suspensão está representado na fig. 400. 1 e 2 são as barras com um pequeno coeficiente de dilatação linear α_1 (por exemplo, de aço), 3 são as barras com um grande coeficiente de dilatação α_2 (por exemplo, de zinco ou latão). Os comprimentos das barras podem ser escolhidos de tal modo, que o comprimento do pêndulo não variará com a temperatura. Para isto é necessário que $\alpha_1(l_1 + l_2) = \alpha_2 l_3$.

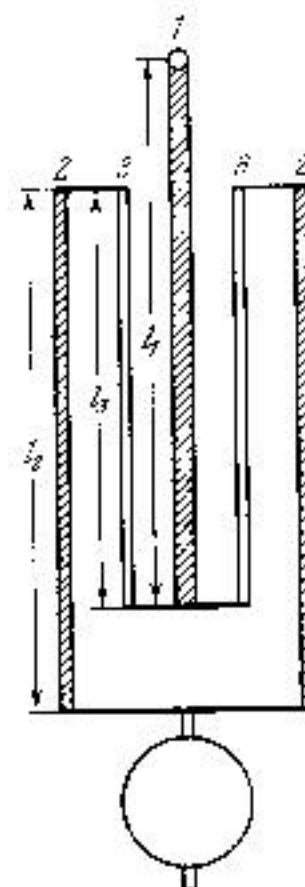


Fig. 400

312. Ao aquecermos o balão, o volume de sua cavidade aumenta pela mesma lei, que o volume do vidro: $V = V_0(1 + \beta t)$, onde β é o coeficiente de dilatação do volume do vidro. Se simbolizarmos por ρ_0 e ρ_1 as densidades do mercúrio, para as temperaturas t_0 e t_1 , então, podemos escrever que: $m_0 = \rho_0 V_0$ e $m_1 = \rho_1 V_1$, sendo que: $\rho_1 = \rho_0(1 - \beta_1 t_1)$. De tal sistema de equações, obtemos para β a seguinte expressão:

$$\beta = \frac{m_1(1 + \beta_1 t_1) - m_0}{m_0 t_1} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ graus}^{-1}.$$

O coeficiente de dilatação linear é $\alpha = 3/2 \approx 10^{-5} \text{ graus}^{-1}$.

313. Suponhamos, que o pêndulo do relógio, que funciona com precisão, realize N oscilações diárias. Para uma temperatura t_1 , o pêndulo, de nosso relógio realiza N oscilações em $(n - 5)$ segundos (onde $n = 24 \cdot 600$ é o número de segundos em um dia); e para uma temperatura t_2 , realiza N oscilações em $(n + 10)$ segundos. Os períodos de oscilações serão correspondentemente iguais a $T_1 = (n - 5)/N$ e $T_2 = (n + 10)/N$, donde a relação dos períodos é: $T_1/T_2 = (n - 5)/(n + 10) \approx 1 - 15/n$. Por outro lado, considerando, que o período de oscilações do pêndulo é $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, obtemos, que:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_2).$$

Iguando as expressões para a relação dos períodos, determinamos que:

$$\alpha \approx 30/t_2 \quad t_2/g \approx 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ graus}^{-1}.$$

§ 13. LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA. CONDUTIBILIDADE TÉRMICA

314. Pela lei de conservação da energia, temos que a quantidade de calor irradiada é igual a diminuição da energia cinética:

$$Q = Mv_0^2/2 - (M - m)v^2/2,$$

onde v é a velocidade do carrinho, depois que colocaram no mesmo os ladrilhos. Esta velocidade determina-se, utilizando a lei de conservação da quantidade de movimento, $v = Mv_0/(M + m)$, e consequentemente, temos, que: $Q = Mmv_0^2/2(M + m)$.

315. Com base na lei de conservação da energia, podemos escrever que:

$$mgl = mv^2/2 - k(l - l_0)^2/2 = Q,$$

onde l é o comprimento do cordão no momento, em que a aranha abandonou-o. Por outro lado, a variação na energia mecânica da aranha é igual ao trabalho das forças de atrito:

$$mgl - Q = mgl - Q,$$

onde $l = l_0 + \Delta l$. Consequentemente, $Q = mgl - k(\Delta l)^2/2$. Aplicando a lei de Hooke $F = k\Delta l = l_0\Delta l/l_0$, determinamos que: $Q = mgl_0/2 - k\Delta l^2/2$.

316. A corrente elétrica realiza um trabalho $A = q\tau$. Graças a este trabalho do congelador será retirada uma quantidade de calor $Q_2 = q\lambda + q\tau$, onde τ é a capacidade térmica da água e λ é o calor de fusão do gelo. A quantidade de calor irradiada para o quarto, segundo a lei de conservação da energia, será igual a:

$$Q_1 = A + Q_2 = w\tau + q\tau + q\lambda,$$

uma vez que a energia elétrica transforma-se finalmente em calor.

317. A temperatura no quarto aumentará. A quantidade de calor irradiada por unidade de tempo será igual à potência consumida pela geladeira, uma vez que a energia elétrica transforma-se em calor e o calor retirado do congelador voltará novamente ao quarto.

318. É mais vantajoso utilizar uma geladeira, que tome o calor do ar externo e o irradie no quarto. Nesse caso, o calor irradiado para o quarto, por unidade de tempo, será igual a: $w = Q_2$, onde w é a potência consumida pela geladeira, e Q_2 é o calor tomado do ar externo por unidade de tempo (ver o problema 316). Somente o alto custo e a complexidade dos aparelhos impedem, atualmente, a utilização de semelhante método para aquecimento.

319. No processo de solução, a rede cristalina de um sal se compõe-se. Esse processo exige o gasto de certa energia, fornecida pelo solvente. No segundo caso, parte das ligações intermoleculares da rede cristalina, já fora destruída no processo de pulverização do cristal. Por isso para a dissolução de um pó é necessário a uma quantidade menor de energia e a água, depois da dissolução no segundo recipiente, terá uma temperatura maior. O efeito, sem dúvida, será extremamente insignificante.

320. A quantidade de calor irradiada pela água quente é igual a $m_2c(t_2 - t_1)$, onde t_1 é a temperatura final. A água fria receberá uma quantidade de calor igual a $m_1c(t_1 - t_2)$. O calor recoberto pelo calorímetro é igual a $q(t_2 - t_1)$. De acordo com a lei de conservação da energia podemos escrever:

$$m_2c(t_2 - t_1) = q(t_2 - t_1) + m_1c(t_1 - t_2),$$

donde

$$Q = \frac{(m_1t_1 + m_2t_2)c + qt_1}{(m_1 + m_2)c + q} \approx 4^\circ\text{C}.$$

321. A potência gasta no aquecimento da água no calorímetro é $N_1 = D\lambda\tau\tau$, onde D é a densidade da água, τ é a capacidade térmica específica da água. A relação procurada será igual a:

$$Q = \frac{N - N_1}{N} = 1 - \frac{D\lambda\tau}{N_1} \approx 0,9.$$

322. $Q = \frac{k}{\alpha} (T_1 - T_2) S \approx 4,15 \text{ J}.$

323. A quantidade de calor Q que passa através da primeira lâmina em um segundo é igual a $Q_1 = k_1 \frac{T_2 - T_1}{d_1} S$, onde S é a área da lâmina. Uma vez que o processo é estacionário, então a mesma quantidade de calor passará através da segunda lâmina: $Q = k_2 \frac{T_1 - T_2}{d_2} S$. Das condições do problema, temos que:

$$k_1 \frac{T_2 - T_1}{d_1} S = k_2 \frac{T_1 - T_2}{d_2} S$$

e determinamos, então, que:

$$T_2 = \frac{k_2 d_1 T_0 + k_1 d_2 T_1}{k_2 d_1 + k_1 d_2}.$$

324. Substituindo, na expressão para Q , o valor da temperatura T_2 (ver o problema 323), para $d_1 = d_2 = d$, encontramos que:

$$Q = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} \frac{T_0 - T_1}{2d} S.$$

Consequentemente, o coeficiente de condutibilidade térmica da parede será

$$k = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

325. A quantidade de calor, que passa em um segundo através das seções transversais das barras, com coeficientes de condutibilidade térmica iguais a k_1 e k_2 , são iguais, correspondentemente, a:

$$Q_1 = \frac{k_1}{d} (T_1 - T_0) S \quad \text{e} \quad Q_2 = \frac{k_2}{d} (T_1 - T_0) S.$$

A quantidade de calor, que passa através das duas barras, cuja área total é $2S$, é igual a:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{k_1 + k_2}{2} \frac{T_1 - T_0}{d} 2S.$$

Donde concluímos, que o coeficiente de condutibilidade térmica da parede é igual a $k = (k_1 + k_2)/2$.

326. Os coeficientes de condutibilidade térmica nas paredes A e B são iguais a:

$$k_A = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_B = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

(ver soluções dos problemas 324 e 325). Da desigualdade evidente $(k_1 - k_2)^2 \geq 0$ deduzimos, que: $(k_1 + k_2)^2 \geq 4k_1k_2$, donde:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \geq \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}, \quad \text{i.e.} \quad k_A \geq k_B.$$

327. A quantidade de calor, que em cada segundo passa do aquecedor à água, através do fundo da panela, é igual a:

$$Q = \frac{k}{d} (T - T_1) S \dots \text{mJ},$$

onde T_1 é a temperatura de ebulição da água, λ é o calor específico de vaporização; donde obtemos, que: $T = T_1 + \frac{m\lambda d}{kS}$.

§ 14. PROPRIEDADES DOS GASES

328. A tampa tirada da caneta age como uma bomba. Sob a mesma, surge um volume rarefeito, que suga a tinta do depósito. O orifício serve para manter a pressão constante sob a tampa.

329. Considerando, que a temperatura permanece constante, aplicaremos a lei de Boyle-Mariotte ao volume de ar sobre o mercúrio:

$$(p_{01} - p_1)(l - 748 \text{ mm}) = (p_{02} - p_2)(l - 736 \text{ mm}),$$

donde $l = 764 \text{ mm}$.

330. Na posição de equilíbrio temos que $f = mg$, $t = 0$, onde f é a força de empuxo: $f = \rho_1 g S$, onde ρ_1 é a densidade da água, S é a área da seção transversal do tubo de ensaio depois da submersão. No caso dado, a força de empuxo cria-se pela diferença de pressões no extremo soldado do tubo por baixo e por cima. $f = p_1 S = (p_0 + \rho_1 g h) S$, onde p_0 é a pressão do ar no tubo depois da submersão. Pela lei de Boyle-Mariotte temos que: $p_0 S = p_1 k_1 S$. Do sistema de equações dado obtemos que

$$F = \frac{S}{2} [(p_0 + \rho_1 g h)^2 + 4p_0 \rho_1 g h - (p_0 + \rho_1 g h)] = mg = 0,87 \text{ N}.$$

331. Inicialmente, graças à diminuição do nível de água no vaso, a pressão p do ar baixará dum modo quase isotérmico. Isso ocorrerá até o momento, em que a pressão resultante, no nível do extremo inferior do tubo, não se torne igual a pressão atmosférica p_0 : $p = p_0 + \rho g h = p_0$, onde h é a altura da coluna do líquido no recipiente sobre o nível do extremo inferior do tubo. A partir deste instante, no vaso começam a passar bolhas de ar. A pressão, no nível do extremo inferior do tubo, permanecerá igual à atmosférica, e a pressão do ar será igual a: $p = p_0 + \rho g h$ e aumentará linearmente com a diminuição do nível da água. Nestas condições, a velocidade da saída do líquido do vaso será constante. A dependência de p em relação a Q , está representada na fig. 401. As oscilações insignificantes de pressão, provocadas pela passagem de bolhas isoladas de ar, não foram consideradas na fig. 401.

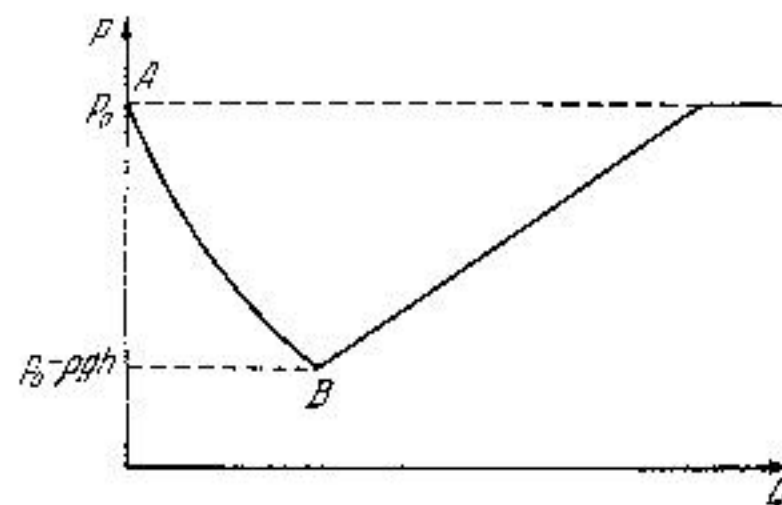


Fig. 401

332. Ao bombearmos ar do vaso, depois de uma bombeada, a pressão no mesmo será igual a: $p_1 = p_0 V / (V + v_0)$. Depois da segun-

da bombeada, será igual a: $p_1 V = p_2 (V + v_0)$ e, consequentemente, $p_2 = p_1 \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^n$, etc. Depois de n bombeadas, a pressão no recipiente será igual a: $p' = p_0 \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^n$.

Ao comprimirmos ar no vaso, depois de n bombeadas, a pressão estabelecida será igual a:

$$p = p' + \frac{\rho_0 v_0^2}{V} = p_0 \left\{ \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^n + \frac{v_0}{V} \right\}.$$

$p > p_0$ para qualquer n , em virtude de que no período de compressão para cada bombeada, a bomba apodera-se de uma quantidade de ar, que possui pressão p_0 , e no bombeamento do recipiente, a bomba apodera-se de um volume de ar v_0 que possui uma pressão menor do que p_0 .

333. Aplicando a lei de Boyle-Marriottte aos dois volumes de gás no tubo fechado, obtemos que:

$$p \frac{L-l}{2} S = p_1 \left(\frac{L-l}{2} - \Delta l \right) S,$$

$$p \frac{L-l}{2} S = p_2 \left(\frac{L-l}{2} + \Delta l \right) S,$$

$$p_1 = p_2 + \Delta p.$$

p é a pressão, estando o tubo na posição horizontal; p_1 e p_2 são as pressões nas partes inferior e superior do tubo, estando o mesmo na posição vertical, com as extremos fechados; d é o peso específico do mercúrio; S é a seção transversal do tubo. Daqui determinemos, que a pressão inicial no tubo é:

$$p = d \frac{l}{2} \left(\frac{l_0}{\Delta l} + \frac{\Delta l}{l_0} \right).$$

Para simplificarmos, simbolizemos $l_0 = (L - l)/2$. Se abrímos um dos extremos do tubo, estando o mesmo na posição horizontal, a pressão do gás no tubo torna-se igual à pressão atmosférica. Segundo a lei de Boyle-Marriottte, temos, que $p l_0 S = d H l_0 S$ (onde H é a pressão atmosférica), donde obtemos

$$l_1 = \frac{l_0}{2H} \left(\frac{l_0}{\Delta l} + \frac{\Delta l}{l_0} \right).$$

A coluna de mercúrio deslocar-se-á em uma distância igual a:

$$\Delta l = l_0 - l_1 = \frac{l_0}{2H} \left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} + \frac{\Delta l}{l_0} \right) \right].$$

A fim de que o mercúrio não se derrame do tubo, é necessário que se verifique a condição:

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leq \sqrt{\left(\frac{H}{l} \right)^2 + 1} + \frac{H}{l}.$$

Ao abrímos o extremo superior, quando o tubo estiver na posição vertical, teremos que:

$$p l_0 S = d (H - l) l_0 S,$$

donde:

$$\Delta l_2 = l_0 - l_2 = \frac{l_0}{2(H+l)} \left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} + \frac{\Delta l}{l_0} \right) + 2 \right].$$

O mercúrio não cairá do tubo se:

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leq \sqrt{\left\{ \frac{2(H+l)}{l} \right\}^2 + 1} + \frac{2(H+l)}{l}.$$

Ao abrímos o extremo inferior, teremos que:

$$p l_0 S = d (H + l) l_0 S,$$

donde:

$$\Delta l_3 = l_0 - l_3 = \frac{l_0}{2(H-l)} \left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} + \frac{\Delta l}{l_0} \right) - 2 \right].$$

A fim de que a coluna de mercúrio não se derrame do tubo, a seguinte condição deverá ser verificada:

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leq \sqrt{\frac{4(H-l)^2}{l^2} + 1} + \frac{2(H-l)}{l}.$$

334. Uma vez que para qualquer gás $p = 1$ atm e $T = 273^\circ \text{K}$, $V_m = 22,4$ l/mol, então, para todos os gases tomados em uma molécula grama, $C = p V_m T = 0,082 \frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{(\text{mol} \cdot ^\circ \text{K})}$. Esta constante, normalmente é simbolizada por R e denomina-se constante universal dos gases. O valor de R , no sistema de unidades SI, é igual a: $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot ^\circ \text{K}$.

335. O volume ocupado por um gás é proporcional a sua massa, sendo a pressão e a temperatura constantes. A um mol corresponde um volume V_m e uma massa arbitrária m um volume V . É evidente que $V_m = V \mu / m$, onde μ é a massa molar. Substituindo esta expressão na equação de estado para um mol, teremos que: $pV = (\mu/m)RT$.

336. Ao desaparecer a atração entre as moléculas, a pressão deverá aumentar. Para demonstrarmos isto, dividiremos, mentalmente, dentro do gás ou líquido duas camadas I e II (fig. 402). As moléculas penetrando de camada I na camada II , como consequência do movimento térmico, chocam-se com as moléculas da camada II e como resultado, nesta camada, agirá a força da pressão p_T , que depende da temperatura. As forças de atração das moléculas da camada I agem na camada II em sentido oposto. A pressão resultante da camada I , na camada II , será $p = p_T - p_i$, onde p_i é a pressão das forças internas de atração. O desaparecimento de p_i aumenta a pressão.

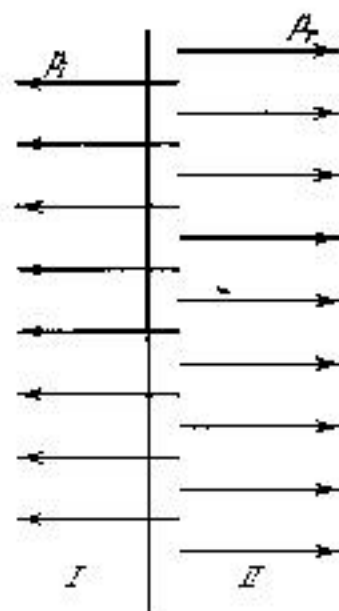


Fig. 402

337. Se desaparecerem as forças de interação entre as moléculas, a água transformar-se-ia em um gás ideal. A pressão pode ser determinada pela equação do estado de um gás ideal:

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} \approx 1370 \text{ atm.}$$

338. Destaquemos um volume cilíndrico do gás junto à parede (fig. 403). As forças, que atuam na superfície lateral do cilindro, compensam-

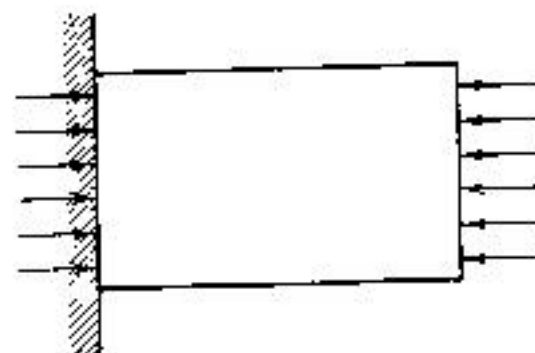


Fig. 403

-se mutuamente. Uma vez que o volume encontra-se em equilíbrio, a pressão da parede exercida sobre o gás deverá ser igual à pressão exercida pelo gás na outra base do cilindro. Baseando-se na terceira lei de Newton, podemos concluir que a pressão do gás na parede é igual à pressão dentro do vaso.

339. A pressão no gás depende das forças de interação entre as moléculas (ver o problema 338). As forças de interação entre as moléculas do gás e entre as moléculas do gás e a parede, são diferentes. A igualdade das pressões dentro do gás e junto da parede do vaso (ver o problema 338), pode existir, somente, graças à diferença de concentrações.

340. Como consequência da constância do volume, temos que:

$$p_1/p_2 = T_2/T_1 \text{ ou } (p_2 - p_1)/p_1 = (T_2 - T_1)/T_1 = 0,004,$$

donde $T_1 = (T_2 - T_1)/0,004 = 250^\circ \text{K}$.

341. Em base a lei de Arquimedes, temos que $\rho_{\text{gas}} = P/\rho g$, onde ρ é o peso específico da água e V é o volume da bolha. De acordo de estado, temos:

$$p = \rho g V = \rho g p / \rho g.$$

Excluindo destas equações V , determinamos ρ :

$$\rho = \frac{P \rho g (1 - 2V)}{gRT - g\rho g (1 - 2V)} \approx 0,868 \text{ g/cm}^3.$$

O equilíbrio será instável.

342. Usando o tubo numa posição horizontal, o aparelho pode servir para medir a pressão. Uma vez que a temperatura do gás é a mesma, as pressões à direita e esquerda da bolha equilibrar-se-ão.

Se o tubo estiver numa posição vertical, então, a pressão do gás na esfera inferior será maior do que a pressão na esfera superior em uma grandeza constante. Para um volume constante, a pressão com o aumento de temperatura aumenta mais rapidamente, quanto maior for a pressão inicial. Com o aumento da diferença das pressões nas esferas, a bolha começará a mover-se para cima. O aparelho poderá, então, ser utilizado como termômetro.

343. Uma vez que as massas do gás em ambas as partes do cilindro, são iguais e o pistão encontra-se em equilíbrio, então, $p_1 V_1 = p_2 V_2$, donde $T_2 = (V_1/V_2) T_1 = 250^\circ \text{K}$. Aplicando a lei de Boyle-Mariotte ao volume de gás cuja temperatura não varia, teremos, que $p = p_1$, $T_1 = 1,07 \text{ atm}$.

344. Iguais volumes de diferentes gases, em idênticas condições externas, contém um mesmo número de moléculas (lei de Avogadro). Por isso, $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = N_1 : N_2 : N_3 : N_4$, onde V_i é o volume do gás correspondente e N_i é o número de moléculas deste gás. A massa de uma quantidade qualquer de gás é proporcional ao número de suas moléculas e à massa molar do gás:

$$m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = N_1 \mu_1 : N_2 \mu_2 : N_3 \mu_3 : N_4 \mu_4$$

Por outro lado, simbolizando por $n_i = (V_i/V) 100\%$ o volume relativo percentual de um gás dado, teremos:

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = \frac{V_1}{V} : \frac{V_2}{V} : \frac{V_3}{V} : \frac{V_4}{V} = \frac{N_1}{N} : \frac{N_2}{N} : \frac{N_3}{N} : \frac{N_4}{N},$$

Se caracterizarmos a composição percentual do ar pelas grandezas $n'_i = (m_i/m) \cdot 100\%$ (composição em massa), tendo como base as relações anteriores, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} n'_1 : n'_2 : n'_3 : n'_4 &= \frac{m_1}{m} : \frac{m_2}{m} : \frac{m_3}{m} : \frac{m_4}{m} \\ &= \frac{V_1 \mu_1}{V} : \frac{V_2 \mu_2}{V} : \frac{V_3 \mu_3}{V} : \frac{V_4 \mu_4}{V} \\ &= n_1 \mu_1 : n_2 \mu_2 : n_3 \mu_3 : n_4 \mu_4 \end{aligned}$$

donde

$$n'_1 = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 + n_3 \mu_3 + n_4 \mu_4} n_1 \mu_1$$

Considerando que $n'_1 : n'_2 : n'_3 : n'_4 = 100\%$, obtemos que:

$$n'_1 = \frac{n_1 \mu_1 \cdot 100\%}{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 + n_3 \mu_3 + n_4 \mu_4}$$

e, consequentemente, temos:

$$\begin{aligned} n'_1 &= 75,52\% & n'_2 &= 20,15\% \\ n'_3 &= 1,28\% & n'_4 &= 0,05\% \end{aligned}$$

343. Para cada gás podemos escrever a equação de estado

$$\begin{aligned} p_1 V &= (m_1/\mu_1) RT, \\ p_2 V &= (m_2/\mu_2) RT, \\ p_3 V &= (m_3/\mu_3) RT, \\ p_4 V &= (m_4/\mu_4) RT. \end{aligned}$$

donde;

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} + \frac{m_4}{\mu_4} \right) RT,$$

por outro lado, para uma mistura de gases, temos que: $pV = (m/\mu) RT$, onde $\mu = m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2 + m_3/\mu_3 + m_4/\mu_4$ é a massa procurada. Pela lei de Dalton, temos que: $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, consequentemente, obtemos:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{\frac{p_1}{p} + \frac{p_2}{p} + \frac{p_3}{p} + \frac{p_4}{p}} = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4}{\frac{n'_1}{\mu_1} + \frac{n'_2}{\mu_2} + \frac{n'_3}{\mu_3} + \frac{n'_4}{\mu_4}} \cdot 28,966,$$

onde $n'_i = (m_i/m) \cdot 100\%$ é a composição percentual em massa do gás. O resultado obtido no problema anterior, permite determinar μ , conhecendo a composição do ar em volume:

$$\mu = \frac{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \mu_3 n_3 + \mu_4 n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} = 28,966.$$

346. Baseando-se na equação de Clapeyron, temos que:

$$\mu = mRT/pV \quad \rho RT/p = 72 \text{ g/mol.}$$

A fórmula procurada será: C_5H_{12} (um dos isômeros do pentano).

347. Ao comprimirmos o gás em um invólucro termoisolante, o trabalho, realizado pelas forças externas, acarreta o aumento da energia interna do gás e, então, a temperatura do mesmo eleva-se. A pressão do gás aumentará, tanto pela diminuição do volume, como pelo aumento da temperatura do mesmo. Pela compressão isotérmica, a pressão aumenta, somente, graças à diminuição do volume. Consequentemente, no primeiro caso a pressão aumentará em uma grandeza maior do que no segundo.

348. A dependência de p em relação a V , está representada na fig. 404. O trabalho máximo, igual à área quadriculada na fig. 404, é

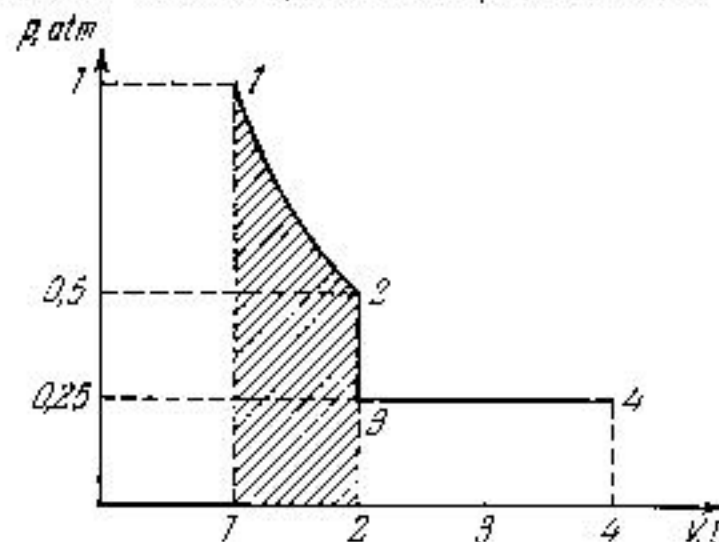


Fig. 404

realizado em um processo isotérmico ($T=2$). No setor 1-2 a temperatura não variará. No setor 2-3 a temperatura diminuirá em duas vezes. Posteriormente a temperatura aumentará e para $V_4 = 4$, $T_4 = T_1$.

349. 1-2 é uma isobara (fig. 405), o gás se aquece a uma pressão constante absorvendo calor.

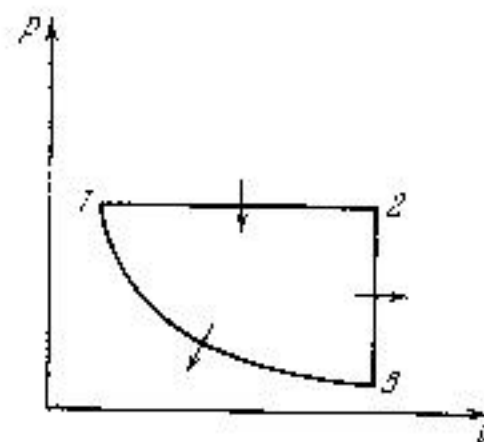


Fig. 405

2-3 é uma isocora. O gás esfria-se a um volume constante; a pressão diminuirá e o calor será irradiado.

3-1 é uma isoterma. O volume do gás diminui a uma temperatura constante. A pressão aumenta. O gás não se aquece, apesar de que as forças externas realizam um trabalho sobre o mesmo. Consequentemente, neste setor o gás transmitirá calor.

350. A quantidade de calor irradiada, na queima do metano em uma hora, é igual a $Q_1 = \rho V_0 u RT$, onde $\rho = 16 \text{ g/mol}$ é a massa molar do gás, $T = 284^\circ \text{K}$ é a temperatura do mesmo. A quantidade de calor, recebida pela água em uma hora, é igual a:

$$Q_2 = \frac{\pi D^2}{4} \rho c (t_2 - t_1) 3600,$$

onde ρ é a densidade da água; c é a capacidade térmica específica. Pelas condições do problema, temos que $Q_2/Q_1 = \eta = 0,6$. Resolvendo o sistema de equações obtido, determinamos que

$$t_2 = t_1 + \frac{\rho V_0 u \eta}{900 \pi D^2 \rho c RT} \approx 93^\circ \text{C}.$$

351. No estado inicial, temos que $p_1 V = (\mu_1 \mu_1) RT_1$, onde μ_1 é a massa molar do oxigênio. No estado final temos que $p_2 V = (\mu_1 \mu_2) RT_2$, onde μ_2 é a massa molar do oxigênio. Da equação de equilíbrio térmico, temos que

$$\frac{m}{\mu_1} c = \frac{C_V}{\mu_2} m (T_2 - T_1).$$

Resolvendo o sistema dado de equações, obtemos:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q}{C_V T_1} + \frac{\mu_1}{\mu_2} = 10.$$

352. Como consequência da dependência linear da pressão em relação ao volume, podemos escrever que: $p = aV + b$. As constantes a e b determinam-se das condições do problema:

$$a = (p_1 - p_2)/(V_1 - V_2) \approx 0,5 \text{ atm/l},$$

$$b = (p_2 V_1 - p_1 V_2)/(V_1 - V_2) \approx 20 \text{ atm}.$$

Colocando a expressão para p na equação de estado de um gás ideal, obtemos que: $pV = (\mu/m) RT = \text{const} \cdot T$, e determinamos:

$$aV^2 + bV = \text{const} \cdot T. \quad (1)$$

O gráfico da dependência de T em função da V (fig. 406) tem a forma de uma parábola. A curva atinge o valor máximo para $V_{\text{máx}} = -b/2a \approx 20 \text{ l}$, quando as raízes da equação do segundo grau (1) coincidem. Neste caso, temos:

$$p_{\text{máx}} = aV_{\text{máx}} + b \approx b/2 \approx 10 \text{ atm}$$

e consequentemente

$$T_{\text{máx}} = p_{\text{máx}} \cdot V_{\text{máx}} \mu / m R \approx 490^\circ \text{K}.$$

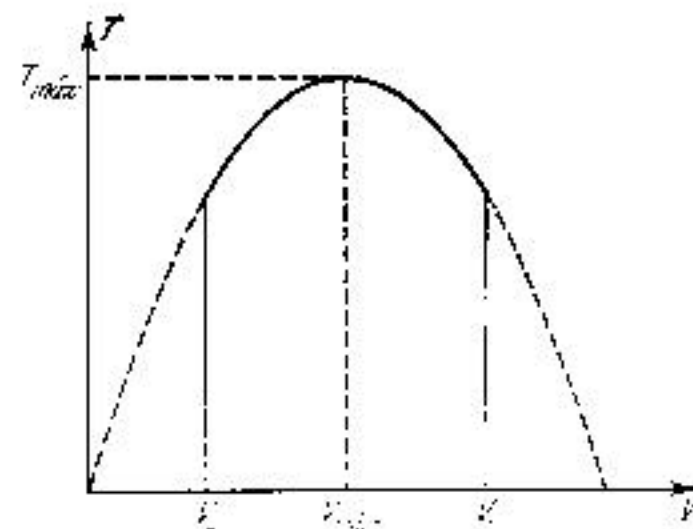


Fig. 406

353. A energia de um volume unitário do gás é $u_1 = C_V \rho$, onde ρ é a densidade do ar. De acordo com a equação de estado de um gás ideal, temos que: $pV = \mu B$ (B é constante). Uma vez que $\rho = m/V$, temos $\rho T = p/B$, consequentemente, $u_1 = (C_V B)/p$ determina-se somente pela pressão. A energia de todo o ar no quarto, também, é determinada pela pressão. A pressão no quarto é igual à pressão atmosférica e não varia ao aquecermos o ar. Por isso não varia a energia do ar no quarto. Aquecendo-se, uma parte do ar sai através de frestas, para fora, o que permite manter a constância de energia apesar do aquecimento. Se fosse em um quarto hermeticamente fechado a energia aumentaria com o aquecimento.

354. Em base à equação de estado a massa procurada do gás será igual a:

$$\Delta m = \frac{\mu p V}{R} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \approx 1,3 \text{ kg}.$$

355. Suponhamos, que inicialmente o tubo de ensaio encontra-se no fundo, em estado de equilíbrio estável. A medida que a temperatura aumenta, a pressão do ar no mesmo e, correspondentemente, a força de empuxo aumentam. Para uma determinada temperatura T_1 , o tubo começa a emergir. Uma vez que a pressão do líquido diminui à medida que afastamos do fundo, o volume do ar no tubo e consequentemente a força de empuxo continuam a crescer. O tubo atingirá rapidamente a superfície da água. Se prosseguirmos aumentando a temperatura, o tubo encontrará-se à superfície. Se diminuirmos a temperatura, então, o tubo não afundará para uma temperatura igual a T_1 . O problema é que o mesmo possui uma grande reserva de flutuosidade provocada pelo aumento da força de empuxo devida à imersão do tubo. Somente para uma determinada temperatura $T_2 < T_1$, o tubo começa a afundar. Neste caso, a força de empuxo começará a diminuir

uma vez que o ar no tubo, a medida que ele submerge ocupará um volume menor. O tubo atingirá o fundo rapidamente. A dependência da posição h do tubo, (relativamente ao fundo do recipiente) em função da temperatura T , está representada na fig. 407. Para $T < T_2$ o tubo, obrigatoriamente, encontrar-se-á no fundo; para $T > T_1$ encontrar-se-á na superfície. Se $T_2 < T < T_1$, o tubo estará no fundo, ou na superfície, em dependência dos valores anteriores da temperatura.

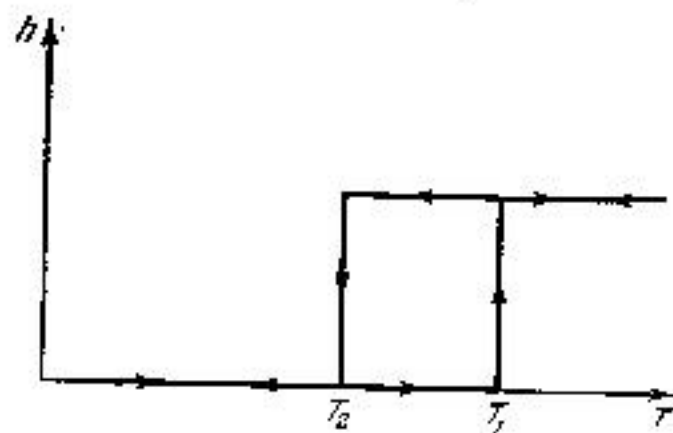


Fig. 407

336. O gás dilata-se para uma determinada pressão constante p , criada pelo pistão. Neste caso, o trabalho é: $A = p(V_2 - V_1)$, onde V_1 e V_2 são os volumes inicial e final do gás. Utilizando a equação de estado, expressamos o produto pV , através da temperatura T . Então, $A = (m\mu) R (T_2 - T_1) \approx 330 \text{ J}$.
337. O calor transmitido ao gás provocará o aquecimento do mesmo e a realização do trabalho mecânico. Segundo a lei da conservação da energia, temos que:

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \\ = \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) (C_V + R) \approx 1480 \text{ J}.$$

§ 15. PROPRIEDADES DOS LÍQUIDOS

358. É mais difícil comprimir um litro de ar, no sentido de que, para isso é necessário realizar um trabalho maior. A água é pouco compressível e para aumentar a pressão dentro da mesma até três atmosferas, é necessária uma pequena diminuição do volume da mesma.
359. Um termômetro máximo pode obter-se do seguinte modo. Sobre a coluna do líquido do termômetro, que se encontra na posição horizontal (fig. 408), coloca-se um corpo pequeno não humedecido pelo líquido, podendo o mesmo mover-se livremente ao longo

do tubo do termômetro. A posição do corpo indicará a temperatura máxima, uma vez que, ao ocorrer a dilatação do líquido, o corpo move-se ao longo do tubo e, ao ocorrer a compressão, o corpo

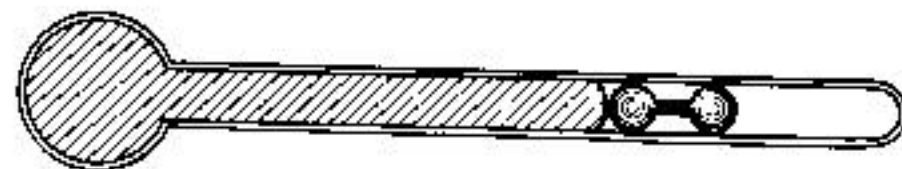


Fig. 408

permanece no mesmo local. Analogamente, podemos obter um termômetro mínimo. Para isto, o corpo humedecido pelo líquido do termômetro, deve ser colocado dentro do líquido.

360. Ao esticar-se uma película elástica de borracha, a força de tensão depende da grandeza de deformação da mesma. A força de tensão superficial é determinada somente pelas propriedades dos líquidos e não varia com o aumento da superfície dos mesmos.
361. A tensão superficial da gasolina limpa é menor do que a tensão superficial da gasolina, na qual foi dissolvida gordura. Em virtude disso, ao humedecermos com gasolina os limites da mancha, a mesma começa a diminuir em direção ao centro. Ao humedecermos a própria mancha, ela começa a estender-se pelo tecido.
362. Em uma camada superficial compacta do solo, formam-se capilares do tipo representado na fig. 409. Eles adunam-se na parte

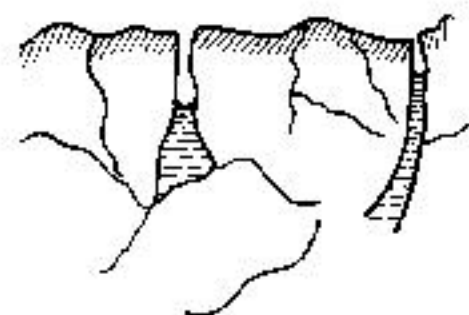


Fig. 409

superior e a água nos mesmos eleva-se. Na superfície a água evapora-se intensamente. Ao arar-se o solo a estrutura dos capilares se destrói e a humidade conserva-se melhor na terra.

363. Internamente no couro existe uma grande quantidade de capilares. Dentro de um capilar, de seção constante, uma gota de líquido humedecida, encontrar-se-á em equilíbrio. O aquecimento do líquido diminui a tensão superficial e por isso, o mesmo move-se em direção à parte fria do capilar. A graxa mover-se-á para dentro do couro, ao aquecermos a mesma de dentro para fora.

364. A gordura derrete-se e as forças capilares deslocam-na para a superfície fria do tecido, colocado sob o paletó (ver o problema 363).
365. A parte de lenha, que se encontra na sombra, está mais fria. Por isso, as forças capilares deslocam a água nesta direção.
366. A pressão hidrostática equilibrará a pressão capilar: $\rho gh = \pm 4\alpha/d$, donde $h = 30$ cm.
367. Na seção da película $abcd$ atuam as seguintes forças: a força de gravidade, a tensão superficial F_{ab} , aplicada à linha ab , e a tensão superficial F_{cd} , aplicada à linha cd . O equilíbrio é possível somente no caso, em que F_{ab} e F_{cd} são maiores que F_{bc} , em um valor igual à força de gravidade da seção $abcd$ da película. A diferença das forças de tensão superficial aplica-se, pela diferença de concentrações de sabão, nos contornos superficiais da película.
368. A força de empuxo equilibra a força de gravidade do cubo mg e a força de tensão superficial $4\alpha x$, i.é., $\rho_0 x^3 g + mg = 4\alpha x$, onde x é a distância procurado, donde, obtemos que: $x = (\rho_0 g + 4\alpha/\rho_0)^{-1/3} \approx 2,3$ cm. As forças de tensão superficial fazem uma corrente de cerea de 0,1 cm.
369. O líquido eleva-se a uma altura $h = 2\alpha/\rho g r$. A energia potencial da coluna do líquido é $W = mgh = 2\pi x^2 \rho g$. As forças de tensão superficial realizam um trabalho $A = 2\pi x \alpha = 4\pi x^2 \rho g$. Metade deste trabalho concorrerá para o aumento da energia potencial e a outra metade será irradiada em forma de calor. Consequentemente, $Q = 2\pi x^2 \rho g$.
370. A pressão dentro do líquido em um ponto, que se encontra acima de um nível qualquer, a uma distância h , é menor do que a pressão neste nível em uma grandeza igual a ρgh . No nível do líquido no recipiente, a pressão é igual a zero. Consequentemente, a pressão em uma altura h é negativa (o líquido está vesiculado) e igual a $p = -\rho gh$.
371. As forças de atração, que agem na molécula, localizada na camada superficial, por parte de todas as demais moléculas, possuem uma resultante dirigida para baixo. Entretanto, por parte das moléculas vizinhas imediatas, na molécula agem forças de repulsão. Graças a isto, a molécula encontra-se em equilíbrio. Como resultado da ação, tanto das forças de atração como das forças de repulsão, a densidade do líquido na camada superficial é menor do que dentro do mesmo. Benignamente, as moléculas 1 (fig. 410) agem a força de repulsão, por parte da molécula 2 e as forças de atração, de todas as demais moléculas (3, 4, ...). Na molécula 2 agem as forças de repulsão, por parte das moléculas 3 e 1 e as forças de atração, por parte das moléculas, que se encontram em uma profundidade maior. Como resultado, a distância 1-2 deverá ser maior do que a distância 2-3, etc.
- O esquema considerado é muito superficial (por exemplo, não é considerado o movimento térmico, etc.), mas dá um resultado qualitativamente verdadeiro. O aumento da superfície do líquido é acompanhado pelo surgimento de novas áreas rasfadas da camada superficial. Então, deverá ser realizado um trabalho contra as forças de atração entre as moléculas. Este trabalho é denominado energia superficial.

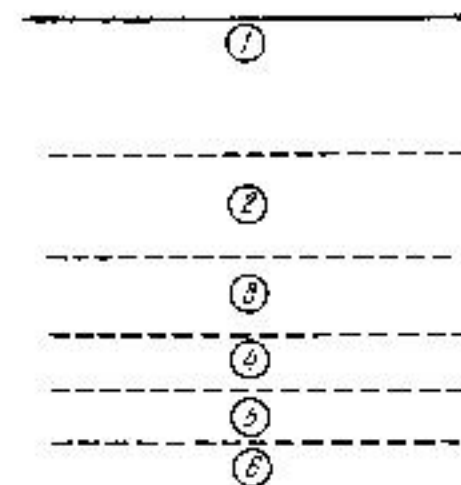


Fig. 410

372. A pressão necessária deverá ser maior, do que a atmosférica, em uma grandeza capaz de equilibrar a pressão hidrostática da coluna do líquido e a pressão capilar na bolha de ar, de raio r . A pressão deverá ser maior do que a atmosférica em $p = \rho gh + 2\alpha/r = 484$ N/cm².
373. Uma vez que neste caso, $\rho gh < 2\alpha/r$, então, o líquido eleva-se até o extremo superior do tubo. O menisco terá a forma de um segmento esférico (fig. 411). O raio de curvatura do segmento

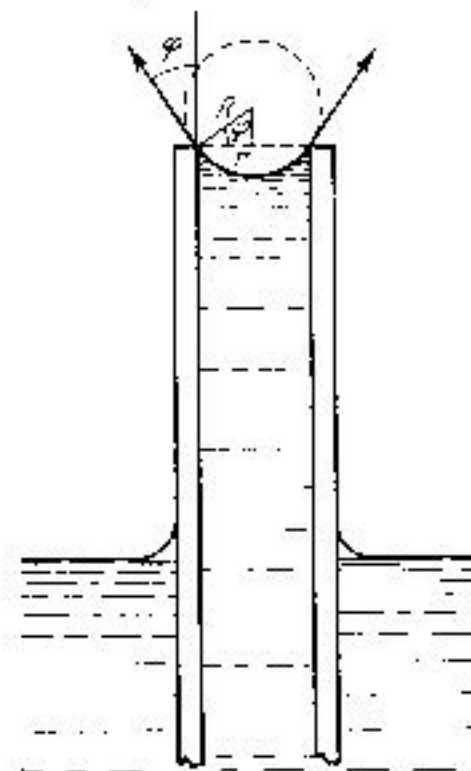


Fig. 411

determina-se pela condição de que as forças de tensão superficial equilibram toda a coluna do líquido, i.é.: $2\pi r \cos \varphi = \pi r^2 h \rho g$, donde $\cos \varphi = r h \rho g / 2\pi$. Como vê-se da fig. 411, o raio de curvatura do segmento é $R = r / \cos \varphi = 2\pi r h \rho g = 0,74 \text{ mm}$.

374. Depois de ser aberto o tubo, em seu extremo inferior forma-se um menisco convexo, da mesma forma que no extremo superior. Por isso, o comprimento da coluna de água, que permanece no tubo, será igual a $2h$, se $l \gg h$ e será igual a h se $l \ll h$.
375. 1) As forças de tensão superficial poderão manter, no capilar dado, uma coluna de água de altura não maior que h . Por isso, a água escoar-se-á do capilar.
2) A água não escoar; o menisco é convexo. Para um líquido, que molha absolutamente as paredes o menisco terá a forma de uma semi-esfera.
3) A água escoa. O menisco é convexo. A curvatura do mesmo é menor do que no segundo caso.
4) A água não escoa. O menisco é plano.
5) A água não escoa. O menisco é côncavo.

376. Dentro da bolha de sabão de raio R a pressão p é maior do que a atmosférica em uma grandeza duas vezes maior do que a pressão capilar, uma vez que a película da bolha é dupla: $p = p_0 + 4\sigma / R$. A pressão dentro da bolha de raio R , juntamente com a pressão dentro do setor da película entre as bolhas, deverá equilibrar a pressão dentro da bolha menor. Consequentemente, $4\sigma / R = 4\sigma / R_0 + 4\sigma / r$, onde R_0 é o raio de curvatura do setor da película AB , donde $R_0 = Rr / (R - r)$. As forças de tensão superficial, em qualquer ponto da superfície de contato das bolhas, equilibram uma à outra e são iguais entre si. Isto é possível, somente, no caso em que os ângulos entre eles são iguais a 120° .
377. Pela lei de conservação da energia, a cruz não pode entrar em rotação. As componentes das forças da tensão superficial são equilibradas pelas forças da pressão hidrostática, uma vez, que a pressão hidrostática da água, que se encontra acima do nível horizontal do líquido, é negativa (ver o problema 370).

378. Se os corpos estiverem humedecidos pela água, a superfície da água tem a forma representada na fig. 412, a. Entre os fósforos acima do nível MN a água está estacionada pelas forças capilares e a pressão dentro da mesma é menor do que a pressão atmosférica. Os fósforos aproximam-se, uma vez que a pressão sobre os mesmos, exercida das laterais, é igual à atmosférica. Para os fósforos não humedecidos pela água, a forma da superfície está representada na fig. 412, b. A pressão entre os fósforos é igual à atmosférica e a pressão das laterais abaixo do nível MN é maior do que a atmosférica. Ao aproximarmos os fósforos, no último caso, nos ângulos de junção dados, correspondem duas diferentes formas de superfície (fig. 413) do líquido. Entretanto, uma delas (fig. 413, a) não é viável. A pressão no nível KL deverá ser a mesma em todos os pontos. Em particular, a pressão das colunas AB e CD de diferentes alturas deverá ser igual. Mas isto é impossível, uma vez que a posição das colunas pode ser calculada, a fim de que a superfície das mesmas tenha uma mesma forma. Então, a pressão complementar das forças superficiais é única e a pressão hidrostática é diferente. Consequentemente, ao aproximarmos os fósforos, a superfície da água, entre os mesmos,

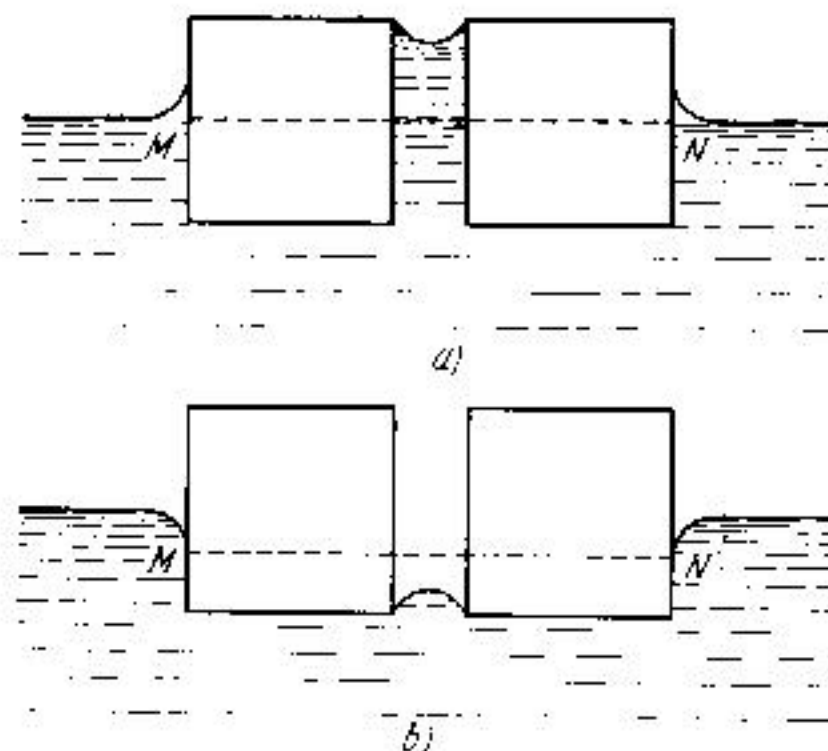


Fig. 412

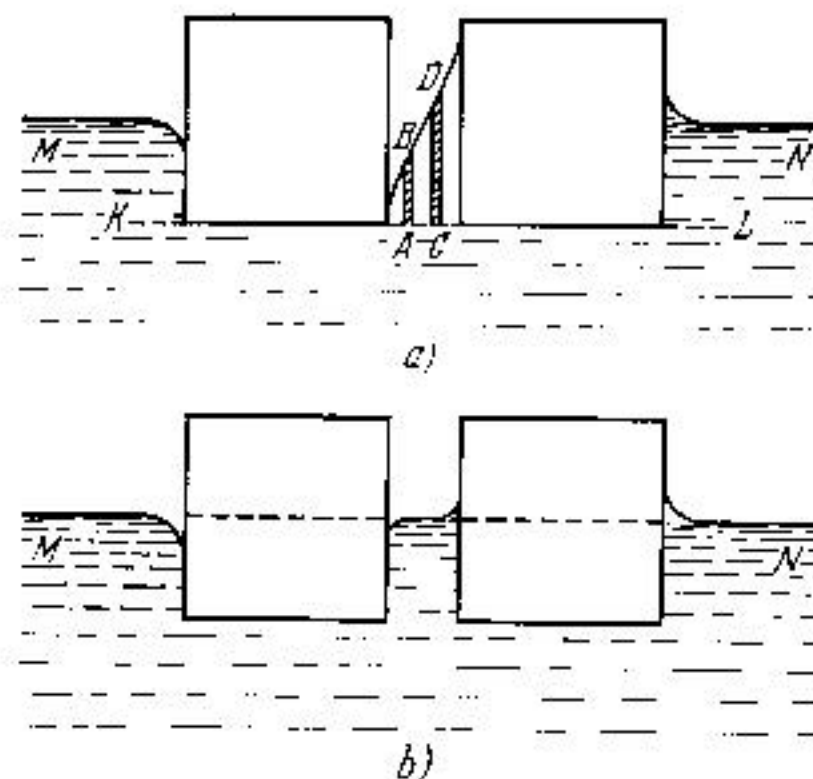


Fig. 413

tenderá à forma horizontal (fig. 413, b). Neste caso, como vê-se na figura, a pressão entre os fósforos no nível MN é igual à atmosférica. A pressão da esquerda no primeiro fósforo é igual à pressão atmosférica abaixo do nível MN. No segundo fósforo a pressão da direita é menor do que a atmosférica acima do nível MN. Como resultado haverá repouso entre os fósforos.

§ 16. TRANSFORMAÇÕES MUTUAS DE CORPOS SÓLIDOS E LÍQUIDOS

379. O congelamento a zero graus centígrados ocorre somente na presença de centros de cristalização. Como centro de cristalização pode ser utilizada qualquer partícula insolúvel. Quando a massa de água é muito grande, na mesma sempre encontra-se um destes centros e isto já é suficiente para congelar toda a água. Se a massa de água for dividida em gotículas, então, em um número relativamente pequeno de gotículas encontraremos tais centros de cristalização e somente estas gotículas congelar-se-ão.
380. A quantidade de calor, recebida por unidade de tempo pela água e pelo gelo, é aproximadamente a mesma, uma vez que a diferença de temperaturas, entre a água e o ar do quarto, é aproximadamente a mesma, que entre o gelo e o ar do quarto. Em 15 minutos a água recebeu 840 J de calor. Consequentemente, o gelo em 10 horas recebeu 33 600 J, donde $\lambda = 336 \text{ J/g}$.

381. $v = 2464 \text{ m/s}$.

382. As equações do equilíbrio térmico têm a seguinte forma:

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t = C \Delta t,$$

$$Q_2 = m_1 c_1 \Delta t / 2 + m_1 \lambda + m_2 c_2 \Delta t / 2 + C \Delta t,$$

onde m_1 e c_1 são a massa e capacidade calorífica do gelo; C é a capacidade térmica do calorímetro; c_2 é a capacidade calorífica da água; $\Delta t = 2^\circ\text{C}$, donde:

$$C = \frac{Q_1 \left(\frac{c_2}{2c_1} + \frac{\lambda}{c_1 \Delta t} + \frac{1}{2} \right) + Q_2}{\frac{c_2}{c_1} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} + \frac{\lambda}{c_1}} = 630 \text{ J graus}.$$

383. A quantidade de calor irradiado pela água, ao esfriarmos a mesma até 0°C , é igual a 16 800 J. Para o aquecimento do gelo até 0°C é necessário 50 400 J. Consequentemente, o gelo pode aquecer-se, somente, graças ao calor irradiado no esfriamento da água. Para a irradiação dos 33 600 J, que faltam, deverão ser congeladas 100 g de água. Como resultado, no calorímetro forma-se uma mistura de 500 g de água e 500 g de gelo, que se encontram a uma temperatura de 0°C .

384. A temperatura final das substâncias existentes no recipiente é $\theta = 0^\circ\text{C}$. A equação do equilíbrio térmico tem a seguinte forma:

$$m_1 c_1 (t_1 - \theta) = m_2 c_2 (\theta - t_2) + (m_2 - m_3) \lambda,$$

onde m_1 é a massa procurada do recipiente, c_2 é a capacidade calorífica do gelo, donde:

$$m_1 = \frac{m_2 c_2 (\theta - t_2) + (m_2 - m_3) \lambda}{c_1 (t_1 - \theta)} = 200 \text{ g}.$$

385. 1) A massa procurada de gelo m pode ser determinada da seguinte equação: $m\lambda = Mc(t - \theta)$, donde $m = 100 \text{ g}$.
2) A equação do equilíbrio térmico escreve-se, no caso dado, da seguinte forma: $M\lambda = Mc(t - \theta)$, donde $t = 80^\circ\text{C}$.
386. A temperatura de fusão do gelo por compressão até uma pressão de 1200 atm, diminui em $\Delta t = 8,8^\circ\text{C}$. O gelo fundir-se-á o momento, em que o congelamento atinja $-8,8^\circ\text{C}$. Para isto, o mesmo absorve uma quantidade de calor $Q = m_1 \lambda$, onde m_1 é a massa do gelo derretido, e λ é o calor específico de fusão. Em base à equação do equilíbrio térmico, temos que $m_1 \lambda = m_2 c_2 \Delta t$, onde c_2 é a capacidade calorífica do gelo, donde $m_1 = c_2 \Delta t \lambda \approx 0,6 \text{ g}$.

§ 17. ELASTICIDADE E SOLIDEZ

387. $F = SE(R - r)/r = 660 \text{ N}$.

388. Ao aquecermos a barra, de extremos fixos, em Δt , na mesma surge uma força elástica F , igual, segundo a lei de Hooke, a $F = SE\Delta l/l = SE\alpha\Delta t$, onde E é o módulo de elasticidade do aço e α é o coeficiente de dilatação do mesmo. Se libertarmos, gradualmente, um dos extremos da barra, então, o comprimento da mesma aumentará em $\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$. Consequentemente, a força diminuirá linearmente de F até zero, uma vez que o valor médio da mesma será igual a $F/2$. O trabalho procurado é: $A = (F/2) \Delta l = 1,2 SE\alpha^2 (\Delta t)^2$.

389. A tensão do fio é $T = Mg/2 \sin \alpha$. Da lei de Hooke deduzimos, que $T = (\Delta l/2l_0) ES$. Uma vez que $\Delta l = 2l_0 \cos \alpha - l_0$, então:

$$T = \frac{l_0 - l_0 \cos \alpha}{2 \cos \alpha} SE = \frac{Mg}{2 \sin \alpha}.$$

Para ângulos pequenos, temos que $\sin \alpha \approx \alpha$ e $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\alpha/2) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{8}$. Considerando isto, obtemos: $\alpha = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{Mg}{SE}}$.

390. A barra aquecida em Δt , no estado livre, alongar-se-á em $\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$, onde l_0 é o comprimento inicial da barra. A fim de libertarmos a barra aquecida, entre as paredes, é necessário comprimi-la em Δl . Pela lei de Hooke, temos que:

$$\Delta l = F/ES, \text{ donde } F = ES\alpha \cdot \Delta t = 1100 \text{ N}.$$

391. No aquecimento das barras, em estado livre, o comprimento das mesmas aumentará em $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) \Delta t$. A compressão das mesmas na mesma grandeza Δl , conduz à diminuição dos comprimentos das barras em $\Delta l'_1$ e $\Delta l'_2$, sendo que: $\Delta l'_1 + \Delta l'_2 = \Delta l$. Para isto é necessária a força:

$$F = E_1 S \Delta l'_1 / l_1 = E_2 S \Delta l'_2 / l_2.$$

Resolvendo o sistema obtido de equações, determinamos que

$$F = \frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{l_1/E_1 + l_2/E_2} S \Delta t.$$

Com esta força as barras atuam uma sobre a outra.

392. Do conceito de simetria é evidente que o alongamento dos fios será igual. Simbolizemos este alongamento por Δl . Em base à lei de Hooke, a tensão do fio de aço é $F_a = (A\Delta l) S E_a$ e do cobre é $F_c = (A\Delta l) S E_c$, donde concluímos, que a relação das tensões é igual à relação dos módulos de elasticidade correspondentes: $F_a/F_c = E_a/E_c = 1/2$. Em equilíbrio $2F_a = F_c = mg$. Consequentemente, $F_a = mg/4 = 250 \text{ N}$ e $F_c = 2F_a = 500 \text{ N}$.
393. Baseando-se na lei de Hooke, temos que

$$F_c = (A\Delta l) S_c E_c \quad \text{e} \quad F_f = (A\Delta l) S_f E_f.$$

Donde deduzimos, que $F_c/F_f = 2$. Deste modo, 2/3 do peso atua sobre o concreto e 1/3, sobre o ferro.

394. Sob a ação da força de compressão F o tubo diminui em $FL/S_f E_f$ e sob a ação da força de distensão F , o macho alonga-se na grandezza $FL/S_m E_m$. A soma $FL/S_f E_f + FL/S_m E_m$ é igual ao deslocamento da porca ao longo do macho:

$$FL/S_f E_f + FL/S_m E_m = s,$$

donde:

$$F = \frac{s}{L} \frac{S_m E_m S_f E_f}{S_m E_m + S_f E_f}.$$

395. Uma vez que o coeficiente de dilatação térmica do cobre α_c é maior do que o coeficiente de dilatação térmica do aço α_a , então, o aumento da temperatura provoca a compressão da lâmina de cobre e a distensão das lâminas de aço. Como consequência da simetria, os alongamentos relativos de todas as três lâminas são iguais. Simbolizando por F a força de compressão, que age na lâmina de cobre por parte das duas lâminas de aço, para o alongamento relativo da lâmina de cobre teremos que $\Delta l/l = \alpha_c t = F/S E_c$. A lâmina de cobre age sobre a lâmina de aço com uma força de distensão igual a $F/2$, igualando os alongamentos relativos das lâminas, obtemos que:

$$\alpha_c t - \frac{F}{S E_c} = \alpha_a t + \frac{F}{2S E_a},$$

donde

$$F = \frac{2S E_a E_c (\alpha_c - \alpha_a) t}{2E_a + E_c}.$$

396. Em consequência da rotação surge no anel a tensão $T = \rho r^2/2\pi r$ (ver o problema 209). Para um anel fino $m = 2\pi r S \rho$, onde S é a seção transversal do anel. Consequentemente, $T/S = \rho r^2$, donde o valor da velocidade máxima é igual a $v = \sqrt{F/\rho} \approx 41 \text{ m/s}$.
397. Inicialmente, o macho esticado agirá, em cada porca, com uma força elástica F_0 . O peso $P \ll F_0$ não tem condições de aumentar

o comprimento da parte do macho, que se encontra entre as porcas, e, consequentemente, de variar a tensão do mesmo. Por isso, a força com que atua a barra na porca superior, não variará até o momento em que $P \approx F_0$. A porca inferior está submetida à ação da força F_0 por parte da seção superior do macho e à força P , por parte da seção inferior. Uma vez que a porca encontra-se em equilíbrio, a força, que age na mesma por parte da barra, é $F = F_0 - P$. Neste modo, a ação do peso $P \ll F_0$ reduz-se,

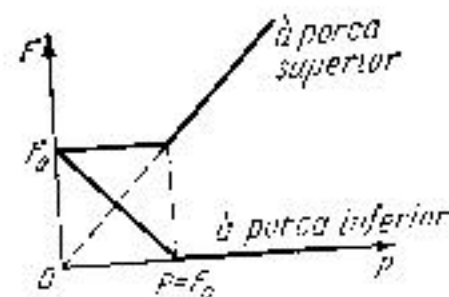


Fig. 414

somente, à diminuição da pressão da porca inferior na barra. Para $P > F_0$ o comprimento do macho aumentará e a força, que age na porca inferior por parte da barra, desaparecerá. Na porca superior atua a força P . A dependência das forças, que atuam sobre as porcas em relação à grandezza do peso, representa-se na fig. 414.

§ 13. PROPRIEDADES DOS VAPORES

398. No calorímetro existirá água e vapor a uma temperatura de 100°C .
399. O próprio vapor de água não é visível. Nós podemos observar, somente, uma nuvem de gotículas que surgem depois da condensação. Ao desligarmos o aquecedor a água, desaparece o jato de ar aquecido, que, anteriormente, envolvia a chaleira. Então, o vapor de água que sai da chaleira esfria-se e condensa-se.
400. A base da equação do estado de um gás ideal, temos que: $p = m/V = \mu p_0 RT$. Se expressarmos a pressão em mm da coluna de mercúrio, e o volume em m^3 , então, $R = \frac{760 \cdot 0,0224}{273} \text{ m}^3$ de $\text{Hg} \cdot \text{m}^3 / (\text{K} \cdot \text{mol})$, donde $\mu = 1,68$ p. 273 T . Para temperaturas próximas à temperatura ambiente, i.é., para $T \approx 298^\circ \text{K}$, teremos que: $p \approx p_0$.
401. A primeira vista temos a impressão de que a equação de estado de um gás ideal, não pode dar resultados próximos aos reais para a densidade, ou volume específico dos vapores saturados. Entretanto, isto não ocorre. Se calcularmos a densidade do vapor pela fórmula $p = m/V = \mu p_0 RT$ e compararmos os valores obtidos com os dados na tabela 1, descobrimos uma boa coincidência.

Isto explica-se do seguinte modo. A pressão de um gás ideal aumenta diretamente proporcional à temperatura, para um volume constante do gás e, consequentemente, para uma densidade constante. A dependência representada na fig. 155 da pressão dos vapores saturados, em função da temperatura, corresponde a um volume constante do vapor saturado e do líquido com o qual o mesmo encontra-se em equilíbrio. Ao aumentar a temperatura, a densidade do vapor aumenta, uma vez que parte do líquido transforma-se em vapor. A uma pequena variação do volume que é ocupado pelo vapor, corresponde um aumento substancial de sua massa. A relação entre a pressão e a densidade é, aproximadamente, proporcional à temperatura como no caso de um gás ideal.

A equação de Clapeyron—Mendeleiev dá, fundamentalmente, a dependência correta entre p , V e T , para o vapor de água, incluindo os valores destes parâmetros, que correspondem ao início da condensação. Mas a equação não pode descrever o processo de transformação de um vapor em líquido e em particular, indicar para quais valores de p , V e T começa esta transição.

402. Para 30°C a pressão dos vapores saturados é $p = 31,82$ mm de Hg. De acordo com a equação de estado de um gás ideal, temos que:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{RT}{p} \approx 296 \text{ l.}$$

403. Para um aumento lento da temperatura a pressão dos vapores de água no quarto pode ser considerada constante. A humidade $A_0 = 10\%$ corresponde à pressão dos vapores $p = A_0 p_0 (100\%)$, onde $p_0 = 12,79$ mm de Hg é a pressão dos vapores saturados para 15°C . Para uma temperatura de 25°C , a pressão dos vapores saturados é $p_1 = 23,76$ mm de Hg. Consequentemente, a humidade relativa procurada é:

$$A = \frac{p}{p_1} 100\% = \frac{A_0 p_0}{p_1} = 5,4\%.$$

404. Pelas condições do problema sabemos que a humidade relativa na rua e no quarto é, aproximadamente, igual a 100% . Entretanto, a pressão dos vapores saturados de água na rua é muito menor do que no quarto, uma vez que a temperatura do ar no quarto é maior, e para a igualdade das pressões, às custas da saída dos vapores, através da abertura para fora, é necessário um tempo considerável. Por isso, ao abrirmos a janelinha os vapores começam a sair mais rapidamente do quarto e a roupa seca-se mais rapidamente.

405. 1) O nível da água iguala-se em ambos os recipientes que se comunicam. Os vapores de água no recipiente à esquerda condensam-se — não em parte e no recipiente da direita a água evapora-se — parcialmente.

2) Os níveis igualam-se como resultado da passagem dos vapores de um recipiente ao outro. Para uma temperatura dada, a pressão dos vapores saturados é a mesma, em ambos os re-

cipientes junto à superfície do líquido e diminui de um mesmo modo com a altura. Por isso, a pressão dos vapores, em um mesmo nível nos recipientes é diferente, o que conduz à passagem do vapor e à posterior condensação do mesmo no recipiente, cujo nível de água é menor.

406. Para $t_2 = 30^\circ\text{C}$ a pressão dos vapores tornou-se igual à pressão p_{20} dos vapores saturados ($p_{20} = 31,8$ mm de Hg), somente, sendo a pressão do ar igual a 10 atm. Para uma diminuição isotérmica da pressão do ar, em 10 vezes o volume do mesmo aumenta também em 10 vezes. Consequentemente, para uma pressão atmosférica e temperatura igual a 30°C , a pressão do vapor de água era igual a $p = 3,18$ mm de Hg. Da equação de Clapeyron deduzimos, que a uma temperatura $t_1 = 10^\circ\text{C}$, a pressão do vapor é $p_1 = p T_1 / T_2$, onde $T_1 = 283^\circ\text{K}$ e $T_2 = 303^\circ\text{K}$. A humidade relativa procurada é igual a:

$$A = \frac{p_1}{p_0} 100\% = \frac{p}{p_0} \frac{T_1}{T_2} 100\% \approx 32,6\%.$$

onde $p_0 = 9,2$ mm de Hg, é a pressão dos vapores saturados a uma temperatura $t_1 = 10^\circ\text{C}$.

407. A pressão $p = 9,5$ mm de Hg é a pressão dos vapores de água saturados para $t = 5^\circ\text{C}$. A queda brusca da pressão confirma, que toda a água transformou-se em vapor. O volume do vapor bombeado, até a total evaporação da água é $V = 3600$ l. Em base à equação de estado de Clapeyron — Mendeleiev, a massa procurada de água é $m = p V / R T \approx 29,4$ g.

408. Para o aquecimento da água até 100°C é necessário uma quantidade de calor $Q_1 = mc \Delta t = 12\,600$ J. Consequentemente, na vaporização será utilizada uma quantidade de calor $Q_2 = Q - Q_1 = 11\,600$ J. A quantidade de água, que se transforma em vapor é igual a $m_1 = Q_2 / h = 5,1$ g. Pela equação de estado de um gás ideal esta quantidade de vapor ocupa um volume $V = (m_1 / \rho) = R T / p$. Desprezando a diminuição do volume, ocupado pela água, determinamos a altura de ascensão de água: $s = V / S = 17$ cm.

Eletricidade e magnetismo

§ 19. ELETROSTÁTICA

409. $F = q^2/4\pi\epsilon_0 r^2 = 9000 \text{ N}$. A força é muito grande. Transmitir ao corpo de dimensões pequenas uma carga de um coulomb é impossível, uma vez que as forças eletrostáticas de repulsão são tão grandes, que a carga não poderá manter-se no corpo.

410. $F_{gr} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, $F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$, $F_{el}/F_{gr} = 4,5 \cdot 10^{30}$.

411. Se as cargas tiverem um mesmo sinal, então, para $\alpha > 2$ a carga pontual mover-se-á em direção ao ponto O , para $\alpha < 2$ em direção ao ponto B (fig. 415). Se as cargas tiverem sinais diferentes, a direção do movimento será inversa.

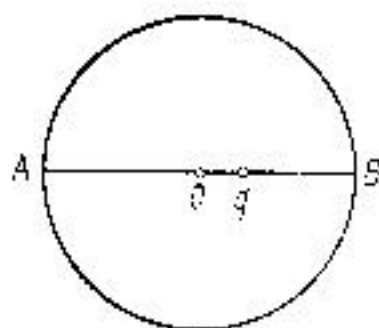


Fig. 415

412. As condições de equilíbrio para a esfera suspensa são dadas, em ambos os casos considerados, pelas equações:

$$T_1 \sin \alpha_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$T_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} + mg = 0.$$

$$T_2 \sin \alpha_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$T_2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} + mg = 0,$$

onde T_1 e T_2 são as tensões do fio; α_1 e α_2 são os ângulos de desvio do fio; $(+Q)$ e $(-Q)$ são as cargas das esferas fixas; $-q$ é a carga da esfera suspensa; m é a massa da esfera suspensa (fig. 416).

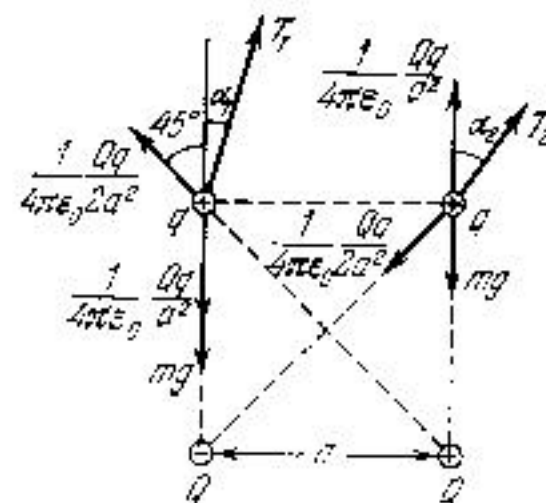


Fig. 416

Excluindo as incógnitas do sistema de equações, obtemos que:

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} 2\alpha_1 = 2(2\sqrt{2} - 1),$$

donde, obtemos: $\operatorname{ctg} \alpha_1 = 2(2\sqrt{2} - 1) = \sqrt{35} - 1 = \sqrt{2}$. Consequentemente, temos, que:

$$\alpha_1 = 7^\circ 55', \alpha_2 = 15^\circ 52' \text{ para } mg > \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$\alpha_1 = 82^\circ 04', \alpha_2 = 164^\circ 08' \text{ para } mg < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

413. As cargas negativas, induzidas na superfície do condutor, distribuem-se de tal modo, que a tensão resultante do campo, dentro do condutor, criado por uma carga pontual positiva e pelas cargas negativas induzidas, é igual a zero. (As cargas positivas induzidas, dirigir-se-ão para as bordas distantes da lâmina e o campo das mesmas pode ser desprezado). Esta distribuição das cargas induzidas, não depende da espessura da lâmina. Coloquemos à esquerda da lâmina, à mesma distância a , uma carga $(-q)$. É lógico, que na parte esquerda da lâmina, as cargas

positivas induzidas, distribuem-se do mesmo modo que as cargas negativas na parte direita da lâmina. Uma vez que colocamos à esquerda da mesma uma carga $-q$, o campo elétrico à direita da lâmina não variará. Deste modo, à direita da lâmina o campo elétrico da carga $-q$ e as cargas induzidas negativas, coincidem com o campo criado pelas cargas $-q$ e $-q$ e pelas cargas induzidas nas superfícies da lâmina (fig. 417). Se a espessura da lâmina

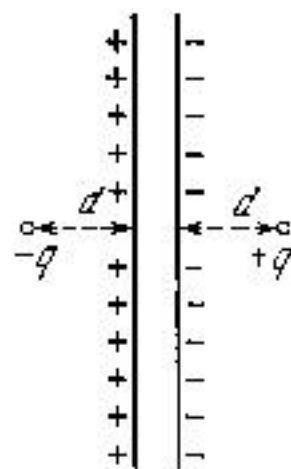


Fig. 417

é muito pequena, relativamente a d , poderemos considerar a lâmina infinitamente fina, e, neste caso, o campo criado pelas cargas induzidas fora da lâmina não existe.

Desta forma demonstramos, que o campo à direita da lâmina, criado pela carga $-q$ e pelas cargas negativas induzidas, é igual ao campo criado pelas cargas pontuais $+q$ e $-q$. Uma vez que no ponto de localização da carga $+q$, a tensão do campo das cargas negativas induzidas, é igual à tensão do campo da carga pontual $-q$, que se encontra a uma distância igual a $2d$ de $+q$, então, a força de atração procurada será igual a:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2}.$$

414. $F = \pi\sigma \sqrt{\pi\epsilon_0 a} Qq.$

415. Uma vez que $Q \gg q$, então, a interação entre os setores isolados do anel, pode ser desprezada. Destaquemos um setor pequeno do anel de comprimento $R\Delta\alpha$ (fig. 418). Por parte da carga Q age no mesmo a força $\Delta F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot \Delta q}{R^2}$, onde $\Delta q = q \cdot \Delta\alpha / 2\pi$. As forças de tensão do anel T equilibram a ΔF . Da condição de equilíbrio, considerando que $\Delta\alpha$ é pequeno, podemos escrever:

$$\Delta F = 2T \sin(\Delta\alpha/2) \approx T\Delta\alpha.$$

A força procurada é a força de tensão $T = Qq/8\pi^2\epsilon_0 R^2$.

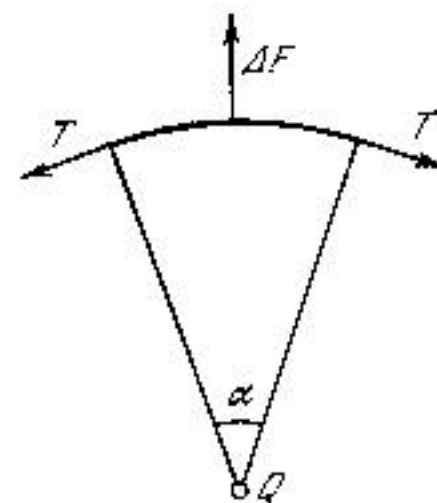


Fig. 419

416. Quando o fio inclina-se com ângulo α , na carga q age uma força F perpendicularmente à lâmina e igual a:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4l^2(1 - \cos\alpha) = 4l^2}.$$

ver a solução de problema 413). Para pequenos ângulos α , desviamos que: $1 - \cos\alpha \approx \alpha^2/2$ e, conseqüentemente, $F \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2l^2\alpha^2}$.

Neste caso, o período de oscilações será igual a:

$$T = 2\pi \sqrt{l \frac{16\pi\epsilon_0 m l^2}{q^2} = \frac{8\pi l}{q} \sqrt{\pi\epsilon_0 m}}.$$

417. O problema formalmente reduz-se à determinação do período das pequenas oscilações de um pêndulo simples de comprimento $2L$, posto na posição de equilíbrio no campo de for. qE :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{g} \frac{m}{qE}} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

418. Cada carga está no ponto D em campo de intensidade igual a $E_1 = \sigma/4\pi\epsilon_0 a^2$. A intensidade resultante será a soma dos três vetores (fig. 419). A soma das componentes horizontais destes vetores é igual a zero, uma vez que eles são iguais em grandeza e formam um triângulo equilátero, ângulos iguais a 120° . Os próprios vetores formam, com a vertical, ângulos iguais a $90^\circ - \alpha$, onde α é o ângulo entre a aresta do tetraedro e a altura h do triângulo ABC . As componentes verticais são iguais entre si e iguais a $q \sin\alpha / 4\pi\epsilon_0 a^2$. Do $\triangle ADE$, vê-se, claramente, que $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$, donde a intensidade do campo procurada é igual a:

$$E = \frac{\sqrt{6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}.$$

419. Analisemos o caso das cargas de sinais contrários, i.é., $q_1 > 0$, $q_2 < 0$. As intensidades criadas pelas cargas q_1 e q_2 são iguais,

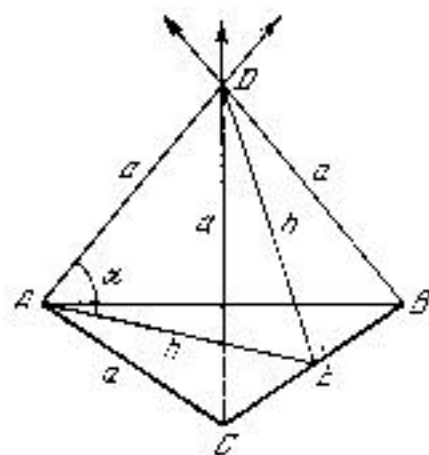


Fig. 415

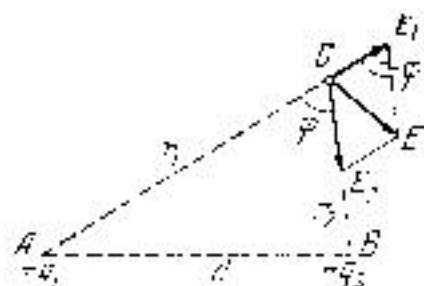


Fig. 421

correspondentemente, $\frac{1}{r_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$ e $\frac{1}{r_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$. Como se vê na Fig. 420, $E^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi$. De $\angle AEC$ temos que $\cos \varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$. Consequentemente,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{q_2^2}{r_2^2} + \frac{q_1q_2}{r_1r_2} (r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

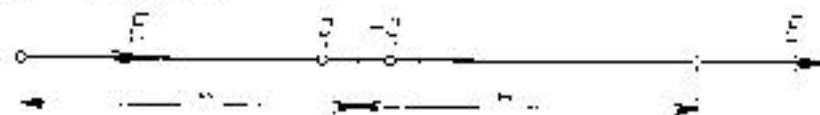
Se as cargas possuem o mesmo sinal, teremos, como:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{q_2^2}{r_2^2} + \frac{q_1q_2}{r_1r_2} (r_1^2 + r_2^2 + d^2)}.$$

$$420. 1^\circ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3};$$

$$2^\circ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+l)^2} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

(ver a Fig. 421).



a)



b)

Fig. 421

421. A intensidade do campo E em um ponto arbitrário A , no eixo do anel pode ser determinada como a soma geométrica das intensidades criadas por pequenos elementos isolados do anel carregado (Fig. 422). Ao somarmos os vetores da intensidade no ponto A , é necessário considerar somente as componentes, dirigidas ao longo do eixo do anel. As componentes dos vetores da intensidade, dirigidas perpendicularmente ao eixo, terão a resultante igual a

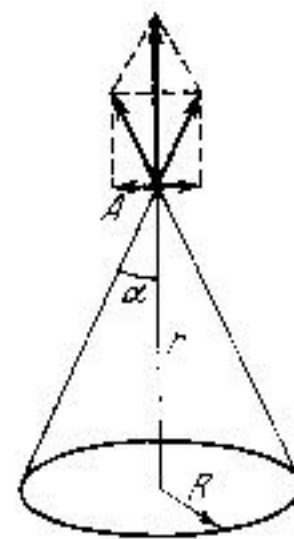


Fig. 422

zero como consequência da simetria. Consequentemente, a intensidade do campo no ponto A é igual a:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2 + r^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{(R^2 + r^2)^{3/2}},$$

422. A força que age na carga $-q$ é igual a:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

e estará sempre dirigida ao centro do anel, uma vez que $x \ll R$. Desprezando no denominador x , em comparação a R , obtemos, que:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3} x.$$

Deste modo, a força é proporcional a x e está dirigida ao centro do anel. Sob a influência desta força, a carga realiza um movimento oscilatório, cujo período é igual a: $T = 4\pi \sqrt{\pi\epsilon_0 R^3 / qQ}$.

423. Em ambos os casos, a intensidade do campo elétrico em um ponto distante r da lâmina, ou do fio, pode depender somente de σ ou τ e r . A dependência de σ e τ deverá ser linear (princípio da

superposição), i.é., $E = \sigma f(r)$ ou $E = \tau \varphi(r)$, onde $f(r)$ e $\varphi(r)$ são, por enquanto, funções desconhecidas de r .

Observação. O princípio da superposição, em nosso caso, encerra-se em que, a intensidade da soma das cargas é igual à soma das intensidades criadas independentemente por cada carga.

Como sabemos, $|E| = \frac{1}{|\epsilon_0|} \frac{Q}{L^2}$. As dimensões de σ e τ são

iguais a: $[\sigma] = Q/L^2$ e $[\tau] = Q/L$. É evidente, que no caso da lâmina $E = k_1 \sigma \epsilon_0$ e, no caso, do fio $E = k_2 \tau \epsilon_0$, onde k_1 e k_2 são coeficientes quaisquer sem dimensões. Baseando-se no conceito de simetria determinamos facilmente a direção da intensidade. A intensidade E está dirigida perpendicularmente à lâmina, ou ao fio. Teoricamente, determinamos os coeficientes k_1 e k_2 , cujos valores são iguais a: $k_1 = 1/2$ e $k_2 = 1/2\pi$.

424. Em consequência da pequena espessura da lâmina, podemos considerar, que a carga está distribuída uniformemente em ambas as superfícies, cujas áreas são iguais a $2b$. Deste modo, a densidade superficial de carga é igual a: $\sigma = q/2ab$. O campo dentro do metal será igual a zero e fora do mesmo a intensidade do campo será:

$$E = 2 \frac{q}{2\epsilon_0 2ab} = \frac{q}{2\epsilon_0 ab}.$$

425.
$$E_B = \frac{(Q_1 - Q_2)}{2\epsilon_0 S}, \quad E_C = \frac{(Q_1 + Q_2)}{2\epsilon_0 S},$$

$$E_A = -\frac{(Q_1 + Q_2)}{2\epsilon_0 S}.$$

Considerar-se-á intensidade positiva, se for dirigida da esquerda para a direita.

426. Destacamos no condutor um pequeno segmento AB de tal modo, que possamos considerá-lo plano (Fig. 423). O campo, nas proximidades deste segmento, pode ser considerado como a superposição de dois campos: do campo criado pelas cargas do segmento (vetores E_1, E_2) e do campo criado pelas demais cargas do condutor (vetores E'_1, E'_2). Uma vez que o segmento AB pode ser considerado

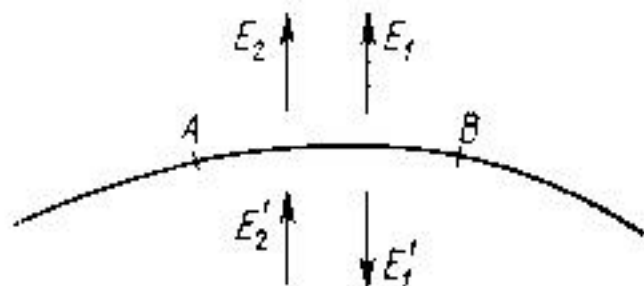


Fig. 423

plano, então, temos que $E_1 = E'_1 = \sigma/2\epsilon_0$. Além disso, uma vez que o campo criado pelas cargas, que se encontram fora dos

limites do segmento AB , é contínuo, então, $E_2 = E'_2$. E finalmente, uma vez que dentro do condutor não existe um campo, $E'_1 = E'_2$, donde, considerando as igualdades anteriores, obtemos, que: $E_1 = E_2 = \sigma/2\epsilon_0$. Consequentemente, a intensidade procurada será igual a:

$$E = E_1 + E_2 = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0.$$

427. Se $|x| \ll a/2$, então $E = p_x/\epsilon_0$. Se $|x| > a/2$, então $E = p_x/2\epsilon_0$.

428. Determinemos a intensidade do campo a uma distância $r < R$ do centro da esfera. Traçamos do centro da esfera uma circunferência de raio r . Todas as cargas, que se encontram dentro da esfera, criam no ponto que nos interessa, uma tal intensidade, como se as mesmas estivessem no centro. A intensidade do campo criado pelas cargas, que se encontram fora da circunferência a , é igual a zero. Deste modo, temos, que:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \pi r^2 \rho \frac{1}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Fora da esfera ($r > R$) a intensidade será, igual a:

$$E = Q/(\pi\epsilon_0 r^2),$$

onde Q é a carga da esfera. (O gráfico $E = f(r)$ ver na Fig. 424).

429. Determinemos a intensidade do campo a uma distância $r < R$ do eixo do cilindro. As cargas, que se encontram dentro do cilindro de

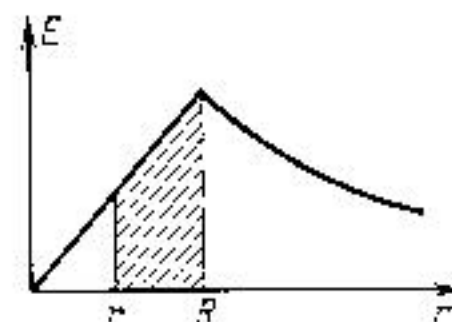


Fig. 424

não criam a uma distância r do eixo do cilindro a mesma intensidade, que criariam, se estivessem, no eixo. As cargas, que se encontram fora do cilindro, não criam campo. Consequentemente, se $r < R$, então, temos que:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\alpha r^2 \rho}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

Se $r > R$, teremos:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\pi R^2 \rho}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}.$$

430. $E_A = \rho R_A/3\epsilon_0 - \rho r/3\epsilon_0 - \rho a/3\epsilon_0$ (ver a fig. 425 e a solução do problema 428).

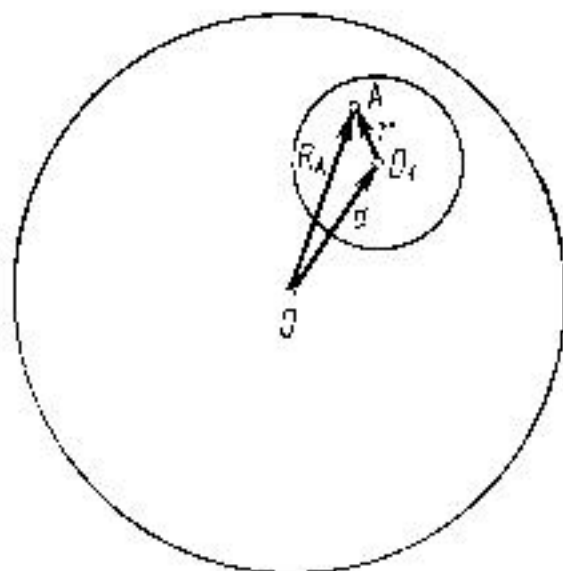


Fig. 425

431. Ver as soluções dos problemas 430 e 429.
432. A molécula será atraída pelo cilindro carregado. A força de atração é igual a:

$$F = \frac{\tau q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+k} \right) = \frac{\tau q \lambda}{2\pi\epsilon_0 r(r+k)}.$$

Nessa expressão nós podemos desprezar a grandeza k ($k = 10^{-3}$ cm) em comparação com r que não pode ser menor do que o raio do cilindro. Finalmente, para F obtemos a expressão: $F = \tau q \lambda / 2\pi\epsilon_0 r^2$.

433. Inicialmente, as forças que agem em ambas as moléculas são iguais. Ao aproximar-se do cilindro, a força F , que age na molécula com um momento elétrico constante, cresce proporcionalmente a $1/r^2$ ($F = 2\pi\epsilon_0 q \lambda / r^2$ ver o problema 432). A força F_2 , que age na molécula elástica, aumenta mais rapidamente, proporcionalmente a $1/r^3$ (às custas do aumento contínuo do momento elétrico desta molécula). As massas das moléculas são iguais e por isso, a aceleração da segunda molécula, ao aproximar-se do cilindro, aumentará mais rapidamente do que a primeira e ela atingirá mais rapidamente a superfície do cilindro.
434. Considerando que a e b são muito maiores do que c e d , podemos considerar a lâmina infinitamente grande. Considerando, que a intensidade do campo de algumas cargas é igual à soma das intensidades criadas por cada uma destas cargas e utilizando as soluções dos problemas 413 e 424, obtemos o valor da força procurada:

$$F = \frac{qQ}{2\epsilon_0 ab} - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}.$$

O primeiro termo corresponde à força de repulsão, o segundo, à força de atração. A lâmina carregada positivamente, atrairá uma carga pontual positiva, se $Q^2/16\pi\epsilon_0 a^2 > qQ/2\epsilon_0 ab$, i.é., se $Q/a^2 > 8\pi q/ab$.

435. Fora da esfera o potencial é $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 r = R^2\rho/3\epsilon_0 r$. A fim de determinarmos o potencial dentro da esfera, (para $r < R$), é necessário adicionar ao potencial $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ uma grandeza numericamente igual ao trabalho realizado pelo campo sobre uma carga unitária positiva no deslocamento radial da mesma de r até R . Este trabalho é igual à área quadriculada na fig. 424 (ver o problema 428). Calculando, obtemos, que $\varphi = 13R^2 - r^2/6\epsilon_0$.
436. Todos os pontos da esfera têm um mesmo potencial. Para solucionar o problema é suficiente determinar o potencial de um ponto. Para isso é preciso determinar o potencial do centro da esfera. Ele é igual ao potencial criado no centro da esfera por uma carga pontual $q = q/4\pi\epsilon_0 a$, mais o potencial, criado pelas cargas que surgem na superfície da esfera, como consequência da indução eletrostática. Mas este último potencial é igual a zero, uma vez que a carga resultante na esfera é igual a zero e os elementos das superfícies encontram-se a uma mesma distância do centro. Consequentemente, o potencial da esfera é $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 a$.
437. O potencial da esfera φ é igual a:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q}{R-r} - \frac{Q}{r} \right).$$

Uma vez que a esfera está ligada à terra, o potencial da mesma é igual a zero, i.é., $q(R-r) + Qr = 0$. Consequentemente,

$$Q = \frac{r}{R-r} q.$$

438. Na parte mais estreita do tubo surgirão cargas induzidas positivas. Sob a ação das mesmas, o elétron começará a deslocar-se. A energia cinética do elétron aumentará às custas da diminuição da energia potencial do sistema elétrico — tubo.

$$439. q = -Q \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \frac{R_1}{R^2}.$$

440. Para o equilíbrio a carga q é necessária que esteja longe da superfície encontrando-a à igual distância a da mesma que Q . A soma das forças que agem na carga q , também, é igual a zero:

$$Q^2/a^2 + q^2/a^2 = 0,$$

donde $q = -Q/4$. A distância a pode ser qualquer, o equilíbrio é instável, uma vez que no deslocamento da carga $-Q$ ao longo de OO_1 , no segmento x da carga q a força de atração $F_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(x-x')^2}$, que age de parte da carga q , é menor do que a força de repulsão:

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2a+x)^2}$$

a a carga $-Q$ irá ainda mais longe da posição de equilíbrio. Ao deslocarmos a carga $-q$ ao longo de OD , na distância x , em direção à carga q , então, $F_1 > F_2$ para $x \ll a$ e o sistema não volta à posição de equilíbrio. O equilíbrio, portanto, é violado, como vê-se facilmente pelo deslocamento arbitrário da carga q .

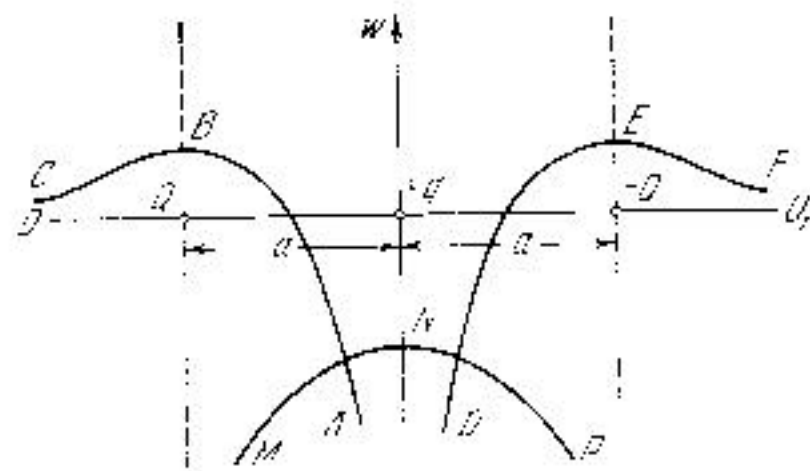


Fig. 426

A energia potencial da carga $-q$ no campo de duas outras cargas é igual a:

$$W_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{y} - \frac{Q}{a-y} \right) = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{ay-a}{y(a+y)},$$

onde y é a distância entre a carga q e uma das cargas $-Q$. A dependência de W_1 em relação a y para $0 < y < \infty$, está representada pela curva ABC para uma carga q , e pela curva DEF , para a outra carga (Fig. 426).

A energia da carga q , estando as cargas $-Q$ imóveis, é igual a:

$$W_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{a-z} - \frac{Q}{a-z} \right) = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^2-z^2},$$

onde z é o deslocamento da carga q na posição de equilíbrio. Ao deslocarmos a de 0 até a , a energia varia de acordo com a curva MNP (Fig. 426).

É característico, que os máximos de todas as três curvas potenciais correspondam à posição das cargas em equilíbrio. Precisamente com isto está relacionada instabilidade do equilíbrio.

441. Não, não se pode. A fim de que uma carga positiva encontre-se em equilíbrio estável, é necessário que, no deslocamento da carga em qualquer direção, atue sobre ele uma força, com que a carga volte à posição de equilíbrio. Consequentemente, as linhas do campo elétrico convergem no ponto, em que está localizada a carga. Mas as linhas de força do campo elétrico, começam nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas. No ponto onde

foi colocada, a carga considerada, não existem cargas negativas e, consequentemente, as linhas de força do campo externo relativamente à carga, não podem convergir no ponto, onde a mesma está localizada.

442. A energia da esfera carregada é igual ao trabalho, que podem realizar as cargas, que se encontram na esfera, se as mesmas abandonarem a esfera, distanciando-se infinitamente. Suponhamos, que da esfera cada vez distancia-se infinitamente uma porção de carga de q unidades ($q \ll Q$). Ao distanciar-se a n -ésima porção, a carga da esfera tornar-se-á igual a $(Q - nq)$, e o campo elétrico realizará um trabalho igual a:

$$\Delta A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q - nq)}{R} q.$$

O trabalho realizado no distanciamento de N porções da carga, onde $N = Q/q$ é igual a:

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R} q + \frac{Q-2q}{R} q + \frac{Q-3q}{R} q + \dots + \frac{Q-Nq}{R} q \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q^2}{2R} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right].$$

Fera $N \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 0$) $A = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$. Consequentemente, a energia da esfera carregada é: $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$ (Esta energia denomina-se energia própria). O mesmo resultado pode ser obtido, utilizando o gráfico de variação do potencial da esfera, em relação à diminuição da carga. O gráfico terá a forma de uma linha reta, que forma um ângulo qualquer com o eixo das abscissas, e o trabalho será numericamente igual à área, limitada pelo gráfico e pelos eixos das coordenadas.

443. A energia de todo o sistema de cargas é igual a soma das energias próprias das cargas, que se encontram na primeira esfera ($W_1 = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}$) e na segunda esfera ($W_2 = \frac{Q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$), assim como, da energia de interação das cargas da primeira esfera, com as cargas da segunda. A energia de interação é igual ao produto da carga Q_2 pelo potencial criado na superfície da esfera de raio R_2 pela carga Q_1 . Deste modo, a energia procurada W de todo o sistema é igual a:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1^2}{2R_1} + \frac{Q_2^2}{2R_2} + Q_2 \left(\frac{Q_1}{R_2} \right) \right].$$

No caso, em que $Q_1 = Q_2 = Q$ (condensador esférico), teremos:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

444. $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{2r_1} + \frac{q_2^2}{2r_2} + \dots + \frac{q_n^2}{2r_n} + q_1 \times \left(\frac{q_2}{r_2} \right) + q_2 \left(\frac{q_1 + q_2}{r_3} \right) + \dots + q_n \left(\frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}}{r_n} \right) \right].$

445. Como sempre, consideramos o potencial no infinito igual a zero. Então, os potenciais nas lâminas serão iguais, correspondentemente, a $(-U/2)$ e $(-U/2)$, sendo que $U = Q/C$. Os potenciais, nos pontos da posição inicial do elétron, são iguais correspondentemente a $0, -U/4, -U/4$. Os valores iniciais da energia total do elétron são iguais a:

$$1) \frac{mv_0^2}{2}, \quad 2) \frac{mv_0^2}{2} - \frac{eU}{4}, \quad 3) \frac{mv_0^2}{2} - \frac{eU}{4}.$$

As velocidades finais v_1, v_2, v_3 determinam-se, utilizando a lei de conservação da energia:

$$1) \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad v_1 = v_0;$$

$$2) \frac{mv_2^2}{2} - \frac{eU}{4} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{mv_0^2 + eU/2}{m}};$$

$$3) \frac{mv_3^2}{2} - \frac{eU}{4} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{mv_0^2 + eU/2}{m}}.$$

No primeiro caso, a velocidade final é igual à velocidade inicial. No segundo caso, é menor do que a velocidade inicial e no terceiro caso, é maior do que a inicial. Em todos os casos, a velocidade inicialmente aumenta (no período de movimento dentro do condensador) e depois começa a diminuir.

446. A distância entre as cargas tornar-se-á mínima, no momento em que as velocidades das mesmas tornarem-se iguais, i.é., no momento em que a velocidade relativa das cargas for igual a zero. É evidente, que a velocidade das cargas, para uma distância mínima entre as mesmas, de acordo com a lei de conservação do impulso é igual a $v = (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2)$. Utilizando a lei de conservação da energia, podemos escrever:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

e determinamos a distância mínima r_2 entre as cargas, que é igual a:

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - \frac{2\pi\epsilon_0 q_1 q_2}{(m_1 + m_2) \cdot \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}}},$$

447. A energia de interação é igual à metade da energia de interação de duas cargas pontuais $+q$ e $-q$, que se encontram a uma distância igual a $2a$, i.é.,

$$W = -\frac{1}{2} \frac{2q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$

A velocidade é determinada pela lei de conservação da energia. Quando a carga encontra-se a uma distância infinitamente grande da lâmina, a velocidade da mesma é igual a zero e a energia de interação W também é igual a zero. Deste modo, então, temos

que:

$$\frac{mv^2}{2} = \left(-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \right) - \frac{mv_0^2}{2} = \left(-\frac{q^2}{\infty} \right),$$

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 md}}.$$

448. O trabalho para o deslocamento da carga $-q$ é proporcional à diferença de potenciais entre o ponto O e o ponto A , que se encontra no eixo do anel a uma distância muito grande do mesmo (fig. 166). O potencial no infinito é igual a zero. O potencial no ponto A , se a distância $OA \gg R$, poderemos considerar igual a zero. O potencial no ponto O é determinado pela soma dos potenciais, criados por seções parciais do anel:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Utilizando a lei de conservação da energia sob $2 = 4\pi\epsilon_0 R$, determinamos que $v = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m R}}$.

449. A energia total da carga é igual a $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}$. Se $W \gg 0$, a carga deslocar-se-á para o infinito. Se $W = 0$, a velocidade da carga, a uma distância infinitamente grande do centro do anel, será igual a zero e se $W > 0$ será diferente de zero. Se $W < 0$, então, a carga realizará um movimento periódico ao longo do eixo do anel. A maior distância r , na qual poderá deslocar-se a carga desde o centro do anel, pode ser determinada, utilizando a lei de conservação da energia:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r^2}},$$

$$r = R \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi\epsilon_0 mv^2 R}{qQ} - 1 \right)^2} - 1}.$$

450. A energia da esfera carregada é $W = Q^2 / 8\pi\epsilon_0 R = 2\pi\epsilon_0 R q^2$, onde R é o raio da esfera e q é o potencial da mesma. No processo da descarga esta energia é irradiada em forma de calor. Calculando, determinamos, que $W = 0,55$ J.

451. Suponhamos, que inicialmente as cargas das esferas fossem q_1 e q_2 . Então, o trabalho é $A_1 = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 l$, onde l é a distância entre as esferas. As cargas das esferas, depois de terem sido ligadas, tornam-se iguais: $q = (q_1 + q_2)/2$ e o trabalho é $A_2 = \frac{1}{2} (q_1 + q_2)^2 / 4\pi\epsilon_0 l$. Não é difícil verificar, que $A_2 > A_1$. Além disso, no arame que une as cargas, é irradiada uma quantidade de calor Q . Entretanto, a reserva total da energia das esferas, segundo a lei de conservação da energia, deverá ser igual em ambos os casos. Uma vez que o trabalho A_1 e, correspondentemente, A_2 , representa a energia potencial da segunda esfera, no campo da primeira (no primeiro e no segundo casos), então, temos que:

$$A_1 + W_1 = A_2 + Q + W_2, \text{ onde } W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2r} + \frac{q_2^2}{2r} \right) + \dots$$

energia própria das esferas até o momento da união. $W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{2r} - \frac{q^2}{2r} \right)$ a energia própria das esferas, depois da redistribuição das cargas (ver o problema 442). A energia calorífica é igual a:

$$Q = W_1 - W_2 = A_1 - A_2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right).$$

452. Suponhamos, que o raio do envoltório aumentou em δ , onde δ é uma grandeza infinitamente pequena. Então, a força de distensão realizará um trabalho $A = 4\pi R^2 \delta$, onde f é a força que atua em uma unidade de área. Este trabalho é realizado graças à diminuição da energia eletrostática. Inicialmente, a energia eletrostática é igual a: $Q^2/8\pi\epsilon_0 R$; depois da distensão é: $Q^2/8\pi\epsilon_0 (R + \delta)$. A variação da energia é igual a:

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 (R + \delta)} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{R(R + \delta)}$$

e é igual ao trabalho A , i.é., $4\pi R^2 \delta = Q^2 \delta / 8\pi\epsilon_0 R (R + \delta)$. Considerando, que a grandeza δ é infinitamente pequena, obtemos para

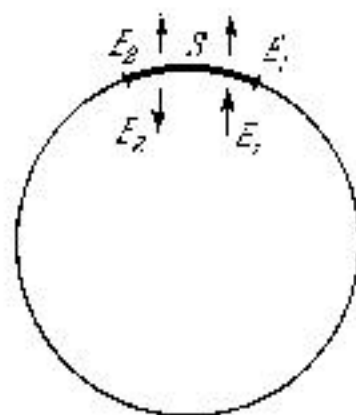


Fig. 427

a força a seguinte expressão: $f = q^2/22\pi^2\epsilon_0 R^2 = \sigma^2/2\epsilon_0$, onde $\sigma = Q/4\pi R^2$ simboliza a densidade de eletricidade, i.é., a carga existente em uma unidade de área.

Podemos determinar a força procurada de imediato. Tomemos na esfera uma pequena área S (fig. 427). Determinemos a intensidade E_1 do campo elétrico na área examinada, criada por todas as cargas, com exceção das cargas, que se encontram na própria área. Para a determinação, examinemos o caso, em que a esfera possui carga positiva. Simbolizemos por E_2 a intensidade do campo elétrico, criada pelas cargas, que se encontram na área analisada. Uma vez, que dentro da esfera a intensidade resultante é igual a zero, então, $E_1 = E_2$. A intensidade resultante na esfera é $E_1 + E_2 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$. Consequentemente, $2E_1 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$, donde $E_1 = \sigma/2\epsilon_0$. Para determinar a força, com que todas as cargas que se encontram fora dos limites da área, atuam sobre as cargas que se encontram na área, é necessário multiplicar a intensidade E_1 pela grandeza da carga elétrica

da área σS : $F = E_1 \sigma S = \sigma^2 S / 2\epsilon_0$. A força, que atua em uma unidade de área, será igual a $f = \sigma^2 / 2\epsilon_0$.

453. $Q < 8\pi R \sqrt{\epsilon_0 R U}$.

454. Suponhamos, que a diferença de potenciais nos terminais da bateria seja igual a U e a carga da bateria seja igual a Q . Determinar a capacidade da bateria significa determinar a capacidade

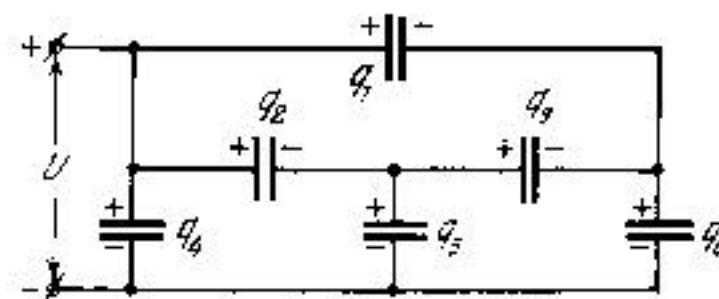


Fig. 428

de um condensador qualquer, que tenha uma tensão U para a mesma carga Q nas placas, como ocorre na bateria. Consequentemente, $Q_0 = Q$, sendo $U = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = q_0$ (fig. 428), e $Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = q_0$. O trabalho das forças do campo eletrostático, na passagem pelo circuito fechado, é igual a zero, donde, temos que:

$$q_1' C + q_2' C + q_3' C = 0, \quad q_2' C = q_4' C + q_5' C = 0, \\ q_4' C + q_5' C + q_3' C = 0$$

Além disso, o condutor que une o segundo, terceiro e quinto condensadores, é eletricamente neutro. Consequentemente, $q_1' =$

$q_2' = q_3' = 0$. Resolvendo estas equações, obtemos que $q_1' = -q_4' = q_5' = q_3' = 0$ e finalmente $q = 2C$.

455. Suponhamos, que as baterias dos condensadores estejam carregadas. Então, os pontos 1, 2 e 3 terão um mesmo potencial e poderão ser unidos entre si. Da mesma maneira, poderão ser unidos os pontos 4, 5, 6 (fig. 429). Como resultado, obteremos um esquema equivalente, que está representado na fig. 429. A capacidade dos quatro

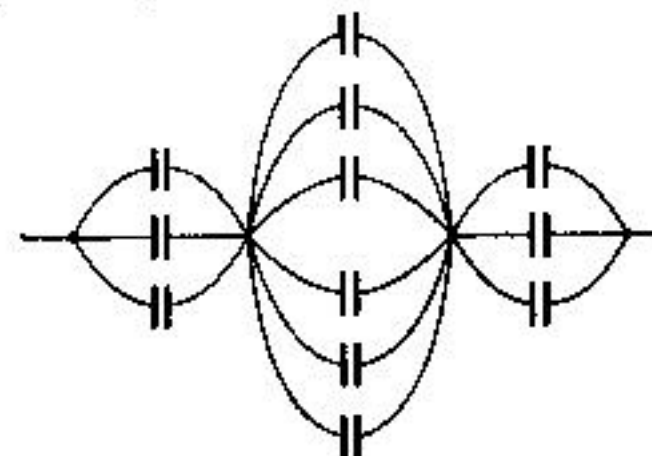


Fig. 429

do esquema é $3C$, $6C$, $3C$. A capacitância total é determinada pela fórmula $1/C_0 = 2/3C = 1/6C$, donde $C_0 = 1,2C$.

456. Quando ocorre a descarga nos intervalos disruptivos, intermediárias faz-se, automaticamente, a ligação em série dos condensadores, que estavam ligados paralelamente. Então, verifica-se que a tensão entre as placas correspondentes dos condensadores aumenta, uma vez que a capacidade do sistema diminui. Realmente, graças à grande resistência dos condutores AB e CD , pode-se desprezar as correntes que passam pelos mesmos no período da descarga e considerá-los como isolantes, através dos quais os condensadores não se descarregam.

O esquema equivalente, depois da descarga do primeiro intervalo disruptivo, está representado na fig. 430. Como resultado da descarga do primeiro intervalo, a diferença de potenciais no segundo será igual à soma das tensões no primeiro e no segundo condensadores, i. e., duplicar-se-á. Como consequência disto, começa a descarga do segundo intervalo. No instante de descarga do mesmo intervalo, a tensão no mesmo terá um valor $U = 2U_0$. As resistências dos condutores AB e CD deverão ser grandes, a fim de que no instante da ligação em série das lâminas dos condensadores, durante a descarga dos intervalos, os condensadores não se descarreguem através destes condutores.

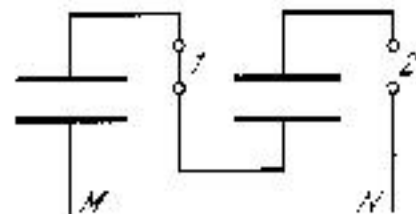


Fig. 430

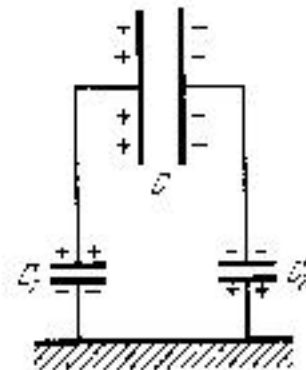


Fig. 431

457. Sim, descarregar-se-á. Cada uma das lâminas possui uma determinada, comumente não muito grande, capacidade relativamente à terra (nas proximidades das bordas das lâminas, as linhas de força mudam de direção e atingem a terra). O esquema equivalente está representado na fig. 431. A capacitância das lâminas do condensador, relativamente à terra, está representada em forma das pequenas capacidades C_1 e C_2 . Ao fecharmos a lâmina esquerda, neutraliza-se a parte da carga que se encontra na mesma. O mesmo ocorre ao fecharmos a lâmina direita. O condensador descarregará tanto mais lentamente, quanto maior for a capacidade do mesmo, em comparação com a capacidade da lâmina relativamente à terra.

458. A energia total dos dois condensadores até o momento de união é igual a:

$$W_0 = \frac{1}{2} (C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2).$$

depois da ligação é:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{C_1 + C_2}.$$

Demonstra-se, facilmente, que: $W_0 > W$. A diferença de energias

$$W_0 - W = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1^2 + U_2^2 - 2U_1 U_2 > 0)$$

para $U_1 = U_2$, $W_0 - W = 0$ e para $C_1 = C_2$ e $U_2 = 0$, W_0 .

$2W$. A energia eletrostática diminui, em consequência da ligação destes condensadores perdas, uma vez que as cargas passarão de um condensador a outro. Nos condutores que unem os condensadores dissipam-se calor. A quantidade de calor irradiado, não depende da resistência dos fios de ligação. Para uma pequena resistência dos fios, nos mesmos passarão maiores correntes e inversamente.

459. Consideremos, para maior simplicidade, um dielétrico em forma de paralelepípedo homogêneo, fortemente esticado (fig. 432). Decomponhamos o campo E_0 , no qual encontra-se o dielétrico, em

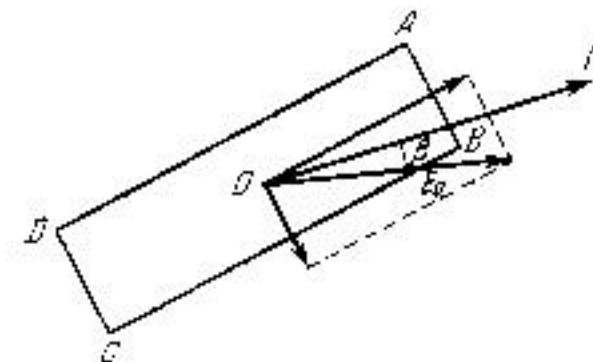


Fig. 432

componentes dirigidas ao longo da barra e perpendicular à mesma. Estas componentes provocam o surgimento de cargas ligadas às superfícies AB , CD , BC e AD . O campo destas cargas ligadas entre as superfícies AD , BC e AB , CD , enfraquece as componentes do campo E_0 dentro do dielétrico, sendo que a componente perpendicular à barra, enfraquece mais, uma vez, que as cargas ligadas nas superfícies AD e BC , estão distribuídas próximas uma da outra e o campo das mesmas é semelhante ao campo homogêneo de um condensador plano, ao mesmo tempo, que as cargas localizadas nas superfícies de pequena área, estão longe uma da outra. Por isso, o campo resultante dentro do dielétrico não terá a mesma direção que o campo E_0 . Consequentemente, os dipolos criados estarão orientados não ao longo de E_0 , mas ao longo de uma direção qualquer OP , que forma um ângulo β com E_0 . (Isto refere-se tanto às moléculas comuns como às moléculas dipolares.)

No que se refere às propriedades elétricas, o dielétrico polarizado pode ser considerado como um grande dipolo, que forma um ângulo β com o campo E_0 . Neste campo ele girará até o momento, em que não pare ao longo do campo. O campo das cargas ligadas é uma força interna e não pode provocar o giro do dielétrico.

460. Como consequência da polarização, as cargas afastam-se. Dentro da esfera com centro O' mantêm-se cargas negativas, e com centro O cargas positivas. A densidade volumétrica das cargas é $\rho = -Nq$. A distância entre os centros O' e O é igual a l . A intensidade em um ponto arbitrário, que se encontra na região encoberta entre as duas esferas, pode ser determinada através de uma simples construção geométrica, representada na fig. 432. Desta construção

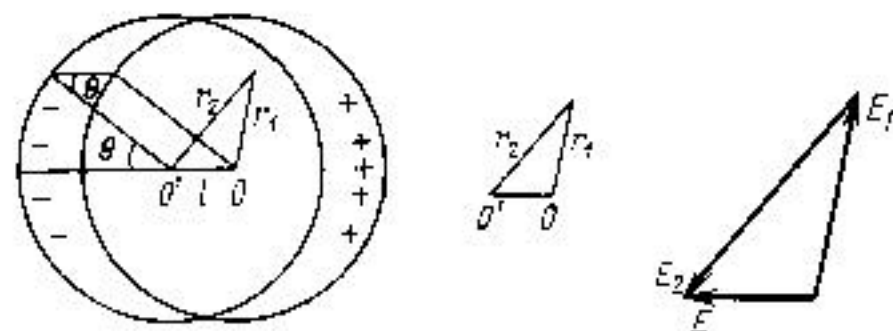


Fig. 432

deduz-se, que a intensidade é $E = p/3\epsilon_0$. Ela é constante e dirigida em sentido oposto ao vetor p . Este campo homogêneo é, em essência, criado pelas cargas negativas e positivas, que se encontram fora da região encoberta. Uma vez que $l \approx 10^{-8}$ cm ($l \ll R$) então, podemos considerar, que este campo é criado pelas cargas superficiais, cuja densidade é igual a:

$$\sigma = Nql \cos \theta = Np \cos \theta.$$

461. Não é difícil verificar, que o dielétrico estará polarizado homogeneamente e que o momento dipolar p de qualquer molécula, estará dirigido ao longo do campo externo. O campo resultante dentro do dielétrico possui uma intensidade $E' = E - Np/3\epsilon_0$. Uma vez que $p = \alpha\epsilon_0 E'$, onde α é o coeficiente de polarização da molécula, então, $p = \alpha\epsilon_0 E'(1 + N\alpha/3)$, $E' = E/(1 + \alpha N/3)$. Se considerarmos $\epsilon = 1 + N\alpha$, então, obtemos, finalmente, para E' uma expressão da seguinte forma:

$$E' = \frac{3}{2 + \epsilon} E.$$

O campo fora da esfera, criado pelo dielétrico polarizado, é equivalente ao campo de duas cargas pontuais ($-Q$) e ($+Q$) ($Q = 4/3\pi R^3 Nq$), localizadas nos pontos O' e O . Uma vez, que a distância $O'O = l \ll R$ ($l \approx 10^{-8}$ cm), então, para o cálculo da intensidade resultante nos pontos A , B , C e D , pode ser utilizada

a resposta do problema 420:

$$E_A = E_C = E + \frac{2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{4}{3} \pi R^3 Nq l = \frac{3\epsilon}{\epsilon + 2} E,$$

$$E_B = E_D = E - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{4}{3} \pi R^3 Nq l = \frac{3}{\epsilon + 2} E.$$

462. A densidade superficial de cargas varia na esfera, segundo a lei $\sigma = 3E\epsilon_0 \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre o raio vetor e vetor ($-E$).

463. $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\epsilon_0 E \cos \theta,$

$$\begin{aligned} E_A = E_C = E + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{4}{3} \pi R^3 Np \cos \theta &= 3E + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \\ E_B = E_D = E - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{3\epsilon_0 E}{3\epsilon_1} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \end{aligned}$$

464. $E = Np/2\epsilon_0.$

465. $E' = \frac{2}{\epsilon + 1} E.$

$$E_A = E_C = E + \frac{R^2 Nq}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + l} \right) =$$

$$= E + R^2 \frac{Nq l}{2\epsilon_0} \frac{1}{R(R + l)} = E + \frac{Np}{2\epsilon_0},$$

$$Np = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E' = 2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \epsilon_0 E,$$

$$E_A = E_C = E + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} E = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} E,$$

$$E_B = E_D = E - \frac{2\pi R^2 Nq l}{4\pi\epsilon_0 R^2} = E - \frac{Np}{2\epsilon_0} =$$

$$= E - (\epsilon - 1) \frac{E}{\epsilon + 1} = \frac{2}{\epsilon + 1} E.$$

466. $\sigma = 2\epsilon_0 E \cos \theta = \pi/2\pi R.$

$$E_A = E_C = \pi/2\pi\epsilon_0 R = 2E, \quad E_B = E_D = \pi/2\pi\epsilon_0 R.$$

467. O campo no dielétrico é criado pela carga q e pela carga de polarização q' . A intensidade do campo, em um ponto arbitrário A , que se encontra fora da esfera a uma distância r do centro da mesma, é igual a:

$$E = \left(\frac{q}{r^2} + \frac{q'}{r^2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

A intensidade E está ligada à intensidade E_0 , do campo criado no vácuo pela carga q através da relação:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Consequentemente:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{r'^2} \right) = \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0};$$

donde temos que: $q' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q$.

468. Simbolizemos por q a grandeza das cargas polarizadas. Aplicando o princípio da superposição, obteremos para $r > r_2$:

$$E = \left[\left(\frac{Q}{r^2} \right) - \left(\frac{-q}{r^2} \right) + \frac{q}{r^2} \right] \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$q = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} - \frac{q}{r} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Para $r_1 < r < r_2$:

$$E = \left(\frac{Q}{r^2} - \frac{q}{r^2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1)$$

$$q = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} - \frac{q}{r_2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Das equações (1) deduzimos, que $q = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} Q$. Consequentemente, na região $r_1 < r < r_2$ teremos que:

$$q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\epsilon r} - \frac{Q(\epsilon - 1)}{\epsilon r_2} \right].$$

Para $r < r_1$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$q = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} - \frac{Q(\epsilon - 1)}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \right].$$

469. A intensidade do campo no espaço entre as esferas, é igual a:

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2 4\pi\epsilon_0} = \left(\frac{Q}{r^2} - \frac{q}{r^2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

donde $q = Q(\epsilon - 1)/\epsilon$. Consequentemente, a densidade será

$$\sigma_1 = \frac{Q(\epsilon - 1)}{4\pi r_1^2 \epsilon}, \quad \sigma_2 = \frac{Q(\epsilon - 1)}{4\pi r_2^2 \epsilon}.$$

Não existe campo fora da esfera: $E = 0$; $\varphi = 0$.
O potencial φ na região $r_1 < r < r_2$ é igual a:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}.$$

Da última expressão determinamos facilmente a diferença de potenciais das esferas:

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{Q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}.$$

Consequentemente, a capacidade que é o coeficiente de proporcionalidade entre a carga e a diferença de potenciais das lâminas do condensador, é igual a:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

470. a) A capacidade do condensador será igual à capacidade dos condensadores unidos paralelamente, um dos quais está cheio de dielétrico e o outro não, i.é.,

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S l_1}{d l} + \frac{S(l - l_1) \epsilon_0}{d l} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \left\{ 1 + \epsilon - 1 + \frac{l_1}{l} \right\}.$$

b) O campo elétrico entre as placas do condensador não varia, e, consequentemente, não variará a capacidade, se a superfície superior do dielétrico for coberta com uma camada suficientemente fina de um fio. Por isso, a capacidade procurada será igual à capacidade de dois condensadores unidos em série:

$$C = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1}, \quad \text{onde } C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1} \quad \text{e } C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_1}.$$

e, consequentemente:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_1 + \epsilon(d - d_1)}.$$

471. A densidade das cargas polarizadas é igual a:

$$\sigma = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{q}{S}.$$

472. Simbolizemos por E intensidade do campo procurada no dielétrico. A distância k , na qual afastaram-se as cargas em cada molécula, determina-se da relação $k\lambda = qF$. Consequentemente:

$$E_1 = \sigma_1 / \epsilon_0 = \frac{q\lambda n}{\epsilon_0} = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 k} E,$$

$$E = E_0 - E_1 = E_0 - \frac{q^2 n}{\epsilon_0 k} E.$$

A permeabilidade dielétrica é determinada da relação $E = E_0 / \epsilon$, donde: $\epsilon - 1 = \frac{q^2 n}{\epsilon_0 k}$.

473. As cargas $-q$ e $-q$ ao afastarem-se na molécula até uma distância λ , realizam um trabalho igual a $k\lambda^2/2$. A energia armazenada no dielétrico é $W_1 = (k\lambda^2/2) N$, onde $N = \Delta n = Vn$ é o número de moléculas em um volume V do dielétrico, que se encontra entre as placas do condensador. Deste modo, temos que $W_1 = n(k\lambda^2/2) V$. Uma vez que $\lambda = qE/k$, então, $W_1 = n(q^2 E^2/2k) V$. Expressando q^2/k , através de ϵ , ($\epsilon - 1 = q^2 n/\epsilon_0 k$) obtemos para W_1 o valor:

$$W_1 = \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{2} E^2 V.$$

A energia total do condensador é igual a:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} E^2 V.$$

A energia total W pode ser expressa como a soma da energia eletrostática $W_2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V$ e da energia acumulada no dielétrico

$$W_1 = \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{2} E^2 V.$$

474. A força que age em uma área unitária do dielétrico é igual a:

$$p = - \frac{q^2 - 1}{8\pi\epsilon_0^2 \lambda^2} (q_1^2 - q_2^2).$$

475. Suponhamos para simplificar que duas lâminas metálicas paralelas, portadoras de cargas $+Q$ e $-Q$, foram submersas em um dielétrico líquido. A intensidade do campo elétrico entre as lâminas é $E = Q/\epsilon_0 S$. A intensidade do campo, criado por cada lâmina, será igual a $E_1 = E_2 = Q/2\epsilon_0 S$.

Determinemos a força, com que age a primeira lâmina sobre a segunda. Para isto é necessário multiplicar a intensidade do campo, criada pela primeira lâmina, pela grandeza da carga, que se encontra na segunda lâmina. Deste modo $F = Q^2/2\epsilon_0 S$.

Suponhamos, que a primeira lâmina está fixa e a segunda pode mover-se muito lentamente (a variação da energia mecânica do dielétrico pode ser desprezada). O trabalho, que pode ser realizado pelo campo elétrico, no deslocamento da lâmina até o contato, é igual ao produto da força F (a força F é constante) pela grandeza do deslocamento d , i.e., $A = Fd = Q^2 d/2\epsilon_0 S$. Este trabalho é realizado, graças à diminuição da energia elétrica do condensador. Deste modo, a energia eletrostática será igual a:

$$W = Q^2 d/2\epsilon_0 S = Q^2/2C \quad \text{ou} \quad W = QU/2,$$

onde U é a diferença de potenciais. A fórmula obtida é válida para qualquer dielétrico.

476. A energia do condensador, no caso em que o dielétrico deslocasse em uma distância x dentro do condensador, será igual a:

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{1}{1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l}},$$

uma vez que

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

(ver o problema 470). Se x aumentar em δ , então, a energia diminuirá e será igual a:

$$W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{1}{1 + (\epsilon - 1) \frac{x + \delta}{l}}.$$

A diferença de energias é:

$$W_1 - W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{(\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}}{\left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x + \delta}{l} \right\} \left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}}.$$

e será igual ao trabalho da força F exercida F no trajeto δ . Nesse trajeto o valor da força varia, pois, se o dielétrico δ é suficientemente pequeno, então, podemos escrever que:

$$W_1 - W_2 = F\delta.$$

Logo, concluímos:

$$F = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2dl} \frac{1}{\left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}^2},$$

se desprezarmos o no denominador. É conveniente lembrar que, se, para calcularmos a energia, nós consideramos, que o campo dentro do condensador é homogêneo e desprezamos os efeitos dos extremos, para a explicação física da força que age no dielétrico, é necessário, obrigatoriamente, considerar a heterogeneidade do campo nos extremos.

477. A energia do condensador, no caso em que o dielétrico atrevesse a em uma distância x dentro do condensador, será igual a:

$$W_1 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\epsilon_0 S}{d} \left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}$$

Se x aumenta em δ , então, a energia do condensador aumentará em:

$$W_2 - W_1 = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}.$$

A carga, nas placas do condensador, com o deslocamento do dielétrico em uma distância δ , aumentará em:

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\epsilon_0 U S}{d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}.$$

O trabalho realizado pela bateria no deslocamento desta quantidade de eletricidade será igual a:

$$A = (Q_2 - Q_1) U = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}.$$

Parte deste trabalho é utilizada para o aumento da energia eletrostática do condensador e parte no deslocamento do dielétrico. Simbolizemos por F , como no problema anterior, a força, com que o dielétrico desloca-se no condensador. Baseando-se na lei de conservação da energia, poderemos escrever, que: $\Delta = W_2 - W_1 = F\delta$, i.é.,

$$\frac{\epsilon_0 U^2 S}{d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l} = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l} + F\delta,$$

donde:

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{U^2 S}{d^2} (\epsilon - 1).$$

Como vemos, neste caso, a força é constante e não depende de x .

478. O líquido, entre as placas do condensador fig. 131, eleva-se sob

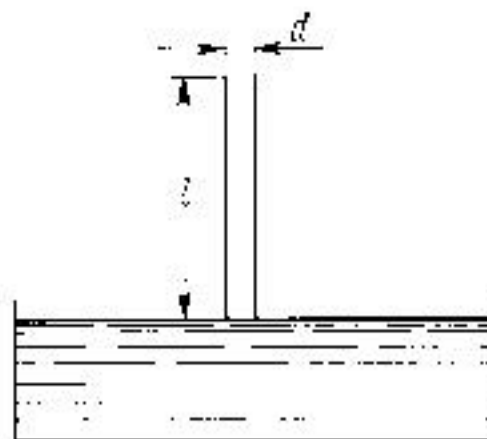


Fig. 131

a ação da força:

$$F = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d^2} (\epsilon - 1).$$

Quando o líquido atinge uma altura máxima H , a energia cinética do mesmo será igual a zero, e a energia potencial aumenta em uma grandeza FH . Da relação

$$FH = Sd \frac{H}{l} \rho g \frac{H}{2}$$

determinamos H :

$$H = \epsilon_0 U^2 (\epsilon - 1) d^2 \rho g.$$

Nesta posição a força de gravidade é maior do que a força F e, em consequência disto, o líquido começa a descer.

Para a altura da coluna do líquido igual a

$$h = H/2 = \epsilon_0 U^2 (\epsilon - 1) d^2 \rho g.$$

a energia cinética é máxima e a força F é igual à força de gravidade. O líquido entre as placas do condensador continua a descer, atingindo o nível do líquido no recipiente. O nível do líquido no recipiente, como consequência das grandes dimensões do mesmo, praticamente não varia. Deste modo, a altura da coluna varia, periodicamente, nos limites de 0 até H . Em consequência do atrito, a amplitude da oscilação do líquido diminuirá e o nível da coluna finalmente para à altura:

$$h = \epsilon_0 U^2 (\epsilon - 1) d^2 \rho g.$$

Medindo a altura de ascensão h , podemos determinar a permissividade dielétrica do líquido ϵ .

479. Uma carga livre $+Q$ cria no dielétrico um campo elétrico homogêneo, cuja intensidade é igual a $E = Q/2\epsilon_0 S$. Em consequência disto, a camada de dielétrico de espessura igual a d polariza-se. Nos dois planos, que limitam esta camada, superior e inferiormente, surgem cargas polarizadas. A densidade das cargas polarizadas σ_1 é igual a:

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{Q}{2S}.$$

As cargas Q e a carga negativa $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{Q}{2}$ atuam sobre a carga polarizada positiva que se encontra na superfície do líquido, com uma força F , dirigida para cima:

$$F = \frac{Q^2}{8S\epsilon_0} \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2}.$$

Consequentemente o nível do líquido sob a lâmina eleva-se a uma altura h :

$$h = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 \rho g S^2} \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2}.$$

§ 20. CORRENTE ELÉTRICA CONTÍNUA

480. Demonstremos, inicialmente, que a intensidade do campo elétrico em todos os pontos, que se localizam no plano da seção OO' , está dirigida perpendicularmente a este plano.

Tomemos, então, um ponto arbitrário no plano da seção e duas pequenas áreas, arbitrariamente, mas simetricamente distribuídas no cilindro, relativamente à seção OO' . Vemos, claramente, que a intensidade resultante do campo, criada pelas cargas nestas áreas, estará dirigida ao longo do eixo do cilindro (fig. 435). Uma vez, que para cada seção elementar encontramos outra seção elementar, localizada simetricamente em relação ao plano da seção, então, deduzimos, que a intensidade criada por todas as seções, estará dirigida paralelamente ao eixo do cilindro.

Demonstremos, agora, que a intensidade será a mesma em todos os pontos, os quais distanciam-se do eixo do cilindro, em uma mesma grandeza. Sejam A e B dois de tais pontos (fig. 436). A intensidade do campo dentro do cilindro não variará, se além as cargas já existentes, em cada área unitária da superfície do

cilindro, à mesma for transmitida uma carga negativa complementar, a fim de que a densidade das cargas no ponto C seja igual a zero. Isto é evidente, partindo do fato de que o campo, dentro

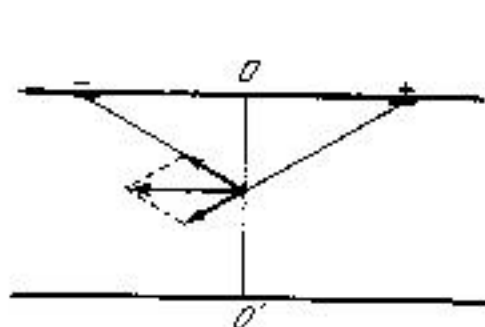


Fig. 435

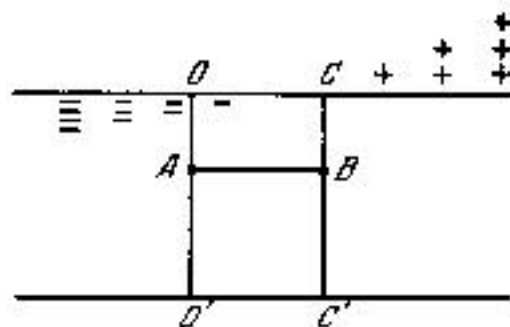


Fig. 436

de um cilindro infinito, carregado uniformemente é igual a zero. Neste caso, a distribuição da densidade de cargas, na superfície do cilindro (fig. 436), terá a mesma forma que na fig. 167. Consequentemente, a intensidade nos pontos A e B é a mesma.

Resta demonstrar, que a intensidade do campo nos pontos localizados à diferentes distâncias do eixo do cilindro é única. Para demonstrar isto, consideremos o circuito $BKLD$ (fig. 437). Como sabemos, o trabalho do campo eletrostático em um circuito fechado é igual a zero. O trabalho nos segmentos AL e DB é igual a zero, uma vez que a intensidade do campo é perpendicular ao trajeto, e trabalho no segmento BK é igual a $-E_B l$, e no segmento LD é igual a $E_D l$ (conforme a demonstração anterior $E_B = E_K$, $E_D = E_L$) e, conseqüentemente, $-E_B l + E_D l = 0$, i.e., $E_B = E_D$.

Deste modo, foi demonstrado, que a intensidade do campo elétrico dentro do cilindro será a mesma, em todos os pontos, e esta intensidade está dirigida ao longo do eixo do cilindro. Sublinhamos, que semelhante distribuição de carga, na superfície de um condutor, surge ao passar pelo mesmo uma corrente contínua.

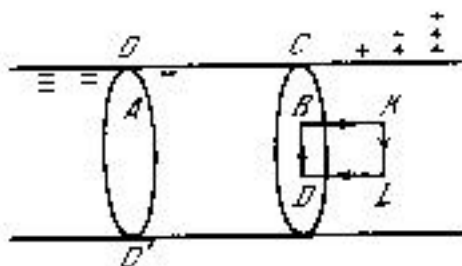


Fig. 437

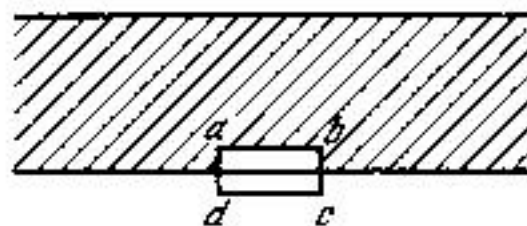


Fig. 438

481. Ao passar por um condutor uma corrente contínua, o campo elétrico dentro do condutor é constante e está dirigido ao longo do mesmo. O trabalho do campo elétrico, realizado no deslocamento da carga ao longo do circuito fechado $abcd$ (fig. 438) é igual a zero.

Os segmentos ad e bc consideremos tão pequenos, que possamos desprezar o trabalho nos mesmos. Isto significa, que o trabalho ao longo de ab é igual ao trabalho ao longo de dc . Por isso, a componente tangencial da intensidade do campo, nas proximidades da superfície do condutor, deverá ser igual à intensidade do campo dentro do mesmo.

482. A distribuição das linhas de forças está representada na fig. 439. O aumento da inclinação das linhas, próximo à curvatura, explica-se pelo fato, de que a componente tangencial da intensidade do campo, nas proximidades da superfície do condutor de seção constante, é constante, e a componente normal diminui, à medida que aproximamos da curvatura, uma vez, que a diferença de potenciais entre os setores correspondentes, que se encontram nos lados opostos do arco, diminui.

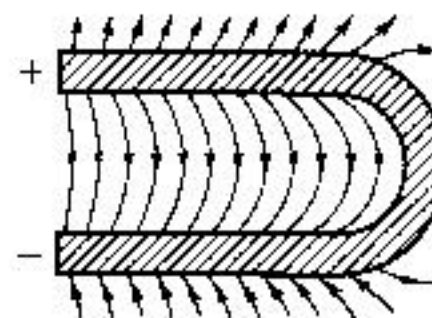


Fig. 439

483. Ao unirmos em série as resistências do circuito, temos que:

$$R = R_{01} + R_{02} + \alpha_1 R_{01} t + \alpha_2 R_{02} t.$$

Por outro lado, podemos escrever que: $R = R_0 (1 + \alpha' t)$, onde $R_0 = R_{01} + R_{02}$, e α' é o coeficiente de temperatura procurado, donde temos que:

$$\alpha' = \frac{R_{01} \alpha_1 + R_{02} \alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

Ao unirmos em paralelo, obtemos:

$$R = \frac{R_{01} R_{02} (1 + \alpha_1 t) (1 + \alpha_2 t)}{R_{01} (1 + \alpha_1 t) + R_{02} (1 + \alpha_2 t)} = R_0 (1 + \alpha' t),$$

onde $R_0 = R_{01} R_{02} / (R_{01} + R_{02})$. Desprezando os membros proporcionais aos produtos dos coeficientes térmicos, por serem pequenos, obtemos que:

$$\alpha' = \frac{R_{02} \alpha_1 + R_{01} \alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

484. Os pontos A e C têm um mesmo potencial, uma vez que o condutor, que os une, possui uma resistência desprezível. Iguais, também, são os potenciais dos pontos B e D . Por isso, os extremos

das resistências A , C e, correspondentemente B , D podemos considerar ligadas. Deste modo, as resistências AB , CB e CD estão

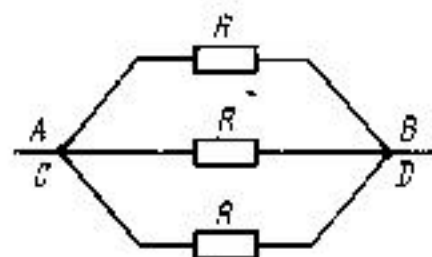


Fig. 440

ligadas paralelamente. O esquema equivalente, correspondente, está representado na fig. 440. A resistência total é igual a $R/3$.

485. Pela lei de Joule — Lentz, a quantidade de calor para uma determinada U , será maior, quanto menor for a resistência. A resistência mínima de um pedaço do fio, que pode ser ligado à rede com tensão U , é igual a $r = U/I_0$. O comprimento deste pedaço é igual a $l = (I/I_0)r = U/I_0 R$. Se cortarmos o fio em tais pedaços e ligá-los paralelamente, então, à cada um dos setores, será aplicada a maior tensão possível no esquema U , e, por cada um dos setores, passará a maior corrente possível I_0 . Por isso, em cada um dos segmentos, será irradiada a potência calorífica máxima igual a $q_0 = U^2/r = I_0^2 r = I_0 U$ e, em todos os setores, a potência $q = nq_0$, onde n é o maior número possível de pedaços do comprimento l , em que podemos cortar o fio, n é um número inteiro.

O resto do fio com comprimento menor do que l , se sobrar, deverá ser jogado fora, uma vez que se fizermos uma ligação em paralelo, através do mesmo, passará corrente maior do que I_0 e o fio queimar-se-á se fizermos uma ligação em série, com qualquer um dos demais pedaços, obteremos um pedaço com resistência maior do que r e no mesmo será irradiada uma quantidade de calor menor do que q_0 .

486. Devido à simetria, os pontos D e C têm um mesmo potencial. Não passa corrente pelo condutor DC , por isso podemos tirá-lo do circuito não variando a resistência geral do circuito, a qual, depois disto, é facilmente calculável e é igual a $r = R/2$.

487. Como consequência da simetria está claro que a corrente no condutor $1-7$ é igual à corrente no condutor $7-4$; a corrente no condutor $2-7$ é igual à corrente no condutor $7-3$, a corrente no condutor $6-7$ é igual à corrente no condutor $7-5$ (fig. 170). Em virtude disto, a distribuição das correntes e, consequentemente, a resistência do hexágono não variará, se desligarmos os condutores $2-7$, $7-3$, $6-7$ e $7-5$ do centro (fig. 441). A resistência deste circuito, que é equivalente à resistência do circuito inicial, pode ser, facilmente, calculada. A resistência da parte superior do circuito é igual a $8/3R$. A parte inferior possui a mesma resistência.

A resistência total R_x , determina-se da relação:

$$1/R_x = 1/2R + 8/8R,$$

onde $R_x = 4/5R$.

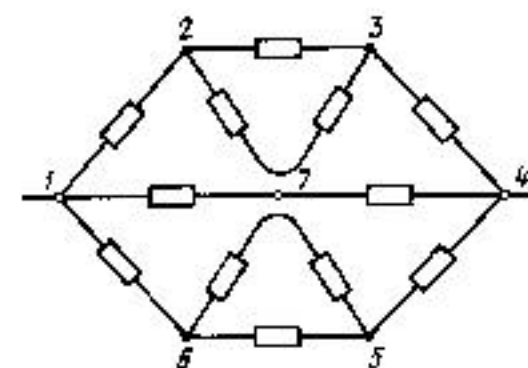


Fig. 441

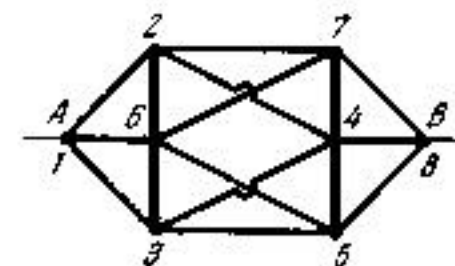


Fig. 442

488. Devido à simetria está claro que os potenciais dos vértices do cubo 2 , 3 e 6 são iguais. São iguais, também, os potenciais dos vértices 1 , 5 e 7 (fig. 171). Por isso, os vértices 2 , 3 , 6 e 1 , 5 , 7 nós podemos unir por condutores adicionais de resistência nula. A resistência do cubo não mudará por causa disto. Deste modo, os condutores adicionais são ligados um ao outro por seis condutores: $2-7$, $2-4$, $3-5$, $3-4$, $6-7$ e $6-5$. A resistência do circuito (fig. 442) é igual à resistência procurada do cubo:

$$R_x = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} = \frac{R}{3} + \frac{5}{6}R.$$

489. A resistência entre os pontos A e B é igual a:

$$R_{AB} = \frac{1}{2/(r_a + r_b) + 1/r_c} = \frac{(r_a + r_b)r_c}{r_a + r_b + 2r_c},$$

onde $r_a = \rho a/S$, $r_b = \rho b/S$, $r_c = \rho \sqrt{a^2 + b^2}/S$.

A resistência entre os pontos C e D é determinada, se considerarmos as correntes que passam pelos ramos do circuito (fig. 443).

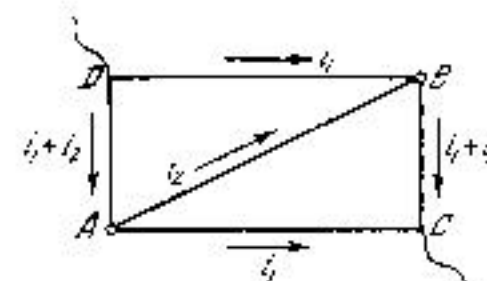


Fig. 443

Dos conceitos da simetria, é evidente que a corrente nos condutores DB e AC e, também, nos condutores AD e BC são iguais, correspondentemente, uma à outra, uma vez que a corrente no condutor AD é $i_1 + i_2$, e a soma das correntes no nó A é igual a zero. No setor DAC , temos que:

$$(i_1 + i_2)r_a + i_1r_c = U_{DC}.$$

e no setor $DABC$ que:

$$2(i_1 + i_2)r_0 + i_2 r_c = U_{DC},$$

donde:

$$i_1 = \frac{r_b + r_c}{2r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} U_{DC},$$

$$i_2 = \frac{r_b - r_a}{2r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} U_{DC}.$$

A resistência procurada será igual a:

$$R_{CD} = \frac{U_{CD}}{I} = \frac{U_{CD}}{2i_1 + i_2} = \frac{2r_a r_b + r_c(r_a + r_b)}{r_a + r_b + 2r_c}.$$

490. Se não passa corrente pelo galvanômetro, então, os potenciais nos pontos C e D são iguais e a corrente I_1 , que passa através da resistência R_x , é igual à corrente, que passa pela resistência R_0 , e a corrente I_2 , ao longo do ramo AB , é igual em todas as seções. Pela lei de Ohm, temos que:

$$I_1 R_x = I_2 \rho \cdot S, \quad I_1 R_0 = I_2 \rho \cdot S,$$

onde ρ é a resistência específica e S , a seção transversal do ramo AB , donde, concluímos, que: $R_x/R_0 = l_1/l_2$.

491. Entre os pontos C e D é necessário ligar tal resistência r , de modo que a resistência da última malha (fig. 444) seja igual a r . Neste caso, a última malha pode ser substituída pela resistência r , em seguida repetir o processo com a penúltima malha, etc. Então, a resistência total do circuito não dependerá do número de malhas e será igual a r . Para r podemos obter a equação: $(2R + r) \times \times R/(3R + r) = r$, donde $r = R(\sqrt{3} - 1) \approx 0,73R$.

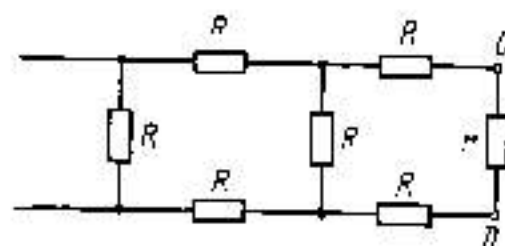


Fig. 444

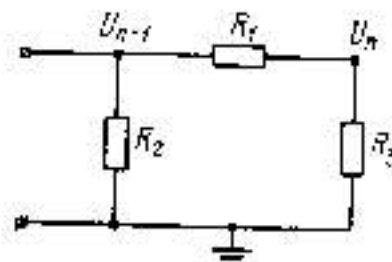


Fig. 445

492. A última malha é um divisor de tensão, que diminui o potencial do n -ésimo ponto, em comparação com o ponto $(n-1)$, em k vezes. Consequentemente, $U_n = \frac{U_{n-1}}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{U_{n-1}}{k}$, ou $R_1/R_2 = k-1$ (fig. 445). A relação $U_i = U_{i-1}/k$ deverá satisfazer qualquer malha. Por isso, a resistência da última malha, das duas últimas, das três, etc. também, deverão ser iguais a R_0 .

(ver o problema 491), donde:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3},$$

$$R_2 = \frac{R_3(R_1 + R_3)}{R_1} = R_3 \frac{k}{k-1},$$

e finalmente:

$$R_1 : R_2 : R_3 = (k-1)^2 : k : (k-1).$$

493. Não se pode utilizar, somente, os aparelhos, cujo princípio de funcionamento, está baseado na inclinação de um condutor com corrente, em um campo magnético. O ângulo, no qual deverá inclinar-se o indicador em tal aparelho, é proporcional à intensidade da corrente, que passa pelo aparelho. A determinação da diferença de potenciais, com auxílio de tal tipo de aparelho, que com o auxílio de qualquer medidor de correntes, está baseada na lei de Ohm: a corrente, que passa pelo voltmetro, é proporcional à diferença de potenciais aplicada. Para verificar-se a lei de Ohm, consequentemente, é necessário um voltmetro eletrostático juntamente com um amperímetro comum.
494. Simbolizemos por q_1 e q_2 as cargas, no primeiro e no segundo condensadores, no instante do tempo t . q_1 e q_2 estão ligadas pelas relações:

$$q_1 + q_2 = Q, \quad q_1 C_1 = q_2 C_2,$$

uma vez que:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 - vt}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 + vt}$$

então:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{d_0 + vt}{d_0 - vt},$$

donde deduzimos que:

$$q_1 = Q \frac{d_0 + vt}{2d_0}, \quad q_2 = Q \frac{d_0 - vt}{2d_0}.$$

A diminuição da carga no primeiro condensador é igual ao aumento da carga no segundo condensador. A intensidade da corrente é $I = -\Delta q_1/\Delta t = \Delta q_2/\Delta t = Qv/2d_0$. A corrente passará na direção da lâmina, carregada positivamente, do primeiro condensador, à lâmina, carregada positivamente, do segundo condensador.

495. As forças de atração, que atuam entre as lâminas dos condensadores, são iguais, correspondentemente a:

$$F_1 = \frac{q_1^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{Q^2 (d_0 + vt)^2}{8\epsilon_0 S d_0^2}$$

para o primeiro condensador e

$$F_2 = \frac{Q^2 (d_0 - vt)^2}{8\epsilon_0 S d_0^2}$$

para o segundo condensador (ver o problema 494). Uma vez que as lâminas do primeiro condensador movem-se, as forças do campo eletrostático realizam um trabalho negativo ΔA_1 . Estas forças realizam um trabalho positivo no segundo condensador igual a ΔA_2 . O trabalho ΔA , realizado pelo campo, no deslocamento de cada uma das lâminas, em uma pequena distância Δx , é igual a:

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = (F_2 - F_1) \Delta x = \\ = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \frac{x}{d_1} \Delta x,$$

onde $x = vt$. Deste modo, o trabalho, em um pequeno setor, é proporcional ao deslocamento x , como ocorre nas distensões de uma mola. Consequentemente, o trabalho total é igual a: $A = Q^2 d^2 / 4\epsilon_0 S d_0$.

O trabalho A pode ser calculado de outro modo. Uma vez que a resistência dos fios de ligação é igual a zero, a quantidade de calor irradiado, é, também, igual a zero. Por isso, a variação da energia eletrostática, de dois condensadores, será igual ao trabalho do campo eletrostático.

No instante de tempo t , as energias do primeiro e do segundo condensadores terão, correspondentemente, os seguintes valores:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S d_1^2} (d_0 - vt)^2 (d_0 + vt) \\ W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S d_2^2} (d_0 + vt)^2 (d_0 - vt).$$

A energia total será igual a:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 S d_0} (d_0^2 - v^2 t^2).$$

Consequentemente, a energia em um intervalo de tempo t diminuirá em uma grandeza igual a $Q^2 v^2 t^2 / 4\epsilon_0 S d_0$. Esta variação será igual ao trabalho A do campo eletrostático.

496. No atrito, existente entre a roupa e o assento da cadeira, ocorre a eletrização. O corpo do pesquisador e o assento formam um condensador especial. Quando o pesquisador levanta, a capacitância deste condensador diminui bruscamente, e, como consequência disto, eleva-se bruscamente a diferença de potenciais entre a cadeira (i.e. a terra) e o corpo do pesquisador. É evidente, que para isto, há necessidade de que o corpo esteja muito bem isolado da terra (sapato com sola de borracha).

No momento em que o físico toca a mesa, a diferença de potenciais entre a mão e a terra equilibra-se. Forma-se uma corrente elétrica, cuja parte insignificante passa para o galvanômetro. Para compensação da imagem, é necessário que a resistência entre um dos extremos da bobina do galvanômetro e a terra seja menor do que a resistência entre o outro extremo e a terra.

O esquema do circuito da corrente está representado na fig. 446. O é o enrolamento do galvanômetro; K é a chave de ligação; R mostra condicionalmente uma resistência muito grande, que

limita entre um dos extremos do enrolamento e a terra. O salto no galvanômetro é observado, apesar da enorme resistência do circuito, em virtude da grande diferença de potenciais, que surge ao diminuir a capacidade.

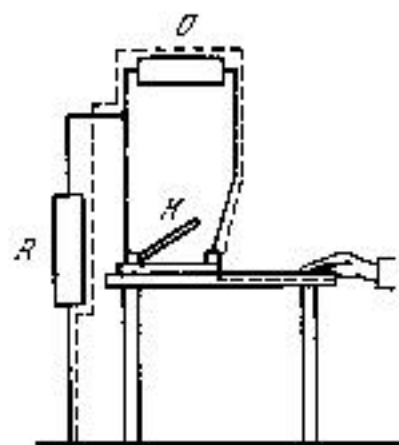


Fig. 446

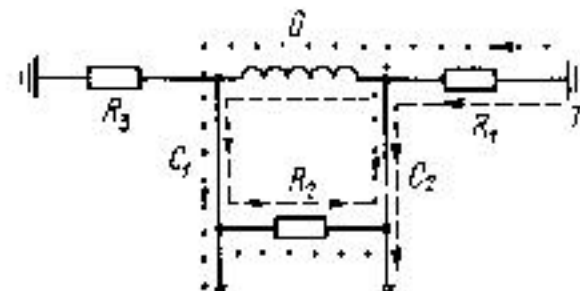


Fig. 447

497. Está claro que existe uma determinada assimetria entre os condutores, aos quais estão ligados os extremos do enrolamento do galvanômetro. Isto pode ocorrer, se a resistência do isolamento entre um dos extremos da bobina e a terra é menor, do que entre a terra e o outro extremo. Além disso, deve ser considerado que a resistência entre os condutores, que ligam a bobina ao galvanômetro, apesar do bom isolamento, é diferente de uma grandeza infinita. O esquema que explica a passagem da corrente, está representado na fig. 447. O é o enrolamento do galvanômetro; C_1 e C_2 são os condutores que saem dos extremos do enrolamento; T é a terra; R_1 , R_2 e R_3 representam, esquematicamente, uma resistência muito grande, mas limitada, que surge em virtude do isolamento não ser ideal; $R_3 \gg R_1 + R_2$. A linha pontilhada mostra o circuito da corrente, quando um corpo carregado negativamente foi levado ao condutor C_2 . Se o corpo for levado ao condutor C_1 , então, o circuito é representado por pontos. Vê-se, que, em ambos os casos, a corrente passa através do enrolamento em uma só direção.

Este problema demonstra a presença de condutibilidade em todos os corpos. Ao trabalharmos com aparelhos sensíveis esta circunstância torna-se substancial.

498. Na fig. 448, o ponto A mostra o potencial do eletrodo positivo (de cobre) e o ponto B mostra o potencial do eletrodo negativo (de zinco). Na solução de $ZnSO_4$, o eletrodo de zinco eletriza-se negativamente como resultado da emissão de ions positivos de Zn , e o de cobre na solução de $CuSO_4$ eletriza-se positivamente em virtude do mesmo receber ions positivos de Cu . O potencial do eletrólito está representado pela linha BC . $AB = \mathcal{E}_1$ e $CD = \mathcal{E}_2$ mostram os saltos do potencial nos limites eletrodo — eletrólito. A f.e.m. é igual à diferença de potenciais nos extremos da pilha aberta: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

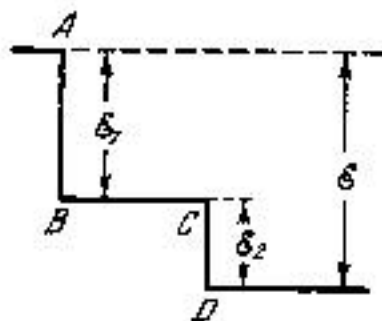


Fig. 448

499. As distribuições correspondentes do potencial estão representadas na fig. 449. a, b, c, d.

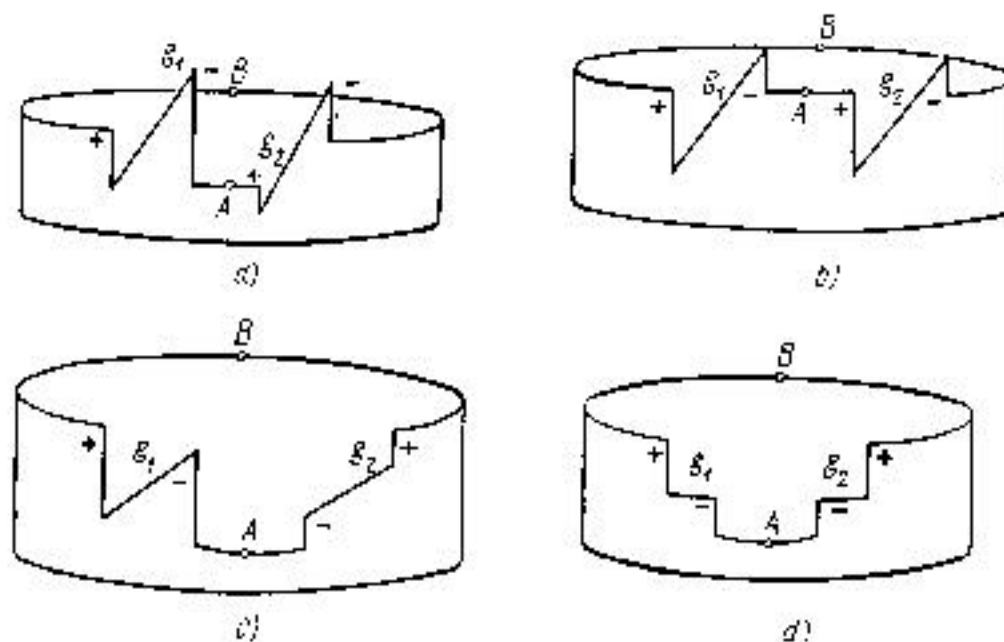


Fig. 449

$$a) I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2},$$

$$V_{BA} = V_B - V_A = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = -(\mathcal{E}_2 - Ir_2) = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} > 0.$$

b) $I = \mathcal{E}_1/r_1$, $V_{BA} = 0$. Os potenciais dos condutores, que unem as pilhas são iguais, mas a corrente não é igual a zero.

$$c) I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}, \quad V_{BA} = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 - Ir_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

d) $I = 0$, $V_{BA} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$. A diferença de potenciais entre os condutores existe, mas não passa a corrente.

500. Para cada mol das substâncias reagentes na pilha, irradia-se uma energia $W = 445 \cdot 10^3 - 235 \cdot 10^3 = 21 \cdot 10^3$ J. Graças a esta energia, a corrente elétrica realiza um trabalho $A = Q\mathcal{E}$, onde $\mathcal{E}$ é a f.e.m. da pilha e Q é a quantidade de eletricidade transportada. Uma vez que o cobre e o zinco são divalentes, as cargas dos íons são iguais em grandeza ao dobro da carga do elétron. Um mol de substância contém $6,02 \cdot 10^{23}$ átomos e, consequentemente, $Q = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}$ coul, donde: $\mathcal{E} = W/Q \approx 1,05$ V.

501. A relação das intensidades das correntes, que passam pelas pilhas é $I_1/I_2 = r_2/r_1$, uma vez que a f.e.m. das mesmas são iguais. Pela lei de Faraday as massas do zinco dissolvido são proporcionais às correntes:

$$m_1/m_2 = I_1/I_2 = r_2/r_1 \approx 1,025.$$

502. Cada átomo de zinco passando para a solução, em forma de Zn^{2+} , transmite ao circuito externo dois elétrons, portadores da carga $q = 2e = -3,2 \cdot 10^{-19}$ coul. Ao mesmo tempo, os íons de cobre Cu^{2+} depositam-se na lâmina de cobre em forma de átomos neutros, como resultado da concentração da solução de $CuSO_4$ diminui. Para a manutenção da concentração constante, há necessidade de dissolver continuamente cristais de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ em uma quantidade, que compense a saída dos íons de Cu^{2+} e SO_4^{2-} da solução.

Pelas condições do problema, temos que, através da pilha passou uma carga $Q = 2800$ coul. Isto corresponde à passagem para a solução de $n = Q/q = 9 \cdot 10^{21}$ átomos de zinco, o que constitui aproximadamente 0,98 g de zinco. Correspondentemente, da solução foi desprendida a mesma quantidade de átomos de cobre (cerca de 0,95 g) e para restabelecer a concentração da solução de $CuSO_4$ é necessário dissolver 3,73 g de cristais de sulfato de cobre.

503. Ao dissolvermos o zinco, os íons positivos Zn^{2+} passam para a solução e os elétrons, que se tornaram livres, através do fio passam para a camada de grafite e neutralizam os íons positivos de cobre na solução de $CuSO_4$. Por isto, o grafite cobre-se por uma camada de cobre. O fenômeno pode ser utilizado para a galvanoplastia.

504. A variação da f.e.m. da bateria depende da correlação entre as dimensões dos eletrodos e do recipiente. Se os dois eletrodos médios têm dimensões quase iguais à seção do recipiente, a f.e.m. da bateria variará muito pouco. Se os eletrodos são pequenos, a f.e.m. diminuirá, aproximadamente, em duas vezes.

505. Com cada uma das metades da barra de carvão, a barra de zinco forma uma pilha fechada. Como resistência externa da pilha é utilizada a resistência da metade da barra de carvão, a resistência da barra de zinco é do contato zinco-carvão (ver o esquema equivalente na fig. 450).

Quando a barra de zinco está na posição vertical, as correntes i_1 e i_2 , em ambas as metades da barra de carvão, são iguais e a indicação do voltímetro será igual a zero. Se a barra estiver inclinada, então, a resistência de uma das pilhas diminui e a da

outra aumenta. As correntes i_1 e i_2 não serão iguais, uma à outra, e entre os extremos da barra de carvão surgirá uma diferença de potencial, a qual será indicada pelo voltímetro.

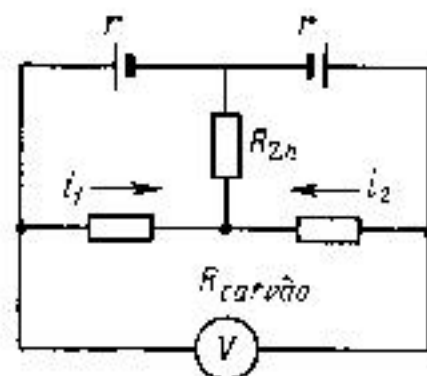


Fig. 459

506. Uma vez, que $r \ll R$, então, o campo, praticamente, é igual a zero dentro da esfera, e a corrente não existe na superfície interna da mesma. Consequentemente, a massa desprendida de cobre é igual a:

$$m = \frac{A}{n} \frac{4\pi R^2 i}{F} \approx 1,68 \text{ g.}$$

onde A/n é o equivalente eletroquímico do cobre e F é o número de Faraday.

507. O problema é o seguinte: na eletrólise ocorre a polarização dos eletrodos e cada banheira adquire uma f.e.m., dirigida em sentido oposto à corrente que parte do condensador. Como consequência disto, o condensador não pode descarregar-se totalmente. Quanto maior for a banheira, maior será a f.e.m., resultante da polarização e, consequentemente, tanto maior será a carga que permanecer no condensador. A energia do gás em combustão será sempre menor do que a energia do condensador carregado.

508. Na eletrólise, a água do eletrodo polariza-se e surge uma f.e.m. de polarização $\mathcal{E}_p$, dirigida em sentido oposto à f.e.m. da bateria. Por isso, a eletrólise ocorre somente no caso, em que a f.e.m. da bateria é maior do que $\mathcal{E}_p$. Ao passar a carga Q pelo eletrólito, a bateria realiza um trabalho contrário à f.e.m. de polarização: $A = \mathcal{E}_p Q$. Graças a este trabalho ocorre a decomposição da água com a formação do gás oxídrico. Baseando-se na lei da conservação da energia, a energia química, do gás oxídrico W , irradiada pela passagem da carga Q é igual ao trabalho $\mathcal{E}_p Q$. De acordo com a lei de Faraday, o desprendimento de uma grama de hidrogênio no cátodo, é acompanhado pela passagem da quantidade de electricidade:

$$Q = m \frac{n}{A} F = 96\,500 \text{ coul.}$$

Consequentemente, $\mathcal{E}_p = W/Q \approx 1,5 \text{ V}$. A f.e.m. da bateria deverá ser maior do que $1,5 \text{ V}$.

509. Uma determinada concentração de íons é o resultado do equilíbrio dinâmico: a quantidade de íons que surgem como consequência da dissociação eletrolítica, é igual à diminuição do número de íons, resultantes do processo inverso da recombinação (os íons de sinais opostos ao chocarem-se podem formar uma molécula neutra). Nas proximidades dos eletrodos a concentração dos íons diminui e o equilíbrio se altera. O número de íons, que surge como consequência da dissociação, é maior do que o número de íons recombinados. Precisamente este processo fornece os íons no eletrólito. O processo ocorre nas proximidades dos eletrodos. Dentro do eletrólito, o equilíbrio dinâmico não se altera.

510. Por segundo atingem o cátodo e desprendem-se do mesmo $n_{+}v_{+}S$ íons positivos (S é a área do cátodo). Simultaneamente, distanciam-se $n_{-}v_{-}S$ íons negativos. No processo de saída dos íons negativos, o equilíbrio dinâmico entre as moléculas neutras do eletrólito e os íons, nas quais elas dissociam-se, se altera (ver o problema 508). Novamente surgem $n_{+}v_{+}S$ íons negativos e a mesma quantidade de íons positivos. Os íons positivos desprendem-se, também, no cátodo e, como resultado, a quantidade de íons positivos que se desprendem no cátodo por segundo, será igual à corrente total.

511. O maior coeficiente de rendimento útil, possível, de uma bateria térmica, teoricamente é igual a:

$$\eta = \frac{\mathcal{E} \cdot q}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

onde Q é a quantidade de calor absorvida em uma unidade de tempo pelos terminais quentes; q é a carga, que passa pelo circuito por unidade de tempo; T_1 e T_2 são as temperaturas absolutas dos terminais. Pela lei de Faraday a massa desprendida em um segun-

do no cátodo é igual a $m = \frac{A}{n} \frac{q}{F}$. Substituindo o valor de q da primeira equação, obtemos que:

$$m = \frac{AQ}{nF\mathcal{E}} \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ g.}$$

512. A diferença de potenciais entre as esferas deverá ser igual a $\mathcal{E}$. Consequentemente, $q_1/r_1 - q_2/r_2 = \mathcal{E}$, onde q_1 e q_2 são as cargas das esferas. Segundo a lei da conservação da carga $q_1 = q_2 = Q$, donde $q_1 - q_2 = \mathcal{E}r_2/r_1$. Pela lei de Coulomb, temos que:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{E}^2 r_1^2 r_2^2}{R^2 (r_1 + r_2)^2} \approx 44 \cdot 10^{-9} \text{ N.}$$

513. Como resultado do deslocamento das lâminas, a carga no condensador aumenta em uma grandeza igual a:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \mathcal{E}\epsilon_0 S (1/d_2 - 1/d_1).$$

Neste caso, a bateria realiza um trabalho:

$$A = \mathcal{E}\Delta Q = \mathcal{E}^2\epsilon_0 S (1/d_2 - 1/d_1).$$

A energia eletrostática do condensador aumentará em

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\mathcal{E}Q_2}{2} - \frac{\mathcal{E}Q_1}{2} = \frac{\mathcal{E}^2\epsilon_0 S}{2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right).$$

Na aproximação das lâminas foi realizado um trabalho mecânico A_1 . Baseando-se na lei de conservação da energia, temos que: $A = A_1 + \Delta W$ e, consequentemente:

$$A_1 = A - \Delta W = \frac{\mathcal{E}^2\epsilon_0 S}{2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right).$$

A custo deste trabalho da bateria ocorreu o aumento da energia eletrostática do condensador e foi realizado o trabalho mecânico A_1 .

514. O trabalho das forças do campo eletrostático, no deslocamento de uma carga, em um circuito fechado, é igual a zero. Por isso:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 r_1 - \mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = 0.$$

As cargas nos condensadores são iguais, uma vez que a soma das cargas, que se encontram tanto nos condutores superior como inferior, é igual a zero. Consequentemente, $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$, donde:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = 17,5 \cdot 10^3 \text{ V},$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = 7,5 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

515. Não variará. Pela ligação alternada das lâminas à terra, ocorreram os mesmos processos, que ocorrem, estando a bateria ausente. A única diferença é o fato de manter-se constante a diferença de potenciais entre as lâminas.

516. Se a corrente passa na direção indicada pela fig. 451 (o acumulador descarrega-se), então, $V = \mathcal{E} - IR$. Se a corrente tiver

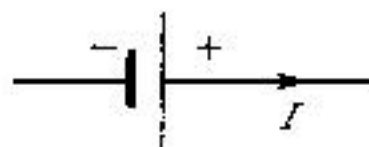


Fig. 451

sentido contrário (o acumulador carrega-se), então, $V = \mathcal{E} + IR$ (ver a resposta do problema 499, c).

517. A resistência interna de uma pilha não é grande e a de uma máquina eletrostática é enorme. Esta é a resistência dos isolantes (dezenas e centenas de milhões de ohms).

518. Para duas pilhas, temos que:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R},$$

onde $\mathcal{E}$ é a f.e.m., r é a resistência interna da pilha e R é a resistência externa.

Para uma pilha (por exemplo, para a primeira) temos:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Pelas condições do problema obtemos: $I < I_1$, i.é.

$$\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} < \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R},$$

donde há necessidade de que:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} < \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}.$$

519. Baseando-se na lei de Ohm, podemos escrever que:

$$I_1 \left(2r \frac{l}{L} + \rho + R \right) = \mathcal{E},$$

$$I_2 \left(2r \frac{l}{L} + \rho + \frac{2r \left(1 - \frac{l}{L} \right) R}{2r \left(1 - \frac{l}{L} \right) + R} \right) = \mathcal{E},$$

$$I_2 \rho = \mathcal{E}$$

onde l é a distância da bateria até o local da ruptura, ρ é a resistência interna da bateria. Do sistema de equações dado, obtemos que:

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I_1} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{I_1} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} \right) \left(\frac{\mathcal{E}}{I_2} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} - 2r \right)} = 4 \pm 3 \text{ ohm}.$$

O valor de $R = 1$ ohm deve ser desprezado, uma vez que para este valor obtemos, que o local da ruptura está distante da bateria em 5,9 km. Realmente, para $R = 1$ ohm temos que:

$$l = \frac{I_2 \mathcal{E} - I_1 L \rho - I_1 L R}{2r I_1} = 5,9 \text{ km}.$$

A resistência procurada é igual a $R = 7$ ohm.

520. Na malha $A \mathcal{E}_2 B$, temos que:

$$V_A + V_B = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2,$$

onde $I_2 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2 + R)$, r_1 e r_2 são as resistências internas das pilhas. Pelas condições do problema sabemos, que o potencial do ponto A é inferior ao potencial do ponto B . Por isso, $V_A = V_B$, $V_A < 0$. Para o outro esquema temos que:

$$U_2 = V_B - V_A = (\mathcal{E}_2 - I_2 r_2),$$

onde $I_2 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2 + R)$. Resolvendo o sistema dado de equações, determinamos que:

$$U_2 = \frac{2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 + U_1 (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} = +1,86 \text{ V}.$$

521. No caso dado o potencial do ponto A , estando a chave ligada, é maior do que o potencial no ponto B , uma vez que, estando a chave desligada $V_B > V_A$. Por isso, $\mathcal{E}_2 - I_2 r_2 = V_A$. As demais equações têm a mesma forma, que as equações do problema 520. Consequentemente,

$$U_2 = \frac{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - U_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \approx 1,57 \text{ V.}$$

522. Supondo (arbitrariamente, que as correntes têm as direções indicadas na fig. 452, podemos, baseando-se na lei de Ohm, escrever

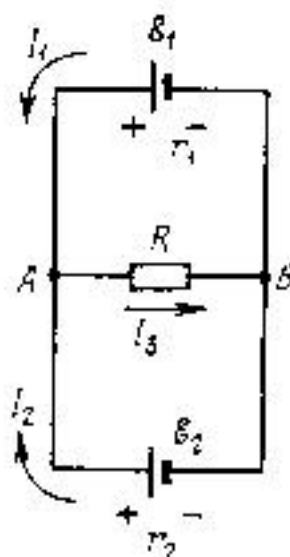


Fig. 452

as igualdades:

$$U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1, \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2, \quad U_{AB} = I_3 R.$$

Uma vez que em nenhum ponto do circuito ocorre acumulação de cargas, temos que:

$$I_1 = I_2 = I_3.$$

Resolvendo este sistema de equações, determinamos as correntes I_1 , I_2 e I_3 :

$$I_1 = 5,4 \text{ A}, \quad I_2 = 1,4 \text{ A}, \quad I_3 = 3,2 \text{ A}.$$

Os resultados positivos obtidos confirmam a direção das correntes, escolhida inicialmente.

523. Se $I_2 = 0$, então, $I_1 = I_3$, $U_{AB} = \mathcal{E}_2$ e como antes $U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1$, donde $R = \mathcal{E}_2 r_1 / (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 1 \text{ ohm}$. Se a corrente I_2 dirigir-se em sentido oposto à $\mathcal{E}_2$, então, o sistema de equações terá a seguinte forma:

$$U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1, \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2, \\ U_{AB} = I_3 R, \quad I_1 = I_2 = I_3.$$

donde:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 r_1 / R}{r_1 + r_2 + r_1 r_2 / R}.$$

Nossa condição satisfaz-se, caso $I_2 > 0$; consequentemente, deverá verificar-se a desigualdade:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 \frac{r_1}{R} > 0, \quad \text{ou} \quad R > \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 1 \text{ ohm}.$$

524. Existem duas possibilidades de ligarmos os acumuladores. Pode-se, dentro de grupos isolados, ligar os acumuladores em série e os próprios grupos em paralelo, ou inversamente, dentro do grupo em-las paralelamente e os próprios grupos unidos em série. Simbolizando por N o número total de acumuladores e por n o número de acumuladores dentro de um grupo isolado, no primeiro caso, teremos que:

$$I_1 = \frac{n\mathcal{E}_0}{R + nr^2/N} = \frac{\mathcal{E}_0}{R/n + nr/N},$$

uma vez que a f.e.m. de um grupo é igual a $n\mathcal{E}_0$; a resistência no grupo é nr e o número de grupos unidos, paralelamente é igual a N/n . I_1 atingirá o valor máximo, se $R/n = nr/N$ for mínimo.

O mínimo de uma expressão de forma $ax + b/x$ pode ser calculado do seguinte modo.

A dependência

$$y = ax + \frac{b}{x}, \quad (1)$$

que está representada graficamente na fig. 453, tem um mínimo no ponto x_0 , no qual coincidem as raízes da equação do segundo

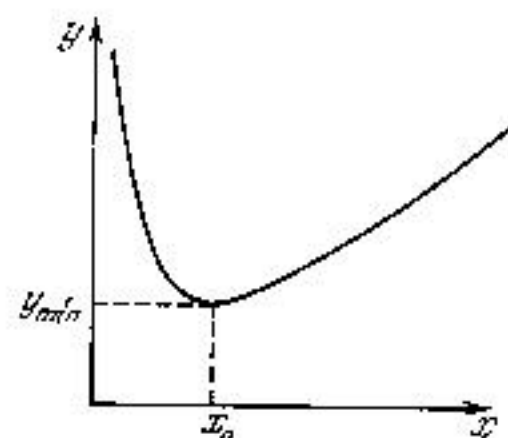


Fig. 453

grau (1). Por isso $x_0 = \sqrt{b/a}$. Consequentemente: $n = \sqrt{RN/r} = 4$, e

$$I_{1 \text{ max}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \sqrt{\frac{N}{Rr}} = 20 \text{ A}.$$

No segundo caso, temos que:

$$I_2 = \frac{(N/n) \mathcal{E}_0}{R + rN/n^2} = \frac{N \mathcal{E}_0}{nR + rN/n}.$$

A corrente terá um valor máximo para $n = \sqrt{rN/R} = 6$; conseqüentemente,

$$I_{2 \text{ máx}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \sqrt{\frac{N}{Rr}} = I_{1 \text{ máx}}.$$

Deste modo, obter uma corrente que ultrapasse a 20 A, é impossível.

525. O modo de reparo vê-se claramente na fig. 454.

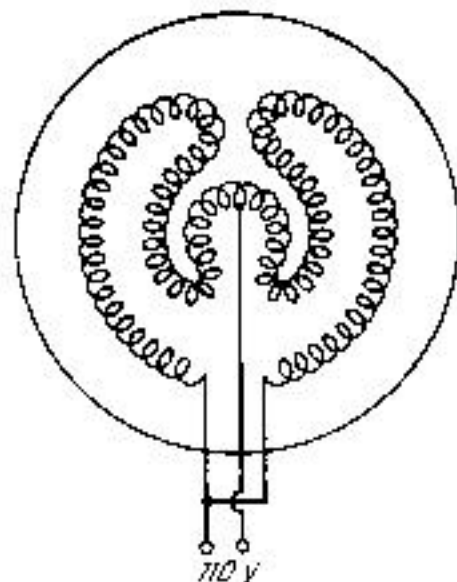


Fig. 454

526. A potência utilizada pelo aparelho no primeiro momento é muito maior da potência nominal, uma vez que a resistência da espiral fria é pequena. Correspondentemente será grande a queda da tensão nos condutores que vão da avenida ao apartamento. À medida que se aquecem as espirais, a potência utilizada diminui, aproximando-se da nominal.

527. Uma vez que a chaleira é ligada, em todos os casos, à mesma rede elétrica, é mais conveniente utilizar a fórmula para a quantidade

de calor irradiada na forma $Q = \frac{U^2}{R} t$, donde $R = \frac{U^2}{Q} t$. Uma vez

que U e Q são os mesmos para todos os casos, a última igualdade pode ser escrita da seguinte forma: $R = \alpha t$, onde $\alpha = U^2/Q$.

Simbolizando por R_1 e R_2 as resistências dos enrolamentos, teremos que $R_1 = \alpha t_1$ e $R_2 = \alpha t_2$. Ao ligarmos paralelamente os enrolamentos, obtemos:

$$R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\alpha^2 t_1 t_2}{\alpha (t_1 + t_2)} = \alpha t_c,$$

Ao ligarmos em série, teremos que:

$$R_b = R_1 + R_2 = \alpha (t_1 + t_2) = \alpha t_b,$$

donde $t_c = t_1 t_2 / (t_1 + t_2)$, $t_b = t_1 + t_2$.

528. 1) $t_a \approx 57$ min; 2) $t_b \approx 3$ min 30 s (ver a solução do problema 527).

529. Ao calcularmos a perda de calor nos fios da linha de alta tensão,

utilizamos a fórmula $Q = \frac{U^2}{R} t$, onde U é a diferença de potenciais

nos extremos da linha (a queda da tensão nos fios) e não a tensão no enrolamento secundário do transformador de aumento. Esta diferença de potenciais não é grande como ocorre com a tensão do enrolamento do transformador; e diminui com a diminuição da corrente que passa pela linha.

530. A potência irradiada na resistência externa R é igual a $W = IU$. No caso dada, $U = \mathcal{E} - IR$, conseqüentemente, $I = \mathcal{E} / (R + r)$. Deste modo, $W = \mathcal{E} I = I^2 r$, donde

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2} \sqrt{\frac{2r}{R}} = \frac{\mathcal{E}}{2} \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

e $I_1 = 0$ V ou $I_2 = 1$ V.

Os diferentes valores de resultado estão relacionados com o fato de que uma mesma potência pode ser irradiada em diferentes resistências externas R , sendo que a cada resistência R corresponde uma determinada corrente:

para $U_1 = 0$ V, $I_1 = 1$ A

$$R_1 = W / I_1^2 = 0 \text{ ohm};$$

para $U_2 = 1$ V, $I_2 = 0$ A

$$R_2 = W / I_2^2 = 1 \text{ ohm};$$

531. Ao ligarmos 1 paralelamente, temos que

$$N = N_1 + N_2.$$

Ao ligarmos em série, obtemos:

$$N = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{N_1 (N - N_1)}{N}.$$

No numerador da última expressão aparece o produto de duas grandezas, cuja soma é constante igual a N . Este produto será máximo, quando as grandezas analisadas forem iguais, donde: $N_1 = N - N_1$, $N_1 = N_2 = N/2$.

532. A potência útil (ver o problema 530) é igual a $W = (\mathcal{E}U - I^2 r)$. Simbolizemos $\mathcal{E}U - I^2 r = x$. É necessário determinar, para qual valor de U teremos um máximo para x .

A dependência gráfica de x em função da U está representada na fig. 455. A curva tem a forma de uma parábola, sendo que a cada x correspondem dois valores de U . Para um determinado valor de x nós teremos uma equação quadrática relativamente a U . x terá um valor máximo, quando ambas as raízes da equação forem iguais. Conseqüentemente, para um valor máximo de x , o

discriminante da equação deverá ser igual a zero, donde:

$$U = \mathcal{E}/2, \quad W_{\text{máx}} = \mathcal{E}^2/4r = 25 \text{ watts.}$$

Neste caso, teremos que:

$$I = \mathcal{E}/2r, \\ R = W_{\text{máx}}/I^2 = \mathcal{E}^2/4r^2 / 4r\mathcal{E}^2/r^2 = r,$$

i. é, a resistência externa é igual à interna.

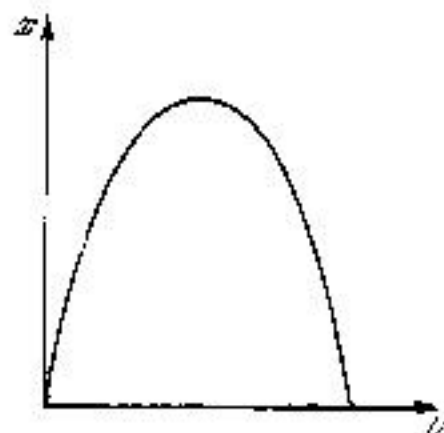


Fig. 455

533. Por definição, o coeficiente de rendimento útil η é a relação entre a potência útil e a potência total irradiada pelo acumulador, i. é., $\eta = IU/\mathcal{E}I = U/\mathcal{E}$, onde $U = \mathcal{E}R/(R+r)$ é a

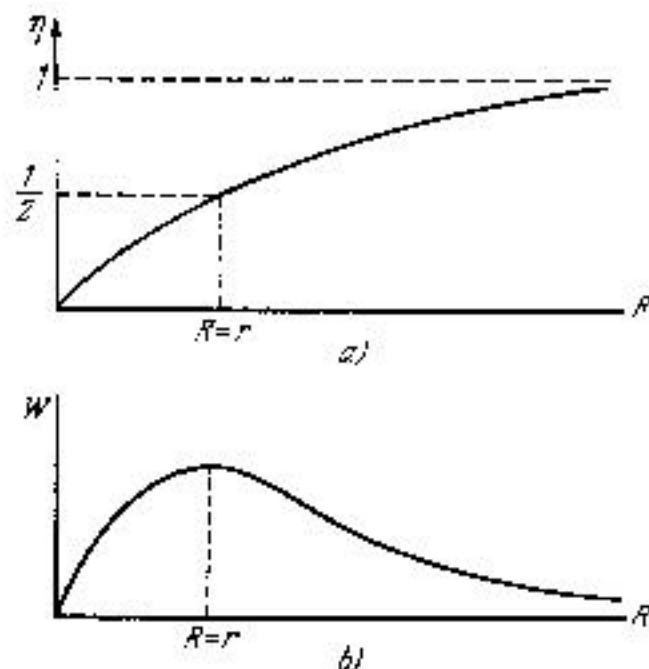


Fig. 456

diferença de potenciais na resistência externa R . Consequentemente, $\eta = R/(r+R)$. No problema 530 $\eta_1 = 90\%$; $\eta_2 = 10\%$. No problema 532 $\eta = 50\%$; $\eta \rightarrow 1$, quando $R \rightarrow \infty$ e, então, a potência útil irradiada será igual a $W = \mathcal{E}^2 R/(R+r)^2$ (igualmente como a total) e tenderá para zero (fig. 456).

534. Pela lei de Ohm, temos que: $U = \mathcal{E} - Ir$, consequentemente, $I = (U - \mathcal{E})/r$. A potência útil, gasta no carregamento do acumulador, é igual a:

$$W_1 = \mathcal{E}I = (U\mathcal{E} - \mathcal{E}^2)/r.$$

A quantidade de calor irradiada por unidade de tempo, será

$$W_2 = I^2 r = (U - \mathcal{E})^2/r.$$

A potência total utilizada é igual a:

$$W = IU = W_1 + W_2$$

535. A potência útil é igual a:

$$W_1 = \mathcal{E}IU = \mathcal{E}^2/r.$$

(ver o problema 534). A quantidade de calor irradiada por unidade de tempo é:

$$W_2 = I^2 r = \mathcal{E}^2/r.$$

Normalmente, para o carregamento temos que: $I = \mathcal{E}/(R+r)$, consequentemente, $W_1 \gg W_2$. Na irradiação de calor gasta, é uma parte pequena da potência da estação de carregamento.

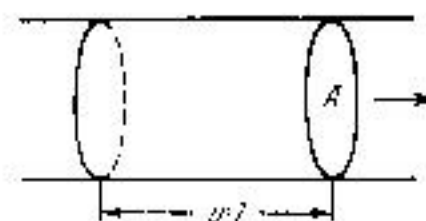


Fig. 457

536. Em um tempo t , pela seção transversal A do condutor, passarão todos os elétrons, mantidos no volume $S \cdot v \cdot t$ (fig. 457). Consequentemente, a intensidade da corrente $I = S \cdot v \cdot n \cdot e$ (e é a carga de um elétron), donde $v = I/Sne \approx 10^{-8}$ mm/s.
537. Os elétrons no metal podem ser considerados livres. A redistribuição dos elétrons dentro do paralelepípedo terminará, quando o campo elétrico, que surge como consequência da redistribuição, estiver em condições de transmitir aos elétrons uma aceleração a . Deste modo, a intensidade procurada do campo pode ser determinada da relação: $ma = eE$ (m e e são a massa e a carga do elétron), donde $E = (m/e)a$. As superfícies laterais do paralelepípedo, perpendiculares ao movimento, estarão carregadas; a superfície dianteira estará carregada positivamente e a superfície de trás negativamente. A

densidade de cargas é igual a:

$$\sigma = e_0 E = n_0 (m/e) a.$$

538. Os elétrons livres giram juntamente com o cilindro. Consequentemente, o elétron, que se encontra a uma distância r do eixo, possui uma aceleração $a = \omega^2 r$. Esta aceleração pode surgir somente sob a ação de um campo elétrico, dirigido ao longo do raio a partir do centro do cilindro e igual a: $E = m\omega^2 r/e$, onde e e m são a carga e a massa do elétron. A diferença de potenciais é $U = \frac{1}{2} \frac{m}{e} \omega^2 R^2$, uma vez que a força média que atua em uma unidade de carga, no deslocamento da mesma desde o eixo até a superfície do cilindro, é igual a: $\frac{1}{2} \frac{m}{e} \omega^2 R$.

539. Ocorre num disco em rotação a redistribuição das cargas e surge um campo elétrico, cuja intensidade, é igual a: $E = m\omega^2 r/e$, onde r é a distância até o centro do disco; e é a carga do elétron; m é a massa do mesmo. O gráfico da dependência $E = f(r)$ está representado na fig. 458. A diferença de potenciais φ , entre o

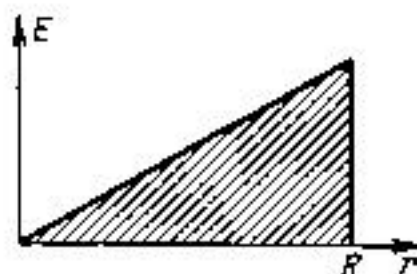


Fig. 458

centro e a borda do disco, é numericamente igual à área do triângulo riscado na fig. 458, i.e., $\varphi = m\omega^2 R^2/2e$. A quantidade de calor Q , irradiada na resistência R , por unidade de tempo, é igual a:

$$Q = I\varphi = \frac{I}{e} \frac{m\omega^2 R^2}{2}, \quad (1)$$

onde I é a corrente que passa pelo circuito (pode ser determinada pela lei de Ohm).

A rotação do disco freia os elétrons que se movimentam do centro em direção às bordas. Suponhamos, que em uma distância R existam N íons localizados a iguais distâncias um do outro. Em cada choque com um íon, o elétron adquire uma quantidade de movimento p , sob ação do impulso da força $F\tau$ que age no elétron por parte do íon:

$$p = m\omega R/N = F\tau.$$

O momento da quantidade de movimento adquirido pelo elétron, em cada choque, é igual a:

$$m\omega \frac{R}{N} \frac{R}{N} = F\tau \frac{R}{N}.$$

Se a corrente no circuito é igual a I , então, o momento da quantidade de movimento transmitida aos elétrons por todos os N íons por unidade de tempo é igual a:

$$\frac{I}{e} \sum_{n=1}^N m\omega \frac{R^2}{N^2} n = M.$$

A soma da esquerda pode ser transformada do seguinte modo:

$$\frac{I}{e} \frac{R^2}{2} m\omega \frac{N(N+1)}{N^2} = M.$$

Para $N \rightarrow \infty$ obtemos que:

$$\frac{I}{e} m\omega \frac{R^2}{2} = M.$$

O trabalho realizado por todos os N íons por unidade de tempo é igual a:

$$W = \frac{I}{e} m\omega^2 \frac{R^2}{2} = M\omega. \quad (2)$$

Das equações (1) e (2), obtemos que $Q = W$.

§ 21. CORRENTE ELETRICA NOS GASES E NO VACUO

540. As leis de conservação da energia e do impulso, neste caso, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} - \frac{m_2 u_2^2}{2} = \mathcal{E}_0, \\ m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

onde v_1 é a velocidade da primeira partícula até o choque, u_1 e u_2 são as velocidades da primeira e da segunda partículas, correspondentemente, depois do choque. Resolvendo o sistema de equações (1), obtemos que:

$$\begin{aligned} u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2 \sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)}}{m_1 + m_2}, \\ u_2 = v_1 \frac{m_1 \left[\sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)} - 1 \right]}{m_1 - m_2}, \end{aligned}$$

Verifica-se, facilmente, que depois do choque, u_1 não pode ser maior do que u_1 ; $u_{1\text{máx}} = v_2$ para satisfazer a seguinte correlação:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathcal{E}_1 \text{ mín.}$$

Esta correlação determina a maior parte da energia, que pode ser transformada em energia de ionização. Em outras palavras, se para a ionização necessitasse da energia $\mathcal{E}_0$, então, é imprescindível que a energia mínima da primeira partícula seja maior do que $\mathcal{E}_0$.

Se a primeira partícula for muito mais leve, do que a segunda (por exemplo, um elétron e um átomo), então, temos que:

$$u_1 \approx -v_1 \sqrt{1 - \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1},$$

$$u_2 \approx \frac{m_1}{m_2} v_1 \sqrt{1 - \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1 - 1}.$$

Para isto $\mathcal{E}_{1\text{mín}} \approx \mathcal{E}_0$ e, se $\mathcal{E}_1 \approx \mathcal{E}_{1\text{mín}}$, então,

$$u_1 \approx 0, \quad u_2 \approx \frac{m_1}{m_2} v_1 \approx v_1.$$

Isto é, praticamente toda a energia da primeira partícula é utilizada na ionização, e ambas as partículas, depois do choque, ficarão quase em repouso.

No caso, em que $m_1 \approx m_2$ (por exemplo, um íon e um átomo) $\mathcal{E}_{1\text{mín}} \approx 2 \mathcal{E}_0$.

541. Até o início da descarga, a tensão no contador é igual à f.e.m. da fonte $\mathcal{E}$. No momento da descarga, pelo circuito, passa uma corrente e a tensão, entre o corpo e o fio, torna-se igual a $V = \mathcal{E} - IR$. A resistência R é muito grande e a queda da tensão IR é tão sensível que a descarga cessa.

542. Pela lei de Ohm, a queda da tensão procurada $U = IR$, onde I é a intensidade da corrente no circuito. A corrente é igual em todas as seções dentro do condensador. Na placa positiva esta corrente é condicionada somente pelos íons negativos e na placa negativa, somente pelos íons positivos. Por uma seção arbitrária, dentro do condensador, passa uma certa parte dos íons, tanto positivos como negativos.

$I = enSd$, onde e é a carga do elétron e S , a área das placas.

Para um condensador plano, temos que $Sd = \frac{Cd^2}{\epsilon_0}$. Consequentemente:

$$U = \frac{enCd^2}{\epsilon_0} R \approx 15,75 \cdot 10^{-12} \text{ V.}$$

543. Os elétrons, criados por um ionizador externo, desaparecerão em consequência da recombinação. Em um volume unitário, por unidade de tempo, recombina-se uma quantidade de íons igual a $\Delta n_0' = \gamma n_0^2$. Além disso se entre os eletrodos a corrente é I , então, de um volume unitário do gás, por unidade de tempo, nos eletrodos é neutralizado um número de íons igual a $\Delta n_0 = I/qSl$.

Consequentemente, a fim de que o número de íons, por unidade de volume, não varie, o ionizador externo deve criar, por unidade de tempo, em cada volume unitário um número de íons igual a:

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^2 + I/qSl.$$

544. A condição $I/qSl \ll \gamma n_0^2$ significa, que o número de íons que desaparecem como consequência da presença de corrente pode ser desprezado em comparação com o número de íons, que desaparecem como resultado da recombinação.

A condição de equilíbrio (ver o problema 543) é escrita da seguinte forma: $\Delta n_0 = \gamma n_0^2$. Desta condição deduzimos a igualdade $n_0 = \sqrt{I/qSl}$, a qual significa, que o número de íons n_0 em um volume unitário do gás é constante.

Em um tempo unitário atingirão o cátodo $n_0 u_+ S$ íons positivos. Simultaneamente, abandonarão o cátodo $n_0 u_- S$ íons negativos. Neste modo, o número total de íons positivos despreendidos no cátodo, por unidade de tempo, é igual a: $n_0 (u_+ - u_-) S$ e o mesmo número de íons negativos dissociam-se, por unidade de tempo, no ânodo.

Deste modo, a densidade de corrente é igual a: $j = (u_+ - u_-) n_0 q$, e uma vez que $u_+ = b_+ E$, $u_- = b_- E$, então, $j = n_0 q(b_+ - b_-) E$. Esta igualdade expressa a lei de Ohm $j = \sigma E$, uma vez que $\sigma = n_0 q(b_+ - b_-) = \text{const.}$

545. A condição $\gamma n_0^2 \ll I/qSl$ significa, que a densidade de corrente $j = I/S$ é tão grande, que toda a diminuição do número de íons é determinada pela neutralização dos mesmos nos eletrodos e o decréscimo, como resultado da recombinação, pode ser desprezado. A condição de equilíbrio pode ser escrita da seguinte forma (ver o problema 543): $n_0 = \sqrt{I/qSl + \gamma n_0^2}$, donde $n_0 = \sqrt{I/qSl}$ e n_0 não dependerá da intensidade do campo E e, consequentemente, da diferença de potenciais entre os eletrodos. Esta densidade da corrente é a máxima possível nas condições dadas (sendo Δn_0 , σ e l e denomina-se densidade da corrente de saturação). j_s será tanto maior, quanto maior for I . Esta conclusão é válida para as condições, nas quais a ionização ocorre em todo o volume existente entre os eletrodos e, consequentemente, em uma seção tanto maior, quanto maior for l .

546. O gráfico da distribuição da tensão U está representado na fig. 459. Os elétrons percorrem o espaço catódico escuro, muito mais rapi-

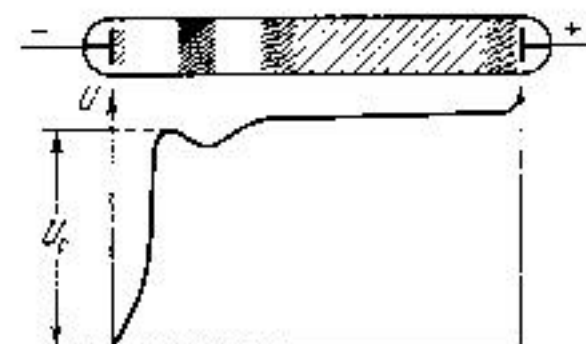


Fig. 459

damente que os íons positivos. Como consequência disto, em qualquer momento de tempo, o número dos íons positivos no espaço catódico escuro é muito maior do que os elétrons. A maior concentração de íons positivos encontra-se no início da luminescência incandescente. A menor concentração dos mesmos encontra-se em um local junto do cátodo, onde a velocidade do movimento dos mesmos é a maior possível. Junto do próprio cátodo existe uma camada de carga espacial negativa, formada pelos elétrons que iniciam seu movimento do cátodo com velocidades muito pequenas.

547. 1) Se no tubo, onde começa descarga, movermos, gradualmente, o ânodo, em direção ao cátodo, então, as partes catódicas da descarga permanecem quase invariáveis em seu comprimento e localização. Ao movermos o ânodo, somente diminui o comprimento da coluna positiva, enquanto esta coluna não desaparecer totalmente. Depois, uma posterior aproximação do ânodo ao cátodo diminui o espaço escuro de Faraday e, em seguida, a luminescência incandescente, sendo que a posição do limite brusco desta luminescência, por parte do cátodo, permanece invariável. E, finalmente, quando a distância deste limite até o ânodo torna-se muito pequena, a descarga cessa.

2) Se o ânodo permanece fixo e deslocamos o cátodo em direção ao ânodo, todas as partes catódicas da descarga, incluindo o limite da coluna positiva, deslocam-se juntamente com o cátodo, permanecendo invariáveis em dimensão e localização recíproca. A coluna positiva e o espaço escuro de Faraday e, em seguida, a luminescência incandescente gradualmente desaparecem. Quando o vértice da luminescência incandescente atinge o ânodo, a descarga cessa.

548. Ao esfriarmos o carvão negativo, o arco apaga-se, uma vez que a ignição do arco é mantida pela forte emissão termoeletrônica desde o cátodo, que cessa com o esfriamento. O esfriamento do carvão positivo não influirá no funcionamento do arco.

549. A carga acumulada pela garrafa de Leyden, em 20 segundos de trabalho da máquina eletrostática, é igual a $q = It$. Consequentemente, a tensão que provoca o contato da descarga disruptiva é igual a $U_{con} = q/C = It/C = 3 \cdot 10^4$ V. A corrente na descarga é $I_{des} = q/\tau = U_{con}/\tau = 200$ A. Essa corrente enorme aquece, fortemente, o ar e, como resultado, surge a onda sonora (estrondo).

550. Simbolizemos a carga transmitida à garrafa de Leyden pela máquina eletrostática, por unidade de tempo, por Q . Passará, uma faísca entre as esferas, quando a tensão entre as esferas do descarregador atinge o valor da tensão que provoca o contato da descarga disruptiva U_{con} . A grandeza U_{con} depende da distância entre as esferas, do raio das mesmas e das propriedades do ar. Quando, paralelamente ao descarregador for ligada uma garrafa de Leyden, então, $U_{con} = Q\tau_1/C$. Para duas garrafas unidas paralelamente teremos que: $U_{con} = Q\tau_1/2C$. Para duas garrafas ligadas em série, teremos: $U_{con} = 2Q\tau_2/C$. Consequentemente: $\tau_1 = 2\tau_0$, $\tau_2 = \tau_0/2$.

551. Um elétron-volt é igual a $1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

552. Não coincide. As tangentes à trajetória mostram a direção da velocidade da partícula e as tangentes às linhas de força mostram

a direção da força, que age na partícula e, consequentemente, a direção da aceleração. Somente no campo, em que as linhas de força são retas, a trajetória da partícula coincide com a linha de força, se a velocidade inicial desta partícula estiver dirigida pela linha de força.

553. A energia total de um elétron é igual à soma das energias cinética e potencial. Ao aproximar-se do anel, a energia potencial do elétron no campo do anel diminui e, consequentemente, aumenta sua energia cinética. Passando através do anel, o elétron distancia-se do mesmo. Então, a energia potencial do elétron aumenta e a velocidade diminuirá, gradualmente, até tornar-se igual a zero.

554. Os elétrons atingem o ânodo com energias de 80 a 74 elétron volts, uma vez que ao longo do fio de incandescência, existe uma queda de tensão igual a 6 V. A energia dos elétrons no ânodo determinase, somente, pela diferença de potenciais percorrida e não depende do potencial da rede. O potencial da rede varia a distribuição das velocidades dos elétrons, nos pontos intermediários do trajeto e influe no número de elétrons que atingem o ânodo.

555. Em base da lei de Ohm, temos que: $\mathcal{E} = I_a R_a + U_a$ (fig. 400). A intensidade da corrente é $I_a = A U_a^2 / B T_a^2$, donde:

$$I_a = \frac{\mathcal{E}}{R_a} \pm \frac{(AR_a - 1) - \sqrt{(AR_a + 1)^2 + 4\mathcal{E}BR_a}}{2BR_a^2} \approx 5 \text{ mA.}$$

A segunda raiz da equação quadrada não possui sentido físico, uma vez que corresponde a $U_a < 0$.

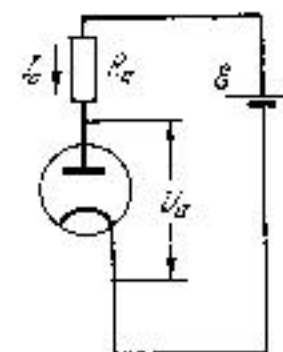


Fig. 400

556. O sistema de equações, que determina as correntes i_1 e i_2 , tem a forma:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= i_3, \quad i_1 = A_1 U_a + B_1 U_a^2, \\ i_2 &= A_2 U_a + B_2 U_a^2, \quad U_a = \mathcal{E} - (R_1 + R_2) i_1 \end{aligned}$$

donde:

$$U_a = \frac{-(A_1 + A_2)R - 1 \pm \sqrt{(A_1 R + A_2 R + 1)^2 + 4\mathcal{E}(B_1 + B_2)R}}{2(B_1 + B_2)R} = 60 \text{ V.}$$

O valor negativo de U_a desprezamos, uma vez que não corresponde ao sentido do problema. As correntes procuradas são iguais a:

$$i_1 = \frac{1}{(B_1 + B_2) R} [B_1 \mathcal{E} - (A_1 B_2 - A_2 B_1) R U_a - B_1 U_a] = 22,2 \text{ mA},$$

$$i_2 = \frac{1}{(B_1 + B_2) R} [B_2 \mathcal{E} + (A_2 B_1 - A_1 B_2) R U_a - B_2 U_a] = 37,8 \text{ mA}.$$

557. Sendo o potencial da rede $\mathcal{E}_2 = -6 \text{ V}$, a corrente que passa através da válvula é $I_2 = U_2/R$, sendo o potencial da rede $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}$, $I_1 = U_1/R$. Consequentemente, o aumento do potencial da rede em $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 3 \text{ V}$ provoca um aumento da corrente do ânodo da válvula em:

$$I_1 - I_2 = (U_1 - U_2)/R = 3,5 \text{ mA}.$$

Uma vez que a característica da rede da válvula, na região analisada, considera-se linear, então, o aumento do potencial da rede, referente ao cátodo ainda em 5 V (de -3 V até zero estando fechados em curto circuito a rede e o cátodo), provoca o aumento da corrente do ânodo ainda em $3,5 \text{ mA}$. Então, a queda da tensão na resistência R aumentará ainda em $U_1 - U_2 = 35 \text{ V}$, i.e., atingirá $U_a = U_1 - U_2 - I_2 R = 130 \text{ V}$ e a diferença de potenciais entre o ânodo e o cátodo da válvula será igual a:

$$\mathcal{E} - U_a = 120 \text{ V}.$$

558. O primeiro diodo começa a conduzir corrente, somente, para $U_1 > 0$, i.e., para $V > \mathcal{E}_1$, e segundo para $V > \mathcal{E}_2$ e o terceiro

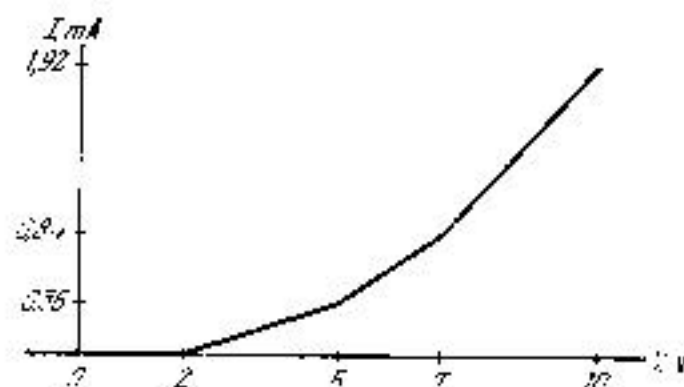


Fig. 461

para $V > \mathcal{E}_3$. Por isso, o gráfico da dependência da corrente total, em relação à tensão, tem a forma de uma linha quebrada (fig. 461):

$$\begin{aligned} I &= 0 & \text{para } V &\leq \mathcal{E}_1, \\ I &= k(V - \mathcal{E}_1) & \text{para } \mathcal{E}_1 &\leq V \leq \mathcal{E}_2, \\ I &= k(V - \mathcal{E}_1) + k(V - \mathcal{E}_2) & \text{para } \mathcal{E}_2 &\leq V \leq \mathcal{E}_3, \\ I &= k(V - \mathcal{E}_1) + k(V - \mathcal{E}_2) + k(V - \mathcal{E}_3) & \text{para } \mathcal{E}_3 &\leq V. \end{aligned}$$

Semelhantes esquemas, às vezes, são utilizados nos aparelhos de rádio para a obtenção de uma dada dependência funcional da corrente em relação à tensão.

559. Na fig. 462, A e B são as placas dirigentes; MN é a tela; OC é a trajetória do elétron. O início do sistema de coordenadas encontra-se no ponto O .

À medida que se move entre as placas, na direção do eixo y , o elétron desloca-se uniformemente acelerado, com aceleração $a = eU/md$.

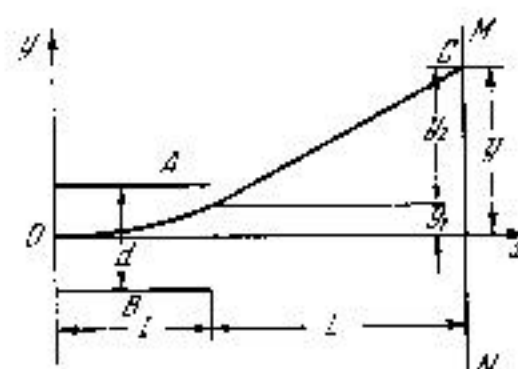


Fig. 462

onde U é a diferença de potenciais entre A e B . A distância l , ao longo do eixo x , ele percorre no tempo t_1 . v_{1x} é a componente horizontal da velocidade do elétron, determinada da condição $\frac{1}{2} m v_{1x}^2 = eU_0$. Em um intervalo de tempo t_1 , o elétron desvia-se na direção do eixo y na grandeza:

$$y_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{eU l^2}{2dmv_{1x}^2}.$$

O movimento do elétron fora das placas realiza-se com velocidade constante e perdura um tempo $t_2 = L/v_{1x}$. A velocidade ao longo de x é igual a $v_{1x} = v_{1x}$. O desvio na região fora das placas é igual a:

$$y_2 = v_{1y} t_2 = \frac{eU l L}{dmv_{1x}^2}.$$

O desvio total é igual a:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eU l}{dmv_{1x}^2} \left(\frac{l}{2} + L \right) \approx \frac{eU l L}{dmv_{1x}^2} = \frac{U l L}{2U_0 d}.$$

A sensibilidade é:

$$y = y \cdot U \approx l L / 2 U_0 d.$$

§ 22. O CAMPO MAGNÉTICO DA CORRENTE.
AÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO NA CORRENTE
E NAS CARGAS EM MOVIMENTO

560. No sistema SI temos:

$$[H] = I L, \quad [I] = I_1, \quad [l] = L_1, \quad [I] = I L.$$

onde I e L são os símbolos das dimensões da corrente e do comprimento, donde, deduzimos, que

no caso (1) $H = C_1 I$; no caso (2) $H = C_2 I$,
onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer. O cálculo teórico dá as seguintes fórmulas exatas:

$$\text{no caso (1)} \quad H = I / 2\pi r; \quad \text{no caso (2)} \quad H = I / 2.$$

561. A corrente que passa pelo tubo, pode ser considerada como a soma de uma infinidade de correntes retilíneas iguais distribuídas uniformemente, pela superfície do tubo. A intensidade do campo magnético, em qualquer ponto do espaço, pode ser apresentada como a soma das tensões dos campos criados por estas correntes. Na fig. 463 está representada a secção transversal do tubo, ao longo do qual passa corrente. Comparámos as intensidades dos campos magnéticos H_1 e H_2 , criados no ponto A pelas correntes lineares I_1 e I_2 , que passam através de pequenos arcos S_1 e S_2 . Os comprimentos dos arcos são iguais a $S_1 = \alpha R_1 \cos q_1$ e $S_2 = \alpha R_2 \cos q_2$, onde H_1 e R_2 são as distâncias até o ponto A . Mas, como vemos no desenho, $q_1 = q_2$. Consequentemente, $S_1 S_2 = R_1 R_2$. A corrente está distribuída uniformemente no tubo, por isso $I_1 I_2 = S_1 S_2$, donde $I_1 R_1 = I_2 R_2$.

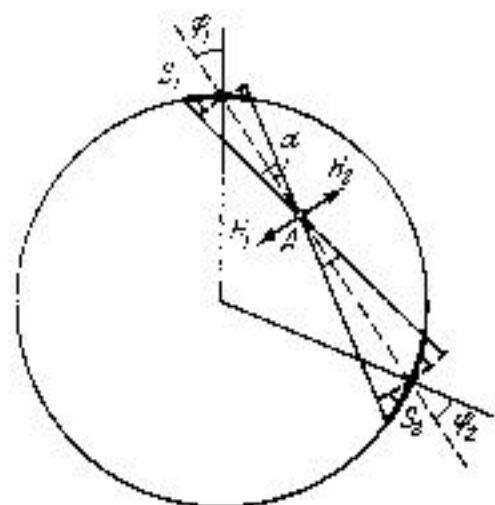


Fig. 463

As intensidades dos campos magnéticos, criados no ponto A pelas correntes I_1 e I_2 , são proporcionais a estas correntes e inversamente proporcionais às distâncias correspondentes. Temos,

então, que:

$$H_1 = k I_1 R_1 = k I_2 R_2 = H_2,$$

sendo que H_1 e H_2 estão dirigidos em sentidos opostos. Uma vez que para cada parte da secção transversal do tubo, pode ser escolhida uma outra parte correspondente, que compense, totalmente, o campo magnético da primeira parte no ponto A , então, o campo magnético resultante da corrente que passa pelo tubo, em qualquer ponto dentro do tubo, terá uma tensão igual a zero.

562. O condutor com uma cavidade é equivalente a um condutor compacto, pelo qual passa uma corrente de densidade i e no volume correspondente à cavidade, além disso, passa uma corrente de mesma densidade em direção inversa. A corrente resultante no volume indicado será igual a zero, e isto corresponde à presença de uma cavidade no condutor compacto.

O campo, criado pela corrente de densidade i , em um ponto arbitrário A da cavidade, é igual a $H_1 = k 2\pi R$ (fig. 464). Aqui R é a distância do eixo do condutor até o ponto A . (Supõe-se, que a corrente passa em nossa direção). Neste mesmo ponto a corrente que passa pelo volume, correspondente à cavidade, em sentido contrário, cria um campo $H_2 = k 2\pi r$. Como vemos na fig. 464, a indução total é igual a:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - 2H_1H_2 \cos \alpha}.$$

Está claro, que

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr},$$

donde temos, que a indução $H = k 2\pi r d$ é igual para todos os pontos da cavidade.

563. O $\triangle AOC \sim \triangle BAD$ (fig. 464), uma vez que estes triângulos possuem um ângulo igual, e os lados que o formam, são proporci-

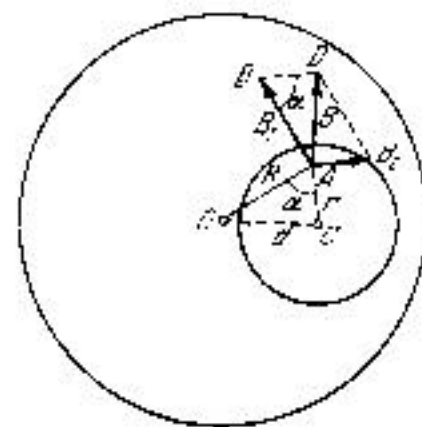


Fig. 464

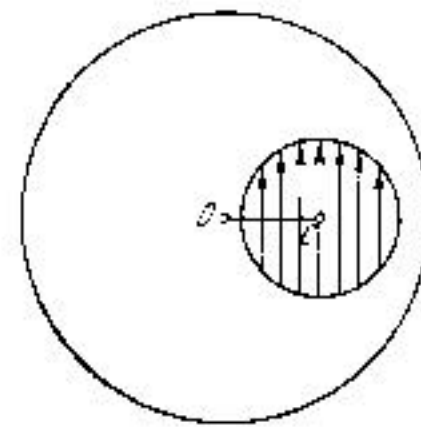


Fig. 465

nais. Isto significa que $\angle AOC = \angle BAD$. Mas $R : B_1$ e, consequentemente, $R \perp d$. A indução do campo magnético, em qualquer ponto da cavidade, é perpendicular à linha, que une o centro do condutor com o centro da cavidade. A distribuição correspondente das linhas está representada na fig. 465.

564. Qualquer setor do contorno circular Δl , encontra-se a uma mesma distância R do centro. Além disto, para qualquer setor Δl , o raio vetor R é perpendicular a Δl , i.é: $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$. Deste modo, a indução do campo magnético ΔB , criada no centro do arco pelo setor Δl , é igual a:

$$\Delta B = kI \Delta l / R^2.$$

A indução ΔB está dirigida perpendicularmente ao plano do círculo, e uma vez que todos os setores Δl criam no centro induções dirigidas ΔB , então, a indução resultante do campo magnético expressa-se pela soma:

$$B = \sum \Delta B = \sum kI \frac{\Delta l}{R^2} = k \frac{I}{R^2} \sum \Delta l.$$

Considerando, que $\sum \Delta l = 2\pi R$, obtemos: $B = \frac{2\pi I}{R}$.

565. Determinemos a indução do campo magnético no ponto A , localizado a uma distância d do plano do contorno (fig. 466). A distância dos setores Δl , do ponto A simbolizaremos por r . Examinemos as induções ΔB_1 e ΔB_2 criadas por dois setores do contorno

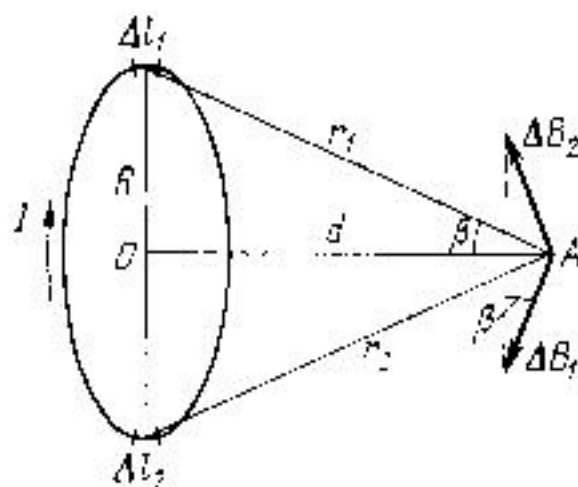


Fig. 466

Δl_1 e Δl_2 , que se encontram nos extremos opostos do diâmetro. Uma vez, que o ângulo α , entre r e Δl , é igual a $\pi/2$ (como o ângulo entre a geratriz do cone e um segmento da circunferência da base do mesmo), então (ver o problema 564):

$$\Delta B_1 = kI \Delta l_1 / r_1^2, \quad \Delta B_2 = kI \Delta l_2 / r_2^2.$$

Supondo, $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ e verificando que $r_1 = r_2$, obtemos que:

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = kI \Delta l / r^2.$$

A soma geométrica ΔB dos vetores ΔB_1 e ΔB_2 estará dirigida, ao longo do eixo da corrente circular a , numericamente, é igual à soma das projeções de ΔB_1 e ΔB_2 no eixo AO :

$$\Delta B = \Delta B_1 \sin \beta + \Delta B_2 \sin \beta = 2k \frac{I \Delta l}{r^2} \sin \beta.$$

Uma vez que $\sin \beta = R/r$, então

$$\Delta B = k \frac{2I \Delta l R}{r^3}.$$

Dividindo todo o contorno circular em pares de segmentos correspondentes Δl , obtemos, que a indução resultante do campo magnético está dirigida ao longo da corrente circular a , numericamente, é igual a soma:

$$B = \sum \Delta B = \sum k \frac{2I \Delta l R}{r^3} = k \frac{2IR}{r^3} \sum \Delta l.$$

Uma vez que: $\sum \Delta l = 2\pi R$, então:

$$B = \frac{kIR}{r^3} 2\pi R = k \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}.$$

566. O condutor BC não cria campo no ponto M . Segundo a regra formulada na observação do problema 564, o campo magnético, de qualquer segmento, do condutor BC deverá ser perpendicular a linha BM . Por isso, a presença de um campo diferente de zero no ponto M seria contrário à simetria do problema, uma vez que as direções perpendiculares a BM , são iguais. Já, que a intensidade do campo é proporcional à densidade da corrente, então, ao ligarmos o condutor, teremos que $H_1 = kI$. O campo dos condutores AB e BD somam-se. Consequentemente, depois da ligação do condutor BD , teremos:

$$H_2 = kI + kI/2,$$

onde: $H_1/H_2 = 2/3$.

567. Em um ponto arbitrário da linha AB , qualquer pequena elemento do condutor ACB pelo qual passa corrente, cria um campo magnético, perpendicular ao plano do desenho (ver o problema 566). Simetricamente ao mesmo, o segmento do condutor ADB cria um mesmo campo, mas dirigido em sentido oposto. O campo de dois segmentos, quaisquer, dispostos simetricamente, em virtude do acima enunciado, será igual a zero. Consequentemente, o campo, em um ponto arbitrário AB , criado por todo o condutor, será igual a zero, uma vez que a parte retilínea do condutor não cria campo em AB .
568. 1) As correntes I e i passam em um mesmo sentido. A força de atração mútua, entre o arco e condutor, a uma distância x um do outro, é igual a:

$$F = \frac{\mu_0 I i}{2\pi r} l.$$

A força resultante das forças de gravidade e elástica das molas está dirigida para baixo e é igual a $F = 2k(h - x)$. Na posição de equilíbrio $F = 0$, donde obtemos uma equação do segundo grau, relativamente a x . A solução da equação nos dá que:

$$x_1 = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}} \quad (\text{equilíbrio estável});$$

$$x_2 = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}} \quad (\text{equilíbrio instável}).$$

Se $h^2/4 < \mu_0 I_1 I_2 / 4\pi k$, i.é., $k < \mu_0 I_1 I_2 / \pi h^2$, o condutor será atraído ao arco.

2) As correntes I e i passam em sentidos opostos. O condutor é repellido e o equilíbrio será estável a uma distância:

$$x = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi k}}.$$

569. As forças que agem nos lados AB e DC são iguais em grandeza e têm direções opostas, a soma das mesmas é igual a zero. A força F_1 , com que a corrente I atua em AD , é igual a:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi x} a.$$

A força F_2 , que age em BC , é igual a:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi (x+h)} a.$$

As forças F_1 e F_2 estão dirigidas ao longo de uma reta em sentidos opostos, sendo que $F_1 > F_2$. Consequentemente, o contorno será atraído ao condutor com uma força:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 I I_1 a h}{2\pi (x+h)}.$$

570. Simbolizemos o comprimento do lado do quadrado por l . O momento das forças do campo magnético, que desloca o quadro da posição vertical, é igual a:

$$M = B I l^2 \cos \alpha.$$

No quadro que não se encontra na posição vertical e está inclinado em um ângulo α , age, também, o momento das forças de gravidade, que tende a voltar o quadro para a posição vertical. Este momento é igual a:

$$M' = 2\rho g S l^2 \sin \alpha.$$

A condição de equilíbrio do quadro é:

$$M = M', B I l^2 \cos \alpha = 2\rho g S l^2 \sin \alpha,$$

donde determinamos a indução do campo magnético:

$$B = \frac{2\rho g S}{I} \operatorname{tg} \alpha.$$

571. O momento magnético M , que age na bobina menor, por parte do campo do solenóide, é igual a $M = I N S B$, onde $B = \mu_0 n I$. Da condição de equilíbrio da balança, temos que $M = PL$ e deter-

$$\text{minuamos: } I = \sqrt{\frac{PL}{\mu_0 n N S}}.$$

572. Sob influência do campo magnético, o anel gira de tal modo, que as linhas de força do campo ficam perpendiculares ao plano do anel e formam, com a direção da corrente, um sistema da direita. Então, a tensão do anel será máxima. Utilizando o método aplicado na solução do problema 415, obtemos que: $F = BIR$.

573. Em um setor do anel Al age a força $\Delta F = B I \Delta l$ (fig. 467). Decompondo-a nas componentes ΔF_1 e Δf ; ΔF_1 ficará no plano do anel, e $\Delta f = \Delta F \sin \alpha$ será perpendicular ao plano do mesmo. A resultante das forças ΔF_1 , que agem em setores isolados do anel, é igual a zero. Estas forças somente distendem o anel. A força total f , que atua no anel, é igual à soma das forças Δf :

$$f = \sum_i B I \sin \alpha \cdot \Delta l_i = B I 2n R \sin \alpha.$$

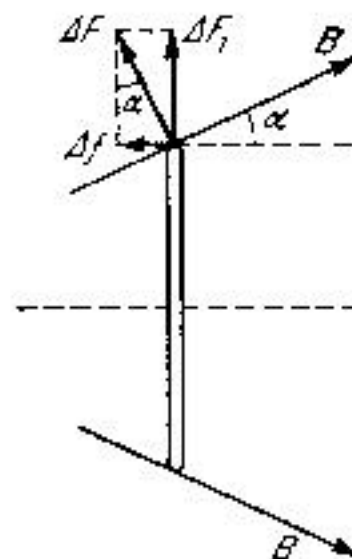


Fig. 467

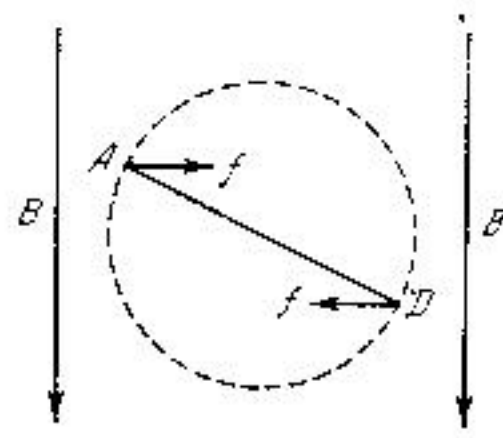


Fig. 468

574. As forças que atuam sobre os lados BC e AD são perpendiculares ao deslocamento destes lados, por isto, estas forças não realizam trabalho. As forças que agem nos lados AB e CD são constantes, formando um ângulo reto com a direção do campo e sa, numericamente, iguais a $f = B I a$ (fig. 468). O trabalho procurado será igual ao dobro do produto das forças, pelo deslocamento dos lados AB ou CD na direção da força. Este deslocamento, ao girarmos o círculo em 180°, é igual a b . Consequentemente, $A = 2B I a b$.

575. Decomponemos a velocidade de elétron nas componentes: paralelamente a B e $v_{\perp}$ perpendicularmente a B (fig. 469). $v_{\perp}$ não varia em grandeza nem em direção, uma vez que a força de Lorentz não atua em uma partícula, que possua velocidade, ao longo do campo. $v_{\perp}$ varia em direção, uma vez que graças a esta componente no elétron age a força de Lorentz, constante em grandeza e perpendicular à velocidade $v_{\perp}$. Por isso, a aceleração do elétron é, também, constante em grandeza e perpendicular à velocidade $v_{\perp}$. Mas o movimento com velocidade constante e aceleração constante perpendicular a esta velocidade, é nada mais que o movimento circular uniforme.

Deste modo, ao movimento uniforme de translação ao longo de B , soma-se, ainda, o movimento circular no plano perpendicular a B . Como resultado, surge o movimento pela espiral, com passo

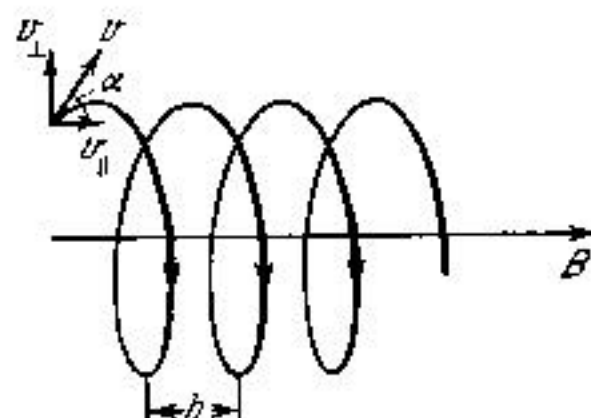


Fig. 469

$h = v_{\perp} \tau$, onde τ é o tempo de uma volta do elétron pela circunferência, cujo raio pode ser determinado, facilmente, e é igual a: $R = mv \sin \alpha / Be$. Uma vez que $\tau = 2\pi R / v_{\perp} = 2\pi m / Be$, então, $h = (2\pi m / Be) v \cos \alpha$.

576. Em consequência da ação da força de Lorentz, os elétrons deslocar-se-ão para o extremo da fita. Por isso, um dos extremos da fita estará carregado negativamente e o outro positivamente; no interior da fita surge um campo elétrico complementar, cuja intensidade E está dirigida perpendicularmente à corrente. O deslocamento dos elétrons permanecerá até o momento, em que a força de Lorentz não se tornar igual à força, que age no elétron por parte do campo elétrico: $eE = Bev$, donde: $E = Bv$. A diferença de potenciais $\varphi_A - \varphi_B = Ea = Bva$, ou uma vez que $I = nevS$, $\varphi_A - \varphi_B = BvI/S$.

577. A força de Lorentz age tanto nos elétrons livres, como nos íons positivos, que se encontram nos nós da rede cristalina, uma vez

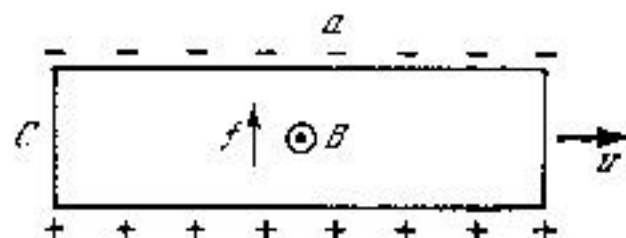


Fig. 470

que tanto os elétrons como os íons movem-se em um campo magnético. A força f , que age nos elétrons livres, segundo a regra da mão esquerda, estará dirigida como mostra a fig. 470. Os elétrons, relativamente a rede, deslocam-se, carregando-se, assim,

uma superfície lateral do paralelepípedo negativamente e a outra positivamente. Na barra surge um campo elétrico, e quando a intensidade deste campo satisfizer a igualdade $eE = Bev$, o deslocamento dos elétrons, relativamente à rede, cessa. A intensidade procurada é: $E = Bv$. A densidade de cargas σ determinamos da correlação $\sigma / e_0 = E$, consequentemente: $\sigma = Bev_0$.

578. A fim de que não surja um campo eletrostático, os elétrons, no movimento de rotação do cilindro, não deverão deslocar-se relativamente à rede cristalina. Este deslocamento não ocorrerá, se a força de Lorentz que atua sobre o elétron, for igual a $m\omega^2 r$, i. é., $m\omega^2 r = B e v$. Uma vez que $v = \omega r$, então, $B = m\omega^2 r / e$. O campo deverá estar dirigido no sentido do movimento progressivo da saca-rolha, cujo eixo gira na mesma direção que o cilindro.

579. $E = \frac{m\omega^2 r}{e} \mp \omega B$, onde a carga do elétron é igual a $(-e)$. E é positivo, se estiver dirigido desde o eixo do cilindro. Se a direção de B e a direção de rotação do cilindro formarem um sistema da direita, então, é necessário tomar o sinal negativo, em caso contrário, o sinal é positivo.

580. Uma vez que os íons atravessam os campos perpendiculares entre si, sem desvio, então, $Be = Bev = 0$, donde $v = E/B = 5000$ m/s. Posteriormente, cada íon mover-se-á por uma circunferência do diâmetro $2R = 2mc/B'e$, onde m é a massa do íon. Consequentemente, a distância procurada é igual a $\Delta(2R) = \frac{2\lambda \pi v}{e B'}$. Uma vez

que $\Delta m = 2$ unidades de massa atômica $= 2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Coul, $v = 5000$ m/s, $B' = 0,09$ N/(A·m), então:

$$\Delta(2R) = \frac{2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 5000}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,09} = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,15 \text{ mm}.$$

§ 23 INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA. CORRENTE ALTERNADA

581. 1,07 mV; o maior potencial existe na asa ocidental. Em todas as cargas elementares do avião atua a força de Lorentz. Esta força provoca o movimento dos elétrons de condução, do ocidente ao oriente. O movimento dos elétrons cessa, quando o trabalho da força de Lorentz torna-se igual ao trabalho das forças de campo elétrico, criada pelo deslocamento dos elétrons, i. é., quando for verificada a condição:

$$U = -vBl \quad (1)$$

(o sinal negativo significa que na direção do movimento dos elétrons o potencial diminui), onde l é o comprimento das asas; B é a indução do campo magnético; v é a velocidade de movimento do avião; U é a diferença de potenciais entre os extremos das asas. Salientamente, que a igualdade (1) é equivalente a relação $U = -\Delta\phi/\Delta t$, uma vez que $v l = \Delta S/\Delta t$ é a área ocupada pelas asas do avião, por unidade de tempo, e para $B = \text{const}$

temos que:

$$Bv\ell = BAS/\Delta t = \Delta\Phi/\Delta t$$

é a grandeza do fluxo de indução magnética, interceptado pelas asas do avião por unidade de tempo.

582. Os elétrons do condutor, do condutor AB , movem-se com velocidade v , encontrando-se em um campo magnético $\vec{B}$, consequentemente, nos mesmos age a força de Lorentz, dirigida ao longo do condutor do ponto B ao ponto A . A força de Lorentz, que atua sobre uma unidade de carga, neste caso, uma vez que $\vec{v} \perp \vec{B}$, é igual a: $F = Bv$. A força eletromotriz $\mathcal{E}$, por definição é numericamente igual ao trabalho, realizado sobre uma carga unitária positiva, no movimento em um circuito fechado. Uma vez que a força de Lorentz atua somente na seção AB , $\mathcal{E} = Bv\ell$. No circuito surge uma corrente:

$$I = \mathcal{E}/(r + R) = rBv\ell/(R + r).$$

Convençamo-nos facilmente de que o trabalho mecânico, realizado pelas forças externas, transforma-se totalmente em calor. O campo elétrico no circuito possui uma natureza eletrostática, i.é., as cargas superficiais são o fonte deste campo. A fim de determinarmos a diferença de potenciais $\varphi_A - \varphi_B$, apliquemos a lei de Ohm à seção do circuito AB :

$$\mathcal{E} + \varphi_A - \varphi_B = IR, \quad \varphi_A - \varphi_B = -Bv\ell R/(R + r).$$

Consequentemente, $\varphi_A < \varphi_B$. A intensidade E do campo eletrostático em um condutor móvel é igual a:

$$E = (\varphi_B - \varphi_A)/\ell = BvR/(R + r)$$

e está dirigida de B para A .

583. Suponhamos, que a velocidade de movimento do condutor, em um determinado instante de tempo, é igual a v . Então, a f.e.m., neste instante de tempo, será igual a $\mathcal{E} = Bv\ell$ e a corrente $I = Bv\ell/(R + r)$. Como consequência da ação do campo magnético no condutor com corrente, surge a força f , que impede a queda livre do condutor: $f = B^2\ell^2 v/(R + r)$. Consequentemente, no dado instante de tempo, a aceleração determina-se da relação:

$$ma = mg - f = mg - B^2\ell^2 v/(R + r).$$

Vemos, facilmente, que a aceleração, a medida do aumento da velocidade, diminuirá, e no momento, em que se verifica a igualdade das forças $f = mg$, a aceleração tornar-se-á igual a zero. O condutor, a partir deste instante, mover-se-á com velocidade constante: $v_k = mgR/(B^2\ell^2)$.

584. A f.e.m. induzida, que surge no condutor, é: $\mathcal{E} = Bv\ell$. A carga nas placas do condensador determina-se da relação: $Q = \mathcal{E}C = Bv\ell C$. A corrente, que passa pelo circuito, é: $I = \Delta Q/\Delta t = B\ell C \Delta v/\Delta t = B\ell C a$, onde a é a aceleração procurada. Como consequência da interação desta corrente com o campo magnético surge a força F_1 , que age sobre o condutor móvel. Baseando-se na regra de Lenz, esta força estará dirigida em sentido oposto à força F . Em grandeza $F_1 = BIl = B^2\ell^2 Ca$. A aceleração procurada pode ser determinada da relação: $ma = F - F_1$, donde

$a = F/(m - B^2\ell^2 C)$ é uma grandeza constante. O trabalho da força F , no trajeto S , será utilizado para o aumento da energia cinética do condutor e para o aumento da energia eletrostática do condensador.

585. Ao variar o fluxo magnético, que penetra no contorno, em uma pequena grandeza $\Delta\Phi$, em um intervalo de tempo Δt , no mesmo induz-se uma f.e.m. $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$ e passará uma corrente, qual poderá ser considerada constante, graças ao pequeno intervalo de tempo Δt . Consequentemente, a carga, que passa pelo aparelho no tempo Δt , é igual a:

$$Q = \int_{\Delta t} I dt = \int_{\Delta t} \mathcal{E}/R dt = -\Delta\Phi/R,$$

onde R é a resistência do contorno; a carga só depende da variação do fluxo no tempo Δt . A carga total, que passa pelo aparelho, é igual a soma das cargas elementares ΔQ :

$$Q = \sum \Delta Q = -\sum (\Delta\Phi/R) = -(\sum \Delta\Phi)/R.$$

A variação do fluxo magnético, em ambos os casos, tem um mesmo sinal (o fluxo diminui), mas, no primeiro caso, o fluxo varia, de um determinado valor positivo, a outro menor, do que o valor positivo. No segundo caso, a variação do fluxo ocorre de um valor inicial até zero, e a seguir até um valor qualquer negativo. Deste modo, no segundo caso, a variação total do fluxo é maior do que no primeiro e, consequentemente, no segundo a carga, que passa pelo aparelho, é maior.

586. Em base à lei de indução eletromagnética e à lei de Ohm, temos que:

$$\Delta Q = I\Delta t = \Delta\Phi/R, \text{ ou } Q = (\Phi_1 - \Phi_2)/R.$$

Uma vez que o fluxo magnético inicial é $\Phi_1 = BS_n$ e o final é $\Phi_2 = 0$, a quantidade de eletricidade, que passa, será igual a: $Q = BS_n/R$.

587. Uma vez que a f.e.m. induzida é: $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$, então:

$$I_{\text{ind}} = \frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (1)$$

onde Φ é o fluxo magnético que penetra no circuito $ABCD$. Se desprezarmos a indutância deste contorno, então:

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I a^2 \Delta x}{2\pi r(r+b)},$$

onde Δx é a distância, na qual desloca-se o contorno, no tempo Δt . Colocando nesta igualdade $\Delta x = v\Delta t$ e substituindo o resultado obtido em (1), obtemos que:

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi r(r+b)} \frac{Iv}{r}.$$

A corrente I_{ind} estará dirigida no sentido horário.

588. Segundo a lei de Faraday, temos que $\mathcal{E}_i = \Delta\Phi/\Delta t = kS$. A f.e.m. induzida é numericamente igual ao trabalho realizado pelo campo elétrico, no deslocamento de uma carga unitária

positiva ao longo de uma espira, i.é.: $\mathcal{E}_1 = 2\pi r \cdot E$, donde $E = \mathcal{E}_1/2\pi r$. Deste modo, obtemos finalmente que:

$$E = k\pi r^2/2\pi r = kr/2.$$

É necessário frisar que o campo elétrico dado não é criado pelas cargas elétricas, mas, sim, pelo campo magnético, que varia com o tempo. Lembremos, que o trabalho realizado por um campo eletrostático, no deslocamento de uma carga elétrica em um circuito fechado, é sempre igual a zero. Nós entendemos por campo eletrostático, um campo elétrico criado por cargas eletrostáticas.

589. Dividamos o anel em $n = (b - a)/\delta$ anelzinhos de largura δ cada um. Analisemos um anelzinho de altura h , de raio interno igual a x e raio externo igual a $(x + \delta)$. Se δ é pequeno, em comparação com x , então, a resistência de tal anel pode ser expressa pela fórmula:

$$R = \rho 2\pi x \delta h.$$

A grandeza da f.e.m. induzida, que atua sobre este anel (nas condições em que $\delta \ll x$) é igual a $\mathcal{E} = \Delta\Phi/\Delta t = \pi r^2 k$. A corrente, que passa por tal anel, é igual a:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi r^2 k \delta h}{\rho 2\pi x} = \frac{k \delta h x}{2\rho}.$$

A fim de determinarmos a intensidade da corrente, que passa por todo o anel, é necessário determinar qual é a soma do seguinte tipo:

$$I = \frac{k h \delta}{2\rho} \{a + (a + \delta) + (a + 2\delta) + \dots + [a + (n-1)\delta]\}.$$

A expressão entre parênteses é uma progressão aritmética. Em virtude disso, temos que:

$$I = \frac{k h}{2\rho} (b - a) \frac{2a + b - a}{2} = \frac{k h}{4\rho} (b + a).$$

Este resultado será tanto mais exato, quanto menor for a grandeza δ . Supondo, que δ tende a zero, teremos que:

$$I = \frac{k h}{4\rho} (b + a).$$

590. Na fig. 471 está indicada a direção do campo magnético e a f.e.m. induzida $\mathcal{E}$ (para $k > 0$). A metade à direita do anel tem resistência R_2 e a esquerda, a resistência R_1 . A f.e.m. induzida foi determinada no problema 588: $\mathcal{E} = k\pi r^2$. A intensidade da corrente, segundo a lei de Ohm, é igual a:

$$I = \mathcal{E}/(R_1 + R_2) = k\pi r^2/(R_1 + R_2).$$

Como sabemos, o campo elétrico é criado pelas cargas elétricas (campo eletrostático), assim como, pelo campo magnético, que

varia com o tempo (campo rotacional). Simbolizemos por φ_a e φ_b os potenciais do campo eletrostático, nos pontos a e b , correspondentemente. Em base da lei de Ohm, para a metade direita

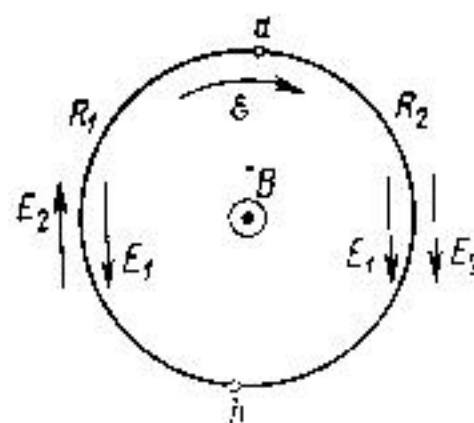


Fig. 471

do anel podemos escrever:

$$\varphi_a - \varphi_b + 1/2\mathcal{E} = IR_2$$

e para a metade esquerda:

$$\varphi_b - \varphi_a + 1/2\mathcal{E} = IR_1,$$

donde determinamos que:

$$\varphi_a - \varphi_b = k\pi r^2 \frac{R_2 - R_1}{2(R_2 + R_1)}.$$

De este modo, se $R_2 > R_1$, então, $\varphi_a > \varphi_b$ e de (1), facilmente, determinamos a intensidade do campo eletrostático E_1 :

$$E_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\pi r} = kr \frac{R_2 - R_1}{2(R_2 + R_1)}.$$

A intensidade do campo elétrico E_2 , criado pela variação do campo magnético, que varia com o tempo, foi calculada no problema 588. A mesma é igual a $E_2 = kr/2$. (Na figura, estão indicadas a direção das intensidades, na metade à direita e na metade à esquerda para os casos em que $R_2 > R_1$).

591. Na malha ABCD atua uma f.e.m. induzida $\mathcal{E}_1 = ka^2$ e na malha BEFC, uma f.e.m. induzida $\mathcal{E}_2 = kb^2/2$. Um circuito equivalente, mais simples, com pilhas que substituam as f.e.m. induzidas, para a nossa rede, tem a forma representada na fig. 472. Em base da lei de Ohm, podemos escrever que:

$$I_3 ar = \mathcal{E}_1 - I_1 3ar - I_2 2ar = \mathcal{E}_2.$$

Em consequência da conservação da carga e constância do potencial, temos que $I_1 = I_2 + I_3$. Do sistema dado de equações,

podem ser determinadas, facilmente, todas as três correntes:

$$I_1 = \frac{6\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2}{22ar}, \quad I_2 = \frac{2\mathcal{E}_1 + 8\mathcal{E}_2}{22ar},$$

$$I_3 = \frac{2\mathcal{E}_1 - 3\mathcal{E}_2}{11ar}.$$

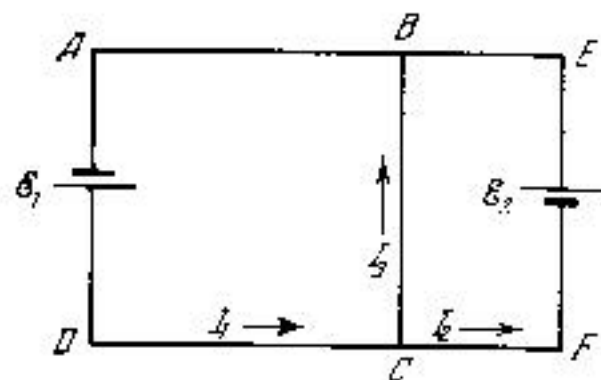


Fig. 472

Considerando as expressões para $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, teremos que:

$$I_1 = \frac{7}{22} \cdot \frac{ka}{r}, \quad I_2 = \frac{3}{11} \cdot \frac{ka}{r},$$

$$I_3 = \frac{1}{22} \cdot \frac{ka}{r}.$$

592. A diferença de potenciais entre quaisquer pontos do anel deverá ser igual a zero. Pois, caso contrário, entraremos em contradição, utilizando a lei de Ohm para uma seção curta e para uma seção longa do anel. Isso é também evidente, desde o ponto de vista dos conceitos de simetria. A ausência da diferença de potenciais significa, que o campo eletrostático, dentro do anel, é igual a zero. A corrente surge como consequência da presença da f.e.m. induzida, distribuída uniformemente ao longo do anel: $I = \dots = e_j r = \mathcal{E}_j R$, onde e_j e $\mathcal{E}_j$ são as f.e.m. induzidas nas seções curta e longa do anel, e r e R são, correspondentemente, as resistências das seções. Apesar da ausência de diferença de potenciais entre os pontos A e B, o eletrômetro indicará uma diferença de potenciais entre a barra e a armadura. O problema encerra-se no fato de que nos condutores AC e BD a corrente é igual a zero. Consequentemente, em cada ponto destes condutores, o campo elétrico alhoio de origem induzida, equilibra a intensidade do campo eletrostático, que surge em consequência da redistribuição de cargas nos condutores sob influência da f.e.m. induzida. O trabalho das forças eletrostáticas no deslocamento pelo circuito fechado ACDBA é igual a zero. Na seção AB não existe campo eletrostático. No deslocamento de uma carga pelos condutores AC e BD, o trabalho das forças eletrostáticas é igual à f.e.m. induzida nestes condutores e tem sinal contrário. Consequentemente,

para que o trabalho das forças eletrostáticas, ao longo de um circuito fechado, seja igual a zero, é necessário, que a diferença de potenciais entre os pontos C e D seja igual à f.e.m. induzida nos condutores AC e BD e tenha o sinal da mesma. Uma vez que a f.e.m. induzida, em um circuito fechado ACDBA, é igual a zero (o campo magnético não penetra neste circuito), então, para a seção AB a f.e.m. induzida é igual em grandeza e tem o sinal contrário à f.e.m. nos condutores AC e BD, se desprezarmos o trabalho das forças alhoias de indução, na seção entre a barra e a armadura do eletrômetro em comparação com o trabalho nos condutores AC e BD. Em virtude disso o eletrômetro indica uma diferença de potenciais aproximadamente igual à f.e.m. na seção AB.

593. A única diferença, em relação ao problema 592, é que a diferença de potenciais $U_A - U_B$ não é igual a zero. Escrevamos a lei de Ohm para todas as três seções do condutor, simbolizando as correntes nas seções ADB, AKB e ACB por I_1 , I_2 , I_3 e as f.e.m. induzidas, correspondentes, por $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + U_A - U_B}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + U_B - U_A}{R_2},$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_3 + U_A - U_B}{R_3}.$$

Pela lei da conservação da carga e pela condição de estabilidade, podemos escrever que: $I_2 = I_1 - I_3$. Somando as duas primeiras equações, teremos que:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}.$$

Subtraindo a primeira equação da terceira, obtemos:

$$I_3 R_3 - I_1 R_1 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1.$$

Mas a f.e.m. induzida no circuito ACBDA é igual a zero, uma vez que o campo magnético não penetra no mesmo. Consequentemente,

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, \quad I_3 R_3 - I_1 R_1 = 0.$$

O sistema de equações dá o seguinte valor para a corrente procurada:

$$I_3 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

594. Sendo a resistência R_3 diferente de zero, das equações do problema 593 podemos determinar:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3},$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}.$$

Se $R_2 = 0$, então, $I_1 = 0$, $I_2 = \mathcal{E}/R_2 = I_0$ e, no caso geral, teremos que:

$$U_A = U_B = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}$$

Para $R_3 = 0$

$$U_A = U_B = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_2},$$

sendo que $U_A = U_B = \mathcal{E}_1$ (uma vez que na seção ADB $I_1 = 0$), onde $\mathcal{E}_1$ é a f.e.m. induzida na seção ADB .

595. Nos condutores que formam o circuito, em consequência da variação do campo magnético em relação ao tempo, surge um campo elétrico (rotacional, i.e., não eletrostático). O trabalho deste campo elétrico, no deslocamento de uma carga positiva unitária, ao longo de todo o circuito, é numericamente igual à f.e.m. induzida, a qual nós simbolizaremos por $\mathcal{E}_1$. A mesma pode ser determinada em base da lei de Faraday, considerando a variação do fluxo magnético, relacionada com a variação da indução magnética em relação ao tempo. Então, obteremos que

$$\mathcal{E}_1 = k(S_0 + lvt) \quad (1)$$

Além disso, no movimento do condutor em um campo magnético, surge uma f.e.m., como resultado da ação da força de Lorentz nas cargas do condutor. Esta f.e.m. $\mathcal{E}_2$ é igual a:

$$\mathcal{E}_2 = vBl = vl(B_0 + kt).$$

A f.e.m. resultante $\mathcal{E}$ que age no circuito, é igual a:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = k(S_0 + lvt) + vl(B_0 + kt).$$

$\mathcal{E}$ pode ser obtida da lei de Faraday, considerando, simultaneamente, ambas as causas que provocam o surgimento da mesma. Então, é necessário escrever que $\mathcal{E} = \Delta\Phi/\Delta t$, onde: $\Phi = (B_0 + kt)(S_0 + lvt)$. Uma vez que:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= [B_0 + k(\Delta t)] [S_0 + vl(\Delta t + \Delta t)] - \\ &= (B_0 + kt)(S_0 + vl\Delta t) - B_0 vl\Delta t + kS_0 \Delta t + \end{aligned}$$

$$= 2kvl\Delta t + kvl(\Delta t)^2,$$

então,

$$\Delta\Phi/\Delta t = B_0 vl + kS_0 + 2kvl + kvl\Delta t.$$

Quando Δt tende a zero, teremos:

$$\Delta\Phi/\Delta t = B_0 vl + kS_0 + 2kvl$$

e deste modo:

$$\mathcal{E} = k(S_0 + lvt) + vl(B_0 + kt) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

A intensidade da corrente determinamos em base da lei de Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{kS_0 + 2kvl + vlB_0}{R}.$$

A corrente no circuito está dirigida de a para b .

596. Em ambos os casos, o equilíbrio é estabelecido, se o momento das forças, que atuam desde o campo magnético na corrente induzida no anel, é igual a zero, ou não existe corrente induzida. Isto ocorrerá, quando o plano do anel estiver localizado ao longo das linhas de força do campo (a corrente induzida é igual a zero), ou, então, quando o plano do anel for exatamente perpendicular às linhas de força (o momento das forças é igual a zero). De acordo com a regra de Lenz, no campo magnético crescente, a primeira posição do anel será estável e a segunda instável. No campo magnético decrescente ocorre o contrário, o equilíbrio será estável se houver um ângulo reto entre o plano do anel e as linhas de força, e será instável, quando o plano do anel estiver paralelo às linhas de força.

597. Uma vez que, segundo a condição, a tensão do campo magnético é diretamente proporcional ao tempo, temos que: $H = (N/l)kt$, então, a f.e.m. autoinduzida é igual a:

$$\mathcal{E}_i = \mu_0 (N^2/l) kS \quad (S = \pi r^2)$$

e está dirigida contrariamente a corrente. A tensão nos terminais do solenóide deverá ser igual a:

$$U = \mu_0 (N^2/l) kS + kRl.$$

Neste caso, $I = (U - \mathcal{E}_i)/R = kt$.

598. Para $R = 0$ a f.e.m. autoinduzida $\mathcal{E}_i$ permanece constante, uma vez que a tensão nos terminais do solenóide é $U = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}$. Da solução do problema 597, deduzimos, que, sendo $\mathcal{E}_i$ constante, a corrente varia proporcionalmente ao tempo: $I =$

$$kt, \text{ sendo que } k = U/\mu_0 S N^2. \text{ Consequentemente, } I = \frac{\mathcal{E}_i}{\mu_0 S N^2} t.$$

Se a resistência é finita e não é igual a zero, a corrente aumentará de acordo com essa mesma lei até o momento em que a queda de tensão IR na resistência R for suficientemente pequena em comparação com $\mathcal{E}_i$.

599. O trabalho da bateria em um tempo τ será igual a $A = \mathcal{E}Q$, onde Q é a quantidade de eletricidade que passa em um tempo τ pelo solenóide. A corrente no solenóide cresce diretamente proporcional ao tempo: $I = \frac{\mathcal{E}t}{\mu_0 S N^2}$ (ver a solução do problema 598). Por isso, Q será igual ao produto da intensidade média da corrente $(I_i + I_f)/2$ ($I_i = 0$), pelo tempo τ , ou será, numericamente, igual à área do triângulo sombreado (ver a fig. 473):

$$Q = \frac{\mathcal{E}\tau^2}{2\mu_0 S N^2},$$

donde o trabalho será igual a:

$$A = \frac{\mathcal{E}^2 \tau^3}{2\mu_0 S N^2}.$$

Este trabalho será utilizado no aumento da energia do campo magnético. Nós podemos escrever que $A = W$, onde W é a energia

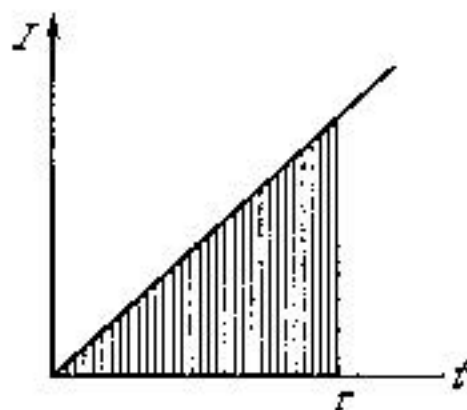


Fig. 473

do campo magnético. Considerando, que $H = (N/l) I$ e colocando a expressão para a corrente, esta energia pode ser apresentada na seguinte forma: $W = \frac{\mu_0 H^2}{2} Sl$.

600. Uma vez que a resistência do anel é igual a zero, a f.e.m. resultante no mesmo deverá sempre ser igual a zero. Isto pode ocorrer, somente, no caso em que a variação do fluxo magnético total, que penetra no anel, seja igual a zero. Consequentemente, a variação do fluxo magnético externo Φ_0 é igual em grandeza e tem sinal contrário à variação do fluxo magnético criado pela corrente induzida: $\Delta\Phi_0 = L\Delta I$. Considerando, que o fluxo Φ_0 aumenta de 0 até $\pi r^2 B_0$ e a corrente induzida varia nesse caso de 0 até I , obtemos que $\pi r^2 B_0 = LI$, donde $I = \pi r^2 B_0 / L$.
601. O fluxo magnético através do anel não pode variar (ver o problema 600). Consequentemente, $\Phi = \pi r^2 B$. Inicialmente, este fluxo era criado pelo campo magnético externo, e depois de desligarmos o mesmo, o fluxo foi criado pela corrente induzida no anel.
602. Se a resistência ômica do anel puder ser desprezada, o fluxo total da indução magnética, através do anel, não variará (ver o problema 600). Isto significa, que o campo das correntes induzidas no anel estará sempre dirigido em sentido contrário ao campo do eletroímã. Consequentemente, o anel será repellido.
603. Se pelo enrolamento do solenóide passa uma corrente I , então, pela definição do coeficiente de autoindução L , o fluxo de indução magnética Φ , através do solenóide, é igual a:

$$\Phi = LI. \quad (1)$$

O fluxo de indução magnética é:

$$\Phi = BSN,$$

onde B é a indução do campo magnético do solenóide; S é a secção de cada espira, N é o número total de espiras do solenóide. Como sabemos, a indução do campo magnético dum solenóide

longo ($d \ll l_0$) é igual a:

$$B = \mu_0 n I,$$

onde n é o número de espiras, por unidade de comprimento do solenóide. Nas condições de nosso problema, temos que:

$$N = \frac{l}{\pi d}, \quad n = \frac{l}{\pi d} \cdot \frac{1}{l_0}.$$

O fluxo da indução magnética Φ , consequentemente, é igual a:

$$\Phi = \mu_0 \frac{l}{\pi d l_0} \cdot \frac{l}{\pi d} \cdot \frac{\pi d^2}{4} I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l^2}{l_0} I. \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), encontramos que

$$L = \frac{\mu_0}{4} \frac{l^2}{l_0}.$$

604. Pela definição, o fluxo magnético, através dum solenóide, é igual a: $\Phi = BSN$, onde B é a indução do campo magnético do solenóide; S é a secção de cada espira; N é o número de espiras do solenóide. Como sabemos (ver o problema 603), a indução B do solenóide, pela qual passa corrente I , é igual a: $B = \mu_0 (N/l) I$, onde l é o comprimento do solenóide, e, então, $\Phi = \mu_0 (N^2/l) SI$. Uma vez que nas condições do problema dado, $I = \text{const}$, a variação do fluxo magnético $\Delta\Phi$ ocorre somente devido à variação do comprimento do solenóide (da geometria do mesmo). Em outras palavras, o fluxo, através do solenóide ($\Phi = LI$), variará devido à variação do coeficiente de autoindução L :

$$\Delta\Phi/\Delta t = \Delta(LI)/\Delta t = I\Delta L/\Delta t.$$

Para manter-se a corrente constante, ao distendarmos o solenóide, devemos variar a diferença de potenciais nos extremos do mesmo em uma grandeza, em qualquer instante, igual e oposta à f.e.m. autoinduzida $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$.

Calculemos $\Delta\Phi/\Delta t$. Para isto é suficiente calcular $\Delta L/\Delta t$:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \mu_0 N^2 S \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{l_0 + vt} - \frac{1}{l_0 + v(t + \Delta t)} \right) \right].$$

Quando Δt tende a zero, teremos que:

$$\Delta L/\Delta t = \mu_0 N^2 S v / (l_0 + vt)^2.$$

O solenóide alongará duas vezes no tempo t_1 , o qual pode-se determinar facilmente da igualdade $l_0 + vt_1 = 2l_0$, donde: $t_1 = l_0/v$ e no momento t_1 , temos que:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I \frac{\Delta L}{\Delta t} = I \frac{\mu_0 N^2 S v^2 (\pi d^2/4) v}{4l_0^2} \approx 0,004 \text{ V}.$$

Em tal grandeza, é necessário variar a diferença de potenciais nos extremos do solenóide.

$$605. U = B_0 \pi r^2 N \omega \sin \omega t.$$

$$606. U_{AB} = B_0 \pi r^2 N \omega \sin \omega t,$$

$$I = U_{AB}/R = (B_0 \pi r^2 N \omega / R) \times$$

$$607. I = B_0 \pi r^2 N \omega \sin (\omega t - \varphi), \text{ onde } \operatorname{tg} \varphi = 1/\omega CR; U_{AB} = -[B_0 \pi r^2 N \omega \cos (\omega t - \varphi)]/\omega C = [B_0 \pi r^2 N \cos (\omega t - \varphi)]/C;$$

608. 1) Uma vez que os extremos A e B estão desligados, pela seção AC não passa corrente. Consequentemente, a queda de tensão na seção AC é igual a zero. Por isso a tensão é $U_2 = U_1$.
2) No caso, em que entre os pontos B e C foi aplicada uma diferença de potenciais variável, a corrente, que passa pela seção BC, cria um fluxo magnético variável, que induz, na seção AC, uma f.e.m. de indução. Uma vez que $L\omega \gg R$, então, a amplitude da f.e.m. induzida também será igual a U_1 . Por isso, a amplitude da tensão U_2 , entre os pontos A e B, será igual a $2U_1$ (autotransformador de aumento da tensão).

609. O método mais inconveniente é o terceiro, uma vez que as correntes de Foucault circulam nos planos das espiras do enrolamento, não encontrando, neste caso, a camada isolante. O primeiro método permite livrar-se de uma grande parte das correntes rotacionais, entretanto, não de todas, uma vez que em uma camada do enrolamento do autotransformador, existem, de facto, muitas espiras em redor do núcleo e uma espira ao longo do mesmo. O melhor é o segundo método, que é utilizado na prática.

610. Uma vez que $R = 0$, então, a corrente I está retardada em fase, em relação à tensão U , em uma grandeza igual a $\pi/2$. Os gráficos $U = U_0 \sin \omega t$, $I = I_0 \sin (\omega t - \pi/2)$ e a potência instantânea $W = UI$ estão representados na fig. 474. O sinal de W

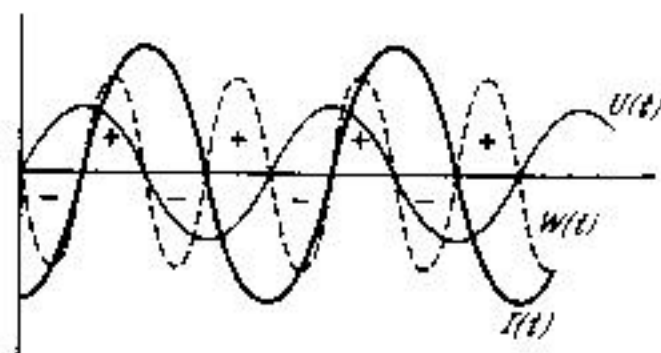


Fig. 474

varia em cada 1/4 do período. O valor positivo de W corresponde à energia recebida da fonte pela bobina. O valor negativo de W corresponde à energia emitida da bobina para a fonte. Em média, em um período, a bobina não utiliza a potência; a potência média é igual a zero.

611. A grandeza da corrente contínua, que irradia num condutor a mesma quantidade de calor, que a alternada, em um mesmo intervalo de tempo, denomina-se grandeza efetiva da corrente alternada. Calculemos a quantidade de calor irradiada em um

período:

$$Q = I_0^2 RT/8 + I_0^2 RT/8 = I_0^2 RT/4,$$

por outro lado, $Q = I_{ef}^2 RT$, donde $I_{ef} = I_0/2$.

612. Ao passarmos corrente elétrica alternada, por um condutor, a quantidade de calor irradiada é igual a $W = I_{ef}^2 Rt$. A expressão para a quantidade de calor irradiada, também, tem a seguinte forma $W = (U_{ef}^2/R)t$, sendo válida, somente, quando verifica-se a lei de Ohm em sua forma comum: $I = U/R$. No enrolamento do transformador é muito grande a resistência indutiva, por isso, a lei de Ohm em sua forma comum e, consequentemente a expressão $W = (U_{ef}^2/R)t$ não podem ser utilizadas. A quantidade de calor irradiada é pequena, uma vez que é pequena a intensidade de corrente e é pequena a resistência ôhmica do enrolamento.

613. Se $L\omega \gg R$, então, a diferença de fases entre a corrente e a tensão é muito grande e a potência utilizada pela rede não pode ser grande. A ligação dos condensadores diminui esta defasagem, uma vez que a corrente, através do condensador, adianta em relação à tensão, compensando o atraso da corrente em fase nos aparelhos com grande indutância. Como resultado, a potência utilizada pela rede aumenta.

$$614. W = (U^2 - U^2 - U^2)/2R.$$

615. O solenóide, com um número de espiras N_1 , simbolizaremos pelo índice 1 e o solenóide, com um número de espiras N_2 , simbolizaremos pelo índice 2. A indução do campo magnético do solenóide 1 é igual a:

$$B_1 = \mu_0 (N_1/l) I.$$

Este campo cria, através do solenóide 2, um fluxo magnético igual a:

$$\Phi_{12} = B_1 S N_2 = \mu_0 (N_1 N_2/l) SI,$$

donde, para o coeficiente de indução mútua L_{12} obtemos a expressão:

$$L_{12} = \mu_0 (N_1 N_2/l) S. \quad (1)$$

Analogamente, obtemos a expressão para o fluxo de indução magnética Φ_{21} , criado pelo solenóide 2 em que penetra na bobina 1:

$$\Phi_{21} = \mu_0 (N_2 N_1/l) SI,$$

donde, para o coeficiente de indução mútua L_{21} , obtemos a expressão:

$$L_{21} = \mu_0 (N_2 N_1/l) S. \quad (2)$$

De (1) e (2) determinamos que $L_{12} = L_{21}$.

616. A velocidade de variação do fluxo magnético é constante e, consequentemente, é constante a f.e.m. induzida na bobina. Se a bobina for ligada a um circuito fechado, então, pela mesma, passará corrente contínua. Igualmente como qualquer outra corrente contínua, a mesma não estabelece-se de imediato. O tempo de estabelecimento da mesma é determinado pelo coeficiente de autoindução da bobina e pela resistência da mesma.

617. O fluxo total da indução magnética Φ , que penetra em um anel supercondutor, como mostra a solução do problema 600, não poderá variar. Em consequência disto, quando os anéis se aproximam, o aumento do fluxo, à custa da indução mútua, é compensado pela diminuição do mesmo, como resultado da diminuição da corrente que passa pelo anel. Para uma grande distância, entre os anéis, a indução mútua dos mesmos pode ser desprezada e, então, $\Phi = LI_0$, onde L é a indutância do anel. Quando os condutores são colocados juntos um do outro, então o fluxo magnético, através de cada anel, será igual a: $\Phi = 2LI$, onde I é a corrente procurada. Consequentemente, $I = I_0/2$, i.e., as correntes nos anéis diminuirão em duas vezes.

618. Suponhamos, que em um momento inicial, a corrente I_{01} no primeiro anel seja maior do que a corrente I_{02} no segundo anel. Ao aproximarmos os anéis, as correntes nos mesmos diminuirão (ver o problema 617). Em um determinado momento de tempo, a corrente I_1 tornar-se-á igual a zero e, consequentemente, tornar-se-á igual a zero a força de interação dos anéis. Entretanto, por inércia, os anéis continuarão aproximando-se. No segundo anel surge uma corrente em sentido contrário à corrente inicial, e a corrente no primeiro anel começa a aumentar. Então, os fluxos da indução magnética através de cada anel permanecerão invariáveis. Entre os anéis surge uma força de repulsão e, em consequência disto, o movimento dos mesmos começa a frear. Aproximarmos os anéis, até os mesmos ficarem juntos, não podemos, uma vez, que para isto, simultaneamente, deverão ser verificadas as igualdades:

$$LI_{01} = LI_1 + MI_2, \quad LI_{02} = MI_1 + LI_2,$$

o que é possível somente, para $I_{01} = I_{02}$. Os anéis param, em um instante, a uma distância qualquer um do outro, e depois começam a distanciar-se. Neste caso, diminuirá a corrente I_2 no segundo anel até o momento, em que a mesma não se tornará igual a zero. Para $I_2 = 0$, a corrente I_1 adquirirá o mesmo valor, que tivera na aproximação dos anéis no momento em que cessou a corrente I_2 . A seguir começa a aproximação dos anéis, etc. O processo repetir-se-á periodicamente.

619. A tensão nos terminais da bobina primária U_1 , se desprezarmos a resistência ôhmica da mesma, pode ser representada como a soma da força das forças de autoindução deste enrolamento, e da fem induzida, que provoca, na mesma, a corrente que passa pela bobina secundária:

$$U_1 = L_1 \Delta I_1 / \Delta t + M \Delta I_2 / \Delta t.$$

O sinal negativo surge como consequência do que as correntes I_1 e I_2 possuem fases opostas. Se as correntes variarem pela lei $I_1 = I_{01} \sin \omega t$, e $I_2 = I_{02} \sin \omega t$, então:

$$\Delta I_1 / \Delta t = \omega I_{01} \cos \omega t, \quad \Delta I_2 / \Delta t = \omega I_{02} \cos \omega t.$$

Uma vez que a tensão U_1 possui um deslocamento de fase relativamente à corrente I_1 , $\pi/2$, então, podemos escrever que $U_1 = U_{10} \cos \omega t$.

Dividindo a expressão para U_1 em $L_1 \omega \cos \omega t$, teremos

$$\frac{U_{01}}{L_1 \omega} = I_{01} + \frac{M}{L_1} I_{02}.$$

$U_{01}/L_1 \omega$ é o valor da corrente secundária em um circuito aberto, se não considerarmos a resistência ôhmica do enrolamento. Desprezando o valor da corrente secundária em um circuito aberto, determinamos que $I_{01}/I_{02} = M/L_1$. Utilizando a expressão para os coeficientes de autoindução e indução mútua obtemos que $I_1/I_2 = I_{01}/I_{02} = N_2/N_1$.

620. A indução do campo resultante dentro do solenóide é igual a:

$$B = B_1 \pm B_2 = \frac{\mu_0}{l} (N_1 I_1 \pm N_2 I_2),$$

onde a escolha do sinal, positivo ou negativo, depende de que as correntes forem um mesmo sentido, ou sentidos opostos, nos solenóides. A energia W do campo resultante, em todo o volume dentro dos solenóides, é igual a:

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl = \frac{\mu_0 S}{2l} [N_1 I_1 \pm N_2 I_2]^2 = \frac{\mu_0 S}{2l} (N_1^2 I_1^2 \pm 2N_1 N_2 I_1 I_2 + N_2^2 I_2^2).$$

Utilizando as expressões para as indutâncias L_1 e L_2 dos solenóides $L_1 = \mu_0 (N_1^2/l) S$, $L_2 = \mu_0 (N_2^2/l) S$ e a expressão para o coeficiente de indução mútua $L_{12} = \mu_0 (N_1 N_2/l) S$, a energia magnética dos solenóides pode ser escrita da seguinte forma:

$$W = 1/2 L_1 I_1^2 + 1/2 L_2 I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2.$$

O primeiro termo desta fórmula é a energia própria da corrente I_1 , o segundo termo, determina a energia própria da corrente I_2 . A presença do terceiro termo demonstra, que a energia das duas correntes nos circuitos, que possuem uma ligação magnética, difere-se da soma das energias próprias das correntes na grandeza $W_{12} = \pm L_{12} I_1 I_2$. A mesma denota-se energia mútua das duas correntes.

621. As semiondas positivas da corrente carregam o condensador até uma amplitude de tensão igual à amplitude da rede urbana que é igual a $127\sqrt{2} \text{ V} \approx 180 \text{ V}$, quando o diodo está fechado (não

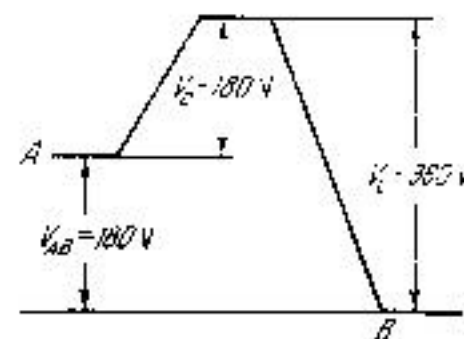


Fig. 4/5

passa corrente), ao mesmo está aplicada a tensão da rede (com amplitude de 180 V), mais a tensão do condensador carregado.

A variação do potencial ao longo do circuito neste instante de tempo, está representada na fig. 475. Se o retificador trabalha sem sobrecarga, então, o condensador deve ser calculado para uma tensão de ruptura, não menor do que 480 V e o diodo, para uma tensão de ruptura, não menor do que 360 V.

§ 24. MAQUINAS ELETRICAS

622. Se a frequência da corrente alternada permanece a anterior, então, isto significa, que permanecem o mesmo o número de rotações do motor e do gerador. Por isso, não variou também a f.e.m. do gerador. Para uma grande resistência externa, no circuito passará menos corrente, ou seja, irradiar-se-á uma potência menor. Consequentemente, a potência do motor, que aciona o gerador, deverá diminuir.
623. Ao ligar o condensador C no circuito de corrente alternada, ocorrerá a recarga periódica do condensador. A carga, que passa pelas placas da armadura do condensador, será tanto maior, quanto maior for a capacidade do condensador C . Uma vez que na metade do período esta carga deverá substituir-se pela carga de sinal oposto, então, a corrente que passa pelo circuito deverá ser proporcional à frequência. Assim, para uma mesma amplitude da tensão alternada no condensador, a corrente no circuito com o condensador é proporcional à frequência e à capacidade do condensador ($I = \omega C U$). Podemos dizer por isso que o condensador possui uma resistência ôhmica, inversamente proporcional à frequência e à capacidade. Na união em paralelo teremos, que:

$$I = \sin \phi_1 C_1 U + \sin \phi_2 (C_1 + C_2) U.$$

Na união em série teremos:

$$I = \sin \phi_1 C_1 U = \sin \phi_2 \frac{C_1 C_2 U}{C_1 + C_2},$$

donde

$$\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = \frac{C_1}{C_2} + 2 = \frac{C_2}{C_1}.$$

624. O trabalho realizado pelo campo, no deslocamento dos condutores com corrente (enrolamentos do rotor, não é igual ao trabalho total do campo. Além do trabalho no deslocamento dos condutores, o campo magnético realiza um trabalho para frear os elétrons no condutor, o que conduz ao surgimento no enrolamento do rotor de uma f.e.m. induzida. A primeira parte do trabalho é positiva e a segunda é negativa. O trabalho resultante do campo magnético é igual a zero. A força eletromotriz na fonte, que cria uma corrente no rotor do motor, realiza um trabalho positivo, que compensa o trabalho negativo do campo magnético para frear os elétrons. O motor realiza um trabalho, em essência, à custa da energia da fonte que alimenta o mesmo.
625. A potência utilizada pelo motor é: $W = UI$; $I = \mathcal{E}_1 / IR$, onde $\mathcal{E}_1$ é a f.e.m. induzida, que surge no rotor. Consequentemente,

$$W = I \mathcal{E}_1 = I^2 R,$$

onde $I^2 R$ é a quantidade de calor, irradiada nos enrolamentos e $I \mathcal{E}_1$ é a potência contra a f.e.m. induzida. Ela é igual à potência mecânica W_1 desenvolvida pelo motor. Esta potência é $W_1 = (U \mathcal{E}_1 - I^2 R) / R$, uma vez que $I = (U - \mathcal{E}_1) / R$. Esta expressão tem um máximo para $\mathcal{E}_1 = U/2$. Consequentemente, o valor máximo é $W_1 = U^2 / 4R = 180$ V. O motor não pode desenvolver uma potência de 200 watts.

626. Segundo a solução do problema 625 $W_1 = U^2 / 4R$. Se o rotor do motor está fixo, então, a corrente que passa pelo enrolamento é $I = U/R$. A quantidade de calor, irradiada no enrolamento por unidade de tempo, é igual a $W = I^2 R = U^2 / R$. Consequentemente, $W = 4W_1$.
627. A intensidade da corrente, que passa pelo enrolamento do motor, será determinada pela f.e.m. da rede $\mathcal{E}$, pela resistência r da mesma e pela f.e.m. induzida $\mathcal{E}_1$, que surge no rotor do motor: $I = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_1) / r$. A diferença de potenciais $\mathcal{E}$, nos terminais do motor, é igual, em qualquer instante de tempo, a $\mathcal{E}_1$, uma vez que a resistência do enrolamento é igual a zero. Consequentemente, a potência $W = UI = \mathcal{E} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}^2 r$ determinase pela f.e.m. da rede, pela sua resistência r e por $\mathcal{E}_1$.
628. Para um motor de conexão em série a potência máxima desenvolvida (ver o problema 625) é:

$$W_{\max} = \frac{U^2}{4(R_1 + R_2)}$$

A potência utilizada pelo motor é:

$$W = UI = U \frac{U - \mathcal{E}_1}{R_1 + R_2} = \frac{U^2}{2(R_1 + R_2)},$$

uma vez que $\mathcal{E}_1 = U/2$. Consequentemente, o coeficiente de rendimento é $\eta = 1/2$. Para um motor derivado, temos que $W_{\max} = U^2 / 4R_1$. A potência utilizada é:

$$W = UI = U \left(\frac{U - \mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{U}{R_2} \right) = \frac{U^2}{2R_1 R_2} (R_1 + R_2),$$

consequentemente:

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 2R_1 / R_2},$$

i.é., é menor do que 50%.

629. Para uma velocidade dada de rotação, o momento das forças externas M que atuam sobre o rotor, é igual ao momento das forças que atuam sobre o rotor por parte do campo magnético. Uma vez que este último é proporcional ao produto da intensidade de corrente I no rotor pela indução do campo magnético B , então

$$M = \alpha IB \quad (\alpha = \text{const}). \quad (1)$$

A f.e.m. no enrolamento do rotor é proporcional à indução do campo magnético e ao número de rotações por segundo:

$$\mathcal{E}_i = \beta n B \quad (\beta = \text{const}). \quad (2)$$

A tensão U nos terminais do motor é igual a:

$$U = IR + \mathcal{E}_i = IR + \beta n B, \quad (3)$$

onde R é a resistência do enrolamento.

Ao ligarmos o motor sem carga, o momento das forças externas é determinado, somente, pelo atrito, o qual para boas rolímas é muito pequeno. Por isso, I e B , de acordo com a equação (1), são, também, pequenos (B é proporcional a I e diminui juntamente com a corrente). Da equação (3) deduz-se, que para pequenos valores de I e B são possíveis, somente, grandes valores de n . Por isso, o motor adquire um grande número de rotações.

630. Simbolizemos por l o comprimento e por d a largura da espira (fig. 476). A força F , que atua sobre o condutor de comprimento l ,

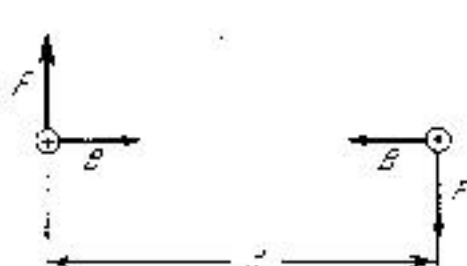


Fig. 476

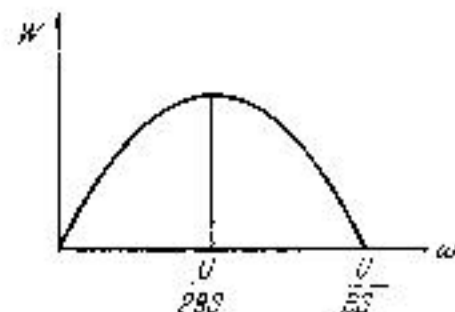


Fig. 477

é igual a $F = IlB$. Neste caso, a potência será:

$$W = 2lBlv = lBS\omega.$$

A intensidade I da corrente é determinada da expressão $I = (U - \mathcal{E}_i)/R$, onde $\mathcal{E}_i = BS\omega$. Finalmente, W pode ser escrita da seguinte forma:

$$W = \frac{BSU}{R} \omega - \frac{B^2 S^2}{R} \omega^2.$$

W atinge o valor máximo $W_{\text{máx}} = U^2/4R$ para $\omega = U/2BS$. Para isto, $\mathcal{E}_i = U/2$ e $I = U/2R$. Por unidade de tempo, a bateria realiza um trabalho igual a $U^2/2R$. Desta quantidade, metade é transformada em potência mecânica e a outra metade é irradiada em forma de calor. Na fig. 477 está representada, graficamente, a dependência de W em relação a ω .

631. $M = \frac{BSU}{R} - \frac{B^2 S^2}{R} \omega$. O momento será igual a zero, quando $\omega = U/BS$ (ver a fig. 478). Para isto, $I = 0$, uma vez que $\mathcal{E}_i = U$.

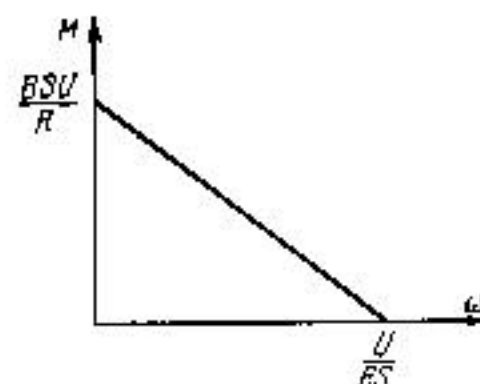


Fig. 478

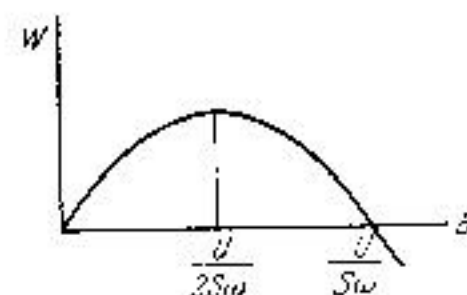


Fig. 479

632. O tipo da dependência de W em relação a U está representado na fig. 479. A potência atinge o valor máximo para $U = U/2$. Para isto, $\mathcal{E}_i = U/2$ e $W_{\text{máx}} = U^2/4R$.
633. O momento de rotação atinge seu valor máximo $M_{\text{máx}} = U/BS$ para $B = U/2S\omega$.
634. A potência de um motor derivado, como a de um motor de corrente contínua, é igual a $W = I\mathcal{E}_i = I^2 R$, onde R é a resistência do rotor (ver o problema 625). A potência $W = 10$ watt corresponde a dois valores de $\mathcal{E}_i$: $\mathcal{E}_1 = 80$ V e $\mathcal{E}_2 = 40$ V. Um ou outro valor é determinado pelas características próprias da construção do motor. Pela lei de Faraday $\mathcal{E}_i$ é diretamente proporcional ao número de rotações n do rotor por segundo e à indução do campo magnético criado pelo estator. Para o motor derivado esta indução não depende da sobrecarga. Por isso podemos escrever, que $\mathcal{E}_i = an$, onde a é uma grandeza constante, determinada pela construção do motor e pela tensão aplicada. Pelos dados do problema, obtemos que $a_1 = 8$ e $a_2 = 4$. $\mathcal{E}_i$ não pode ultrapassar 120 V. Consequentemente, o número máximo de rotações n_1 é igual a $n_1 = 15$ r.p.s., ou a $n_2 = 20$ r.p.s.
635. Se a tensão no estator for mantida constante, então, para uma velocidade dada de rotação do rotor, a f.e.m. induzida no rotor não dependerá do seguinte: se o rotor gira graças à ação do campo magnético do estator sobre o rotor, ou se o rotor foi colocado em rotação, com auxílio de uma transmissão mecânica. A potência desenvolvida pelo motor é $W = M\omega$. Em nosso caso $W = 100$ watt. A f.e.m. induzida $\mathcal{E}_i$ determina-se da equação $W = (U\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2)/R$ (ver o problema 625), donde:

$$\mathcal{E}_i = \frac{U}{2} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4} - WR}$$

e possui dois valores: $\mathcal{E}_1 = 80$ V e $\mathcal{E}_2 = 40$ V. A f.e.m. do gerador terá, também, estes dois valores. O resultado duplo está relacionado ao fato, de que uma mesma potência é obtida por um mesmo valor do produto $I\mathcal{E}_i$, e ao

- valor deste produto correspondem os dois pares possíveis de valores de I e $\mathcal{E}_i$. Um ou outro valor de $\mathcal{E}_i$, e, consequentemente, da corrente, é determinado pelas particularidades de construção do motor: número de espiras, a configuração das mesmas, etc.
636. A potência mecânica, desenvolvida pelo motor, é igual a:

$$M \cdot 2\pi n = \frac{U \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2}{R}$$

ver a solução do problema 625). A f.e.m. induzida no rotor é $\mathcal{E}_i = k B n$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade, determinado pela relação entre o número de espiras do enrolamento do rotor e a área do mesmo, e B é a indução do campo magnético do estator, diretamente proporcional à corrente. Excluindo $\mathcal{E}_i$ destas equações, determinamos que:

$$n = \frac{U}{k B} - \frac{2\pi M R}{k^2 B^2}.$$

A dependência de n em função da B está representada na fig. 489.

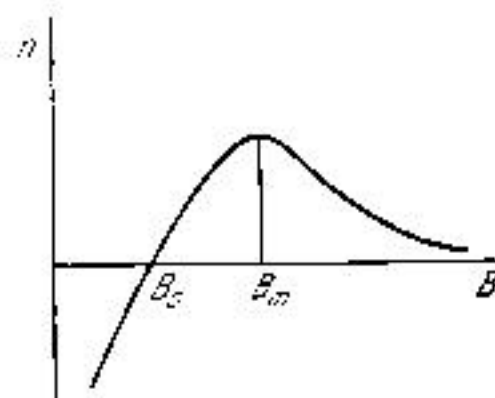


Fig. 489

Se $B \leq B_c = 2\pi M R / k U$, então, $n \leq 0$. Fisicamente, isto significa, que o rotor do motor não girará. Para $B = B_m = \frac{1}{2} \pi M R / k U$ o número de rotações é o máximo. Consequentemente, se $B_m > B > B_c$, então, no aumento da corrente nos enrolamentos do estator, o número de rotações aumenta e para $B > B_m$ o número de rotações diminui. Caso o motor trabalhe sem sobrecarga ($M = 0$), o número de rotações é $n = \frac{U}{k B}$, i.e. diminui obrigatoriamente com o aumento de B .

637. Os campos magnéticos B_1 , B_2 e B_3 podem ser escritos da seguinte forma:

$$B_1 = B_0 \sin \omega t, \quad B_2 = B_0 \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right), \\ B_3 = B_0 \sin \left(\omega t + \frac{4}{3} \pi \right).$$

Escolhamos os eixos das coordenadas x e y como está representada na fig. 220 e determinemos a soma das projeções das tensões dos campos nestes eixos:

$$B_x = B_0 \sin \omega t + B_0 \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \cos \frac{2}{3} \pi + \\ + B_0 \sin \left(\omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \cos \frac{4}{3} \pi,$$

$$B_y = B_0 \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \sin \frac{2}{3} \pi + B_0 \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \sin \frac{4}{3} \pi.$$

Fazendo algumas transformações, temos que

$$B_x = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t, \quad B_y = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t.$$

Estes valores das projeções serão verificados, somente, no caso, em que o vetor, que representa o campo magnético, gira com velocidade angular constante no sentido horário.

638. O fluxo do vetor da indução magnética através do quadro é igual a:

$$\Phi = B a b \cos(\omega t - \Omega t).$$

De acordo com a lei de indução eletromagnética, a f.e.m. induzida no quadro é igual a:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = B a b (\omega - \Omega) \sin(\omega t - \Omega t).$$

Consequentemente, a corrente no quadro varia com o tempo, segundo a lei:

$$I = \frac{B a b (\omega - \Omega) \sin(\omega t - \Omega t)}{R},$$

donde o valor da amplitude da corrente I , é igual a:

$$I_0 = \frac{B a b (\omega - \Omega)}{R}.$$

A dependência de I_0 em função da Ω , é linear.

639. O momento das forças M , aplicado ao quadro, é igual a:

$$M = I B a^2 \sin(\omega t - \Omega t).$$

De acordo com a solução do problema 638,

$$I = \frac{B a b (\omega - \Omega) \sin(\omega t - \Omega t)}{R},$$

e, consequentemente:

$$M = \frac{B^2 a^2 b^2 (\omega - \Omega) \sin^2(\omega t - \Omega t)}{R}.$$

O valor da amplitude do momento é:

$$M_0 = \frac{B^2 a^2 b^2 (\omega - \Omega)}{R}.$$

Semelhante dependência existe nos motores não sincronizados.

Oscilações e ondas

§ 25. OSCILAÇÕES MECÂNICAS

640. O centro de gravidade da tábua, na posição inicial de equilíbrio, encontra-se a uma altura y_C sobre o nível horizontal, no qual está colocado o eixo do cilindro, sendo, que $y_C = R + h/2$. Ao girarmos a tábua sem deslizamento em um pequeno ângulo φ , o centro de gravidade da mesma ocupará uma posição a uma altura $y_{C'}$, a qual é facilmente determinada:

$$y_{C'} = \left(R + \frac{h}{2}\right) \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi.$$

Salientemos, que para ângulos pequenos φ , com precisão até a segunda decimal, temos, que $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Realmente, uma vez que:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx \sqrt{1 - \varphi^2},$$

então, simbolizando $\cos \varphi = 1 - x$, obteremos $1 - x^2 \approx 1 - 2x + x^2$, donde desprezando x^2 , determinamos que $x = \varphi^2/2$ e, consequentemente, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Deste modo, temos que:

$$y_{C'} = \left(R + \frac{h}{2}\right) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + R\varphi^2.$$

As oscilações da tábua, em redor da posição de equilíbrio surgem para a condição $y_{C'} - y_C > 0$, i.é., para

$$\left(R - \frac{h}{2}\right) \frac{\varphi^2}{2} > 0, \quad \left(R - \frac{h}{2}\right) > 0.$$

Se $R - h/2 < 0$, então, a tábua cairá.

641. A equação do movimento do peso de massa m tem a seguinte forma:

$$ma = -kx,$$

onde x é o alongamento absoluto da mola. Da equação deduz-se, que o período de oscilações τ pode depender, somente, de m e k .

A dimensão do coeficiente de rigidez é $[k] = M/T^2$. Consequentemente, $\tau = C\sqrt{m/k}$, onde C é um coeficiente adimensional. O cálculo exato conduz à expressão: $\tau = 2\pi\sqrt{m/k}$.

642. O período das pequenas oscilações de um pêndulo simples não depende da amplitude (i.é., do maior ângulo de desvio) e é igual a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. A independência do período, em relação à grandeza do ângulo máximo de desvio, é consequência de fato, que a força dirigida à posição de equilíbrio, em cada instante de tempo, é proporcional ao ângulo α de desvio do pêndulo. Caso esta proporcionalidade em relação ao ângulo de desvio, conservasse, mesmo para grandes amplitudes, o período de oscilações do pêndulo citado, em qualquer caso seria igual a $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Entretanto, para grandes ângulos de desvio, a força que retorna o pêndulo, é proporcional não ao ângulo α , mas ao seno deste ângulo. Uma vez que $\sin \alpha < \alpha$ ($\alpha > 0$), então, para mesmas amplitudes, a força de retorno e, também, a aceleração de um pêndulo real, é menor do que a de um pêndulo, que conserva a proporcionalidade entre a força e o ângulo. Por isso, o período T_1 das oscilações de um pêndulo real, é maior do que o de um pêndulo simples, i.é., $T_1 > 2\pi\sqrt{l/g}$. Consequentemente, com o aumento do ângulo máximo de desvio o período das oscilações de um pêndulo simples aumenta.

643. Suponhamos, que $\tau = g^{\alpha} l^{\beta}$, onde τ é o período de oscilações de um pêndulo simples, l é o comprimento do mesmo:

$$[1] \quad T, \quad [g^{\alpha} l^{\beta}] = T^{\alpha} l^{\beta} T^{-2\alpha}.$$

Da última relação deduzimos, que $\alpha + \beta = 0$, $2\alpha = -1$. Deste modo, $\tau = f(q)\sqrt{l/g}$, onde $f(q)$ é função do ângulo máximo q ($f(q_2) > f(q_1)$, se $q_2 > q_1$, ver o problema 642). O cálculo demonstra, que para $q \rightarrow 0$ $f(q)$ tem um valor limite igual a 2π . Então, o período das pequenas oscilações de um pêndulo simples é igual a: $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$.

644. Simbolizemos por l o comprimento da mola não deformada. Então, a distância do primeiro e do segundo bloco até o centro de massa, determina-se das relações:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \quad l_1 + l_2 = l.$$

Simbolizemos por x e y os deslocamentos do primeiro e do segundo blocos, no caso em que a mola esteja comprimida. Então, a distância dos mesmos até o centro de massa satisfaz às igualdades:

$$m_1 (l_1 - x) = m_2 (l_2 - y) \quad \text{ou} \quad m_1 x = m_2 y.$$

A mola está comprimida em uma grandeza igual a:

$$x + y = x \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right).$$

A força, com a qual a mola age sobre o primeiro bloco, é igual a:

$$F = k_1 x, \quad \text{onde} \quad k_1 = k \frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

Deste modo, o período de oscilações do primeiro bloco é igual a (ver o problema 641):

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

O período de oscilações do segundo bloco, evidentemente, será o mesmo.

645. A mola, ao ser solta, atua em ambos os pesos. O peso localizado junto à parede, inicialmente está imóvel, e o segundo peso começa a mover-se. Quando a mola fica solta totalmente (i.e., fica no estado não deformado), o segundo peso tem uma velocidade:

$$v = \left[\frac{k}{m_2} x \left(\frac{kx^2}{2} = \frac{m_1 v^2}{2} \right) \right].$$

Consequentemente, o sistema possuirá uma quantidade de movimento igual a:

$$m_2 v = \sqrt{k m_2} x.$$

Esta quantidade de movimento conservar-se-á, uma vez que as forças externas não atuam na direção horizontal. O centro de massas do sistema mover-se-á com velocidade:

$$v_C = \frac{\sqrt{k m_2} x}{m_1 + m_2}.$$

Neste caso, os pesos oscilarão, relativamente ao centro de massas, com um período de oscilações igual a:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

(ver o problema 644).

646. O período de oscilações do peso na mola é $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, onde k é o coeficiente de elasticidade da mola, igual à relação entre a força que provoca o alongamento da mola, e este alongamento, i.e., $k = F/x$. Na união em série de duas molas iguais, distendidas pela força F , temos, que $x_1 = F/k$, $x_2 = F/k$, uma vez que cada uma das molas aumenta seu comprimento em x . Na união em paralelo de duas molas iguais, a força F , necessária para o aumento do comprimento de cada uma das molas em x , deverá ser duas vezes maior do que F . Consequentemente, $k_2 = F_2/x = 2F/x = 2k$. Na união em série temos, que $T_1 = 2\pi \sqrt{m/k_1} = 2\pi \sqrt{2m/k}$, e na união em paralelo, $T_2 = 2\pi \sqrt{m/2k}$, donde $T_1/T_2 = 2$. O período diminuirá em duas vezes.
647. Inclínemos ambos os pêndulos, em relação à vertical, para um mesmo lado, em um mesmo ângulo. A mola para esta inclinação não ficará deformada. Verificamos, facilmente, que ao serem soltos desta posição os pêndulos oscilarão em fase com uma frequência $\omega = \sqrt{g/l}$. Ao inclinarmos para lados diferentes, em um mesmo ângulo, as oscilações dos pêndulos ocorrerão em fase

oposta e a mola deformar-se-á. A fim de calcular a frequência destas oscilações, achemos a força que faz o pêndulo voltar à posição de equilíbrio. Ao inclinarmos em um ângulo φ , a força que age por parte na mola, sobre o corpo m , é igual a $2kl \sin \varphi$. A soma das projeções da força de gravidade e da força de elasticidade na tangente à circunferência, denominada força de restabelecimento P_1 , será igual a:

$$P_1 = mg \sin \varphi - 2kl \sin \varphi \cos \varphi$$

(fig. 481). Uma vez que para pequenos ângulos $\cos \varphi \approx 1$, então,

$$P_1 \approx mg - 2kl \sin \varphi, \text{ ou } P_1 = m(g - 2kl/m) \sin \varphi.$$

Para o pêndulo simples a força de restabelecimento é igual a $mg \sin \varphi$. Neste caso, a frequência das oscilações para pequenos ângulos φ determina-se pela fórmula: $\omega = \sqrt{g/l}$. Em nosso caso, em vez de g temos a grandeza $g - 2kl/m$. Consequentemente, $\omega = \sqrt{(g - 2kl/m)/l}$, o período de oscilações é $T = 2\pi \sqrt{l/(g - 2kl/m)}$.

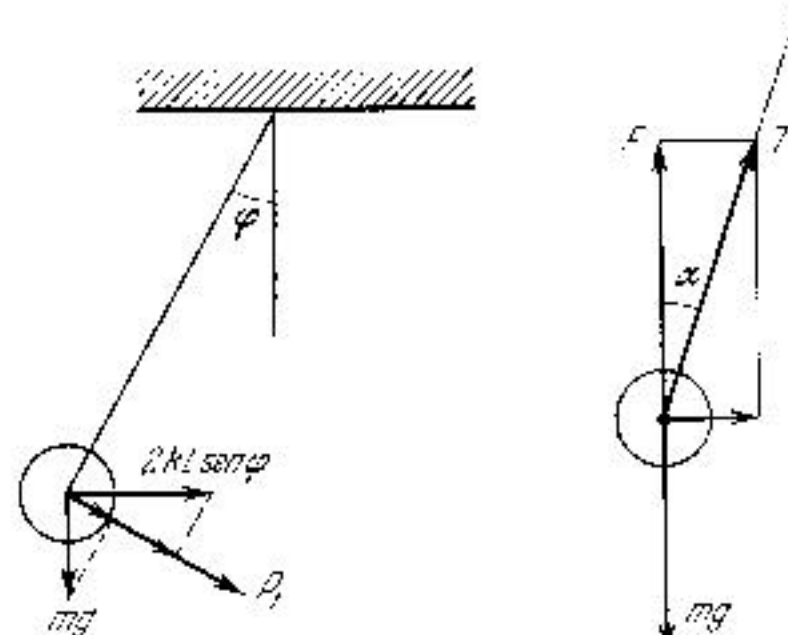


Fig. 481

Fig. 482

648. A componente vertical da força de tensão T é igual a $F \cos \alpha = T \cos \alpha$ (fig. 482). Para um pêndulo cônico $F = mg$, uma vez que o peso não possui aceleração no plano vertical. No caso de um pêndulo simples, inclinado ao máximo, em relação à posição de equilíbrio (em um ângulo α), a força resultante está dirigida pela tangente à trajetória do peso. Consequentemente, $T = mg \cos \alpha$. Para a inclinação em um ângulo α a tensão do fio, de um pêndulo cônico, será maior.
649. Na superfície da terra, o período de oscilações do pêndulo é $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$. A uma altura h , sobre a terra, o período de oscilações do pêndulo é $T_1 = 2\pi \sqrt{l/g_1}$. O número de oscilações em

um dia (24 horas) é $N_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 1/T_1 = k/T_1$, consequentemente, a uma altura h , sobre a terra, o relógio atrasar-se-á num dia em:

$$\Delta t_1 = N_1 (T_1 - T_0) = k (1 - T_0/T_1).$$

A relação dos períodos é $T_0/T_1 = \sqrt{g_1/g} = R/(R+h)$, com deduzimos da lei da gravitação universal, donde:

$$\Delta t_1 = kh/R \approx kh/R \approx 2,7 \text{ s.}$$

Se o relógio for colocado em uma mina, então, a relação das acelerações é $\sqrt{g_2/g} = (R-h)/R$, uma vez que:

$$g = \gamma \frac{4\pi}{3} R^2 \rho \frac{1}{R^2}, \quad g_2 = \gamma \frac{4\pi}{3} (R-h)^2 \rho \frac{1}{(R-h)^2}.$$

Consequentemente, $T/T_1 = \sqrt{g_2/g} = \sqrt{(R-h)/R} \approx 1 - \frac{h}{2R}$. O relógio, neste caso, atrasará em: $\Delta t_2 = k(1 - T_0/T_1) = \frac{kh}{2R} \approx 1,35 \text{ s.}$

650. Cada metade da barra, com uma esfera no extremo, tem a forma de um pêndulo simples de comprimento $l/2$, que realiza oscilações no campo gravitacional da esfera grande. O pêndulo simples, no campo gravitacional da terra, tem o período das pequenas oscilações $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$.

Pela lei da atração universal $mg = \gamma \pi M_{\text{terra}} R^2$; consequentemente, $T_0 = 2\pi \sqrt{l/R^2 \gamma M_{\text{terra}}}$, onde γ é a constante gravitacional; M_{terra} é a massa da terra; R é a distância do pêndulo até o centro da terra. Consequentemente, no campo gravitacional da esfera grande, o período das pequenas oscilações do pêndulo simples, de comprimento $l = R^2/2$, será igual a $T = 2\pi \sqrt{2R^2/\gamma M} \approx 3,6 \text{ horas.}$

651. O período de oscilações de um pêndulo simples é igual a $T = 2\pi \sqrt{l/g'}$, onde g' é a aceleração de queda livre no sistema de coordenadas correspondente. Em nosso caso, $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$, onde g é a aceleração de queda livre relativamente à terra. Deste modo, $T = 2\pi \sqrt{l/(g^2 + a^2)}$.

652. $T = 2\pi \sqrt{l/(g^2 + a^2)}$.

653. Substituir na resposta anterior $(g^2 + a^2)$ por $(g - a)^2$.

654. As oscilações do cubo na taça são totalmente análogas às oscilações de um pêndulo simples, somente em lugar da tensão do fio, no cubo age a força de reação do apoio. Consequentemente, o período das oscilações é: $T = 2\pi \sqrt{R/g}$.

655. Para $M \gg m$ a aceleração da taça é $a = F/M = g$. Consequentemente (ver o problema 654),

$$T = 2\pi \sqrt{R/(g + a)} = 2\pi \sqrt{RM/F}.$$

Para $F = 0$, i.é., para a queda livre da taça, $T = \infty$ e não existem oscilações. Se $F = Mg$, então, $T = 2\pi \sqrt{R/g}$.

656. As oscilações do cubo provocarão o deslocamento periódico da taça no plano horizontal. Consequentemente, o período de oscilações do cubo diminuirá, uma vez que no sistema de coordenadas,

ligado à taça, surge uma aceleração variável complementar, dirigida horizontalmente (ver o problema 654).

657. Compararemos o movimento do centro do aro com o movimento do extremo de um pêndulo simples de comprimento $(R-r)$. Ambos estes pontos descrevem um arco de circunferência de raio $(R-r)$. Suponhamos, que, para um ângulo φ_0 , o aro e o pêndulo estejam em repouso. Baseando-se na lei da conservação da energia, para a velocidade v_0 do centro do aro, e para a velocidade v_1 do extremo do pêndulo, em dependência do ângulo φ , podemos escrever as seguintes expressões:

$$v_0 = \sqrt{g(R-r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)},$$

$$v_1 = \sqrt{2g(R-r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

A expressão da energia cinética do aro que gira sem escorregamento, ver no problema 215a. Destas expressões deduz-se, que $v_1 = v_0 \sqrt{2}$. Uma vez que o centro do aro move-se em $\sqrt{2}$ vezes mais lentamente do que o pêndulo, então, o período de movimento do centro do aro será $\sqrt{2}$ vezes maior do que o período de movimento do pêndulo simples de comprimento $(R-r)$.

Deste modo, para o período procurado temos a expressão $T = 2\pi \sqrt{2(R-r)/g}$. Salientamos, que para $r \rightarrow 0$, $T = 2\pi \sqrt{2R/g}$, apesar de que, à primeira vista, pode parecer que, para $r = 0$, deverá ser verificada a igualdade: $T = 2\pi \sqrt{R/g}$. Isto relaciona-se ao fato, de que para $r \rightarrow 0$ a energia do movimento de rotação do aro não desaparece.

658. Suponhamos, que, inicialmente, a barra esteja desviada da posição de equilíbrio em um ângulo α . No momento em que a barra formar um ângulo β com a vertical, a velocidade angular ω_1 da barra, em base da lei de conservação da energia, será igual a:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} (\cos \beta - \cos \alpha)}.$$

Analisemos, agora, um pêndulo simples de comprimento l . Neste caso, para os mesmos ângulos α e β temos que:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \beta - \cos \alpha)}.$$

Escolhamos l de tal modo, que $\omega_1 = \omega_2$. Para isto é necessário que:

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}.$$

A velocidade angular caracteriza a variação do ângulo β com o decorrer do tempo. Uma vez que $\omega_1 = \omega_2$, então, os períodos de oscilações dos dois pêndulos serão iguais. Para o pêndulo simples temos $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. Consequentemente, o período

procurado é igual a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2} \frac{1}{g}}$$

659. Este problema é resolvido pelo mesmo método, que o problema 658. Suponhamos, que o semicinel inicialmente foi inclinado da posição de equilíbrio em um ângulo α . No movimento todos os pontos do semicinel possuem uma mesma velocidade linear. A energia cinética é igual a $m v^2/2$. A variação da energia potencial, ao girarmos o semicinel em um ângulo $(\varphi - \alpha)$, é igual a:

$$mg(2\pi r)(\cos \varphi - \cos \alpha),$$

uma vez que o centro de gravidade encontra-se a uma distância $2\pi r$ de centro O (ver o problema 150).

Igualando a variação da energia cinética com a variação da energia potencial, obtemos para ω uma expressão da seguinte forma:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{(\pi r/2)(\cos \varphi - \cos \alpha)}}$$

Donde deduzimos, que o pêndulo simples, que tem um comprimento igual a $\pi r/2$, terá o mesmo período de oscilações que o semicinel. Deste modo, o período procurado é igual a $T = 2\pi \sqrt{\pi r/2g}$.

660. Na posição de equilíbrio, a mola será distendida em uma grandeza l , a qual é determinada da relação $kl = mg$. Suponhamos, que, no momento inicial, o peso está em repouso, e o comprimento da mola, em comparação com a posição de equilíbrio, variou em x_0 . Se, agora, deixarmos o sistema livre, então, o peso oscilará em redor da posição de equilíbrio com uma amplitude igual a $|x_0|$. No caso de uma roldana imponderável ($M = 0$), o período de oscilações é $T_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$. Simbolizemos por x o deslocamento do peso, medido a partir da posição de equilíbrio. A velocidade do peso, em dependência de x pode ser determinada da lei de conservação da energia:

$$\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mgx_0 = \frac{m v^2}{2} + \frac{k(x + l)^2}{2} - mgx.$$

Considerando, que $mg = kl$, achamos que $v = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)/m}$. Se $M \neq 0$, a lei de conservação da energia é escrita da seguinte forma:

$$\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mgx_0 = \frac{(m + M) v^2}{2} + \frac{k(x + l)^2}{2} - mgx.$$

Donde deduz-se, que $v = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)/(M + m)}$. Deste modo, no segundo caso ($M \neq 0$), o peso move-se como se a massa, em comparação com o primeiro caso, tivesse aumentado em M . Consequentemente, o período procurado é $T = 2\pi \sqrt{(m + M)/k}$.

661. No deslocamento do bastão relativamente à posição de equilíbrio em uma grandeza x , a força que atua sobre o bastão é

igual a $F = -\rho g S x$, onde ρ é a densidade da água. O sinal negativo significa, que a força está dirigida em contra ao deslocamento x . De acordo com a segunda lei de Newton, as oscilações do bastão são determinadas pela equação $ma = -\rho g S x$. Esta equação é exatamente análoga à equação para a oscilação do peso em uma mola: $ma = -kx$. Uma vez que para o peso $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m}$, então, a frequência de oscilações do bastão é:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \approx 0,25 \text{ Hz}.$$

662. A equação do movimento de mercúrio tem a seguinte forma:

$$m\ddot{x} = -\rho g S \cdot 2x,$$

onde x é o deslocamento do nível de mercúrio em relação à posição de equilíbrio. A equação do movimento tem a mesma forma, que no caso das oscilações de um peso em uma mola. Por isso, $T = 2\pi \sqrt{m/2\rho g S} \approx 1,54 \text{ s}$.

663. A força que age no corpo é $F = \frac{4}{3}\pi r^2 \rho g$, onde r é a distância do centro da Terra. Considerando que $x = \frac{4}{3}\pi r^2 \rho$, podemos dar a esta expressão a seguinte forma:

$$F = mg \frac{r}{R},$$

onde R é o raio da Terra. A equação do movimento do corpo tem a seguinte forma:

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{R}x = -kx.$$

A força é proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio e está dirigida ao centro da terra. Consequentemente, o corpo realizará oscilações harmônicas com frequência:

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/R},$$

donde o período de oscilações é:

$$T = 2\pi \sqrt{R/g}.$$

O corpo atingirá o centro da terra em um tempo:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{R/g} \approx 21 \text{ min}.$$

É interessante o fato de que o tempo τ não depende, absolutamente, da distância, em relação ao centro da Terra, onde o corpo começa seu movimento. (É importante, somente, que esta distância seja muito maior do que as dimensões do corpo).

664. A força F , que age no peso deslocado da posição de equilíbrio, é igual a $F = 2f \sin \varphi$ (fig. 483). Uma vez que o ângulo φ é pequeno, podemos considerar que $F = 4fx/l$, ou $F = kx$, onde

$k = 4fl$. Utilizando a fórmula $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, obtemos para a grandeza procurada a seguinte expressão: $T = 2\pi \sqrt{m/4f}$.

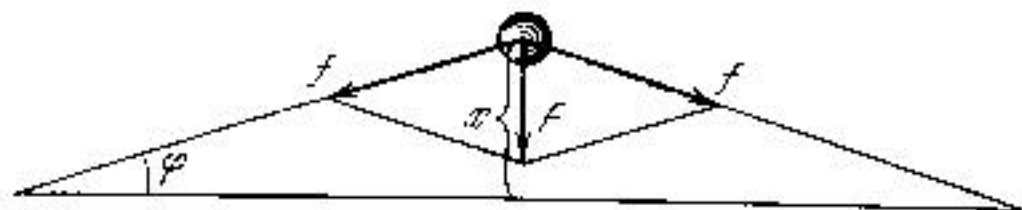


Fig. 483

665. Analisemos as oscilações em fase dos dois pesos. Para uma pequena inclinação α , a força F não varia, uma vez que a variação do comprimento da mola é da segunda ordem decimal, e, por isso, pode ser desprezada. Considerando, somente, os primeiros graus de α , a equação do movimento de cada peso pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\ddot{\alpha} = -F\alpha/l,$$

onde determinamos, facilmente, o período de oscilações: $T = 2\pi \sqrt{m/lF}$.

666. Se os pesos realizam oscilações em fase sucessas, a equação do movimento de cada peso, com precisão até a primeira decimal de α , tem a seguinte forma:

$$m\ddot{\alpha} = -F\frac{\alpha}{l} - F\frac{2\alpha}{l} = -F\left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l}\right)\alpha,$$

donde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F(1+2)}}.$$

667. Pode-se, gradualmente, balançar a porta com uma frequência igual à frequência própria de oscilações da porta. Ao ocorrer a ressonância, a amplitude de oscilações pode atingir grandes valores.
668. Em base da lei de conservação da energia, temos que:

$$\frac{\omega^2}{2} (ml^2 + Mr^2) = Mgr\alpha - mgl(1 - \cos \alpha),$$

onde ω é a velocidade angular de rotação da cordão, donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{2(Mgr\alpha - 2mgl \sin^2(\alpha/2))}{ml^2 + Mr^2}}.$$

A condição necessária para o surgimento do regime oscilatório é que a velocidade angular, para um determinado valor do ângulo α , deve ser igual a zero. Neste caso, $Mgr\alpha = 2mgl \sin^2(\alpha/2)$, ou simbolizando por $a = Mr/ml$, obtemos que: $a\alpha/2 = \sin^2 \alpha/2$. A cada valor a corresponde um determinado valor máximo do

inclinação relativamente à posição de equilíbrio, o qual é determinado pela equação transcendente dada.

A solução desta equação é mais fácil de ser determinada graficamente. Para isto, é necessário construir a curva $y = \sin^2(\alpha/2)$ (fig. 484). Então, a intersecção desta curva com a reta $y = a\alpha/2$ dá o ponto A, que determina o valor de α para um dado a . (O valor de α , correspondente à intersecção desta reta com o outro ramo da curva $y = \sin^2(\alpha/2)$, é inacessível para as condições iniciais dadas do problema.) É evidente que nossa equação possui uma solução diferente de zero, somente para a menor do que um valor limite qualquer a_0 , o qual é determinado da condição de que a reta $y = a_0\alpha/2$ tangencia a curva $y = \sin^2(\alpha/2)$ no ponto C. Como vemos na fig. 484, $\alpha_0 \approx 133^\circ$. Consequentemente, $a_0 = 2C/D \approx 0,73$. As oscilações são possíveis para $M/m \leq a_0 \approx 0,73$.

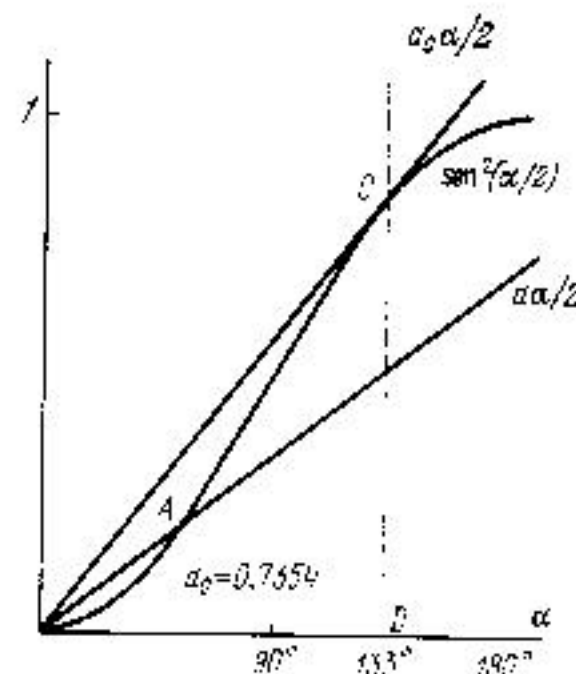


Fig. 484

669. O núcleo do hidrogênio é constituído de um próton, cuja massa é igual a m . O núcleo do deutério (deuteron) é constituído de um próton e de um nêutron. A massa do deuteron é $2m$. O núcleo do trítio é constituído de um próton e de dois nêutrons. A massa do trítio é $3m$. Uma vez que as forças, que agem em todos os três casos, entre os núcleos, são iguais, i.é., de mesmo coeficiente de rigidez k , então:

$$\omega_{H_1} : \omega_{D_2} : \omega_{T_3} = \frac{1}{\sqrt{m}} : \frac{1}{\sqrt{2m}} : \frac{1}{\sqrt{3m}} = \sqrt{6} : \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

670. Simbolizemos o deslocamento do n -ésimo átomo, escolhido arbitrariamente, da posição de equilíbrio por:

$$x_n = A \cos(\omega t + nx).$$

onde x é uma grandeza arbitrária. Então, a força que atua sobre o n -ésimo átomo, por parte dos átomos vizinhos, é igual a:

$$F = kA \{ \cos[\omega t + (n-1)x] - \cos[\omega t + (n+1)x] - 2\cos[\omega t + nx] \}.$$

Na última expressão, por meio de transformações trigonométricas simples, obtemos que:

$$F = -kA \cos(\omega t + nx) \cdot 4 \sin^2(x/2).$$

Escrevamos a equação do movimento do n -ésimo átomo:

$$ma_n = -kA \cos(\omega t + nx) \cdot 4 \sin^2(x/2),$$

onde a_n é a aceleração do n -ésimo átomo igual a:

$$a_n = -\omega^2 A \cos(\omega t + nx).$$

Simbolizemos $\omega_0^2 = k/m$. Das expressões escritas acima obtemos que:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \cdot 4 \sin^2(x/2), \quad \omega = 2\omega_0 \sin(x/2).$$

Se analisarmos uma cadeia de N átomos, então, os átomos extremos terão um vizinho. A fim de não complicar os cálculos no nosso caso, não consideraremos os efeitos extremos e usaremos a condição de periodicidade, para uma cadeia infinita, i.e., vamos considerar, que as condições de oscilações dos átomos, que têm número n , $N-n$, $2N-n$, $3N-n$, etc., são iguais. Então, temos, que:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + nx) &= \cos[\omega t + (n-N)x] = \\ &= \cos[\omega t + (n-2N)x] = \dots, \text{ etc.}, \end{aligned}$$

donde, para x , obtemos N valores diferentes:

$$Nxa = 2\pi v, \quad x = \frac{2\pi}{Na} v, \quad \text{onde } v = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

§ 26. OSCILAÇÕES ELÉTRICAS

671. Sem um ímã constante teríamos uma duplicação da frequência de oscilações. Neste caso, ao passar pela bobina do telefone uma corrente senoidal, a membrana realizaria duas oscilações em um período de oscilação da corrente, uma vez que o gráfico da intensidade do campo magnético H , criado por esta corrente, teria a forma representada na fig. 485, a, e a força de atração da membrana não depende do sinal de H .

Estando presente um ímã constante que cria um campo magnético, cuja intensidade ultrapassa a máxima intensidade do campo da corrente, o gráfico da intensidade resultante teria a

forma representada na fig. 485, b. Por isso, uma oscilação da corrente corresponderá a uma oscilação da membrana e o som será mais nítido.

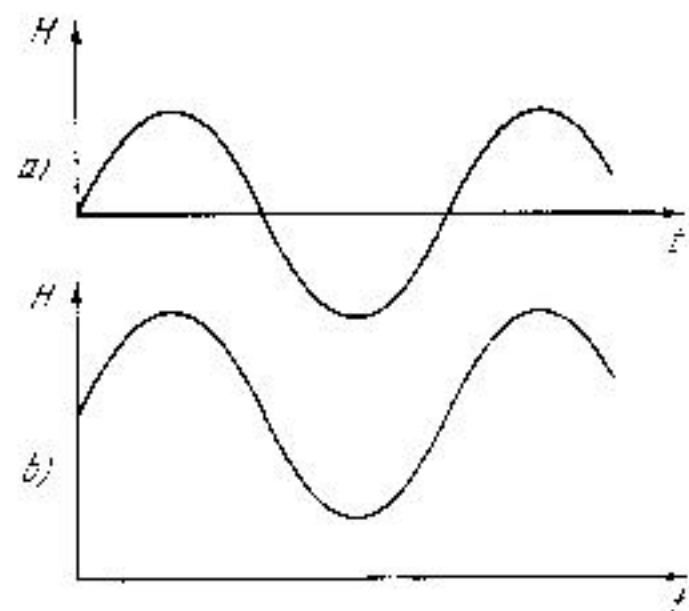


Fig. 485

672. A frequência das oscilações próprias $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Uma vez que:

$$L = \mu_0 N^2 S_1 l, \quad C = \epsilon_0 S_2 d,$$

então:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 N^2 S_1 S_2}} \approx 24 \cdot 10^5 \text{ Hz}.$$

673. A frequência das oscilações próprias do circuito determinamos pela fórmula de Thomson: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

1) Se na bobina encontra-se um núcleo de cobre, então, nas variações periódicas do campo magnético da bobina, surgirá, no núcleo, uma corrente induzida (corrente de Foucault), cujo campo magnético enfraquecerá o campo magnético da bobina. Isto conduz à diminuição da indutância da bobina e, consequentemente, ao aumento da frequência ω .

2) Se colocarmos na bobina um núcleo de ferrite, então, o campo magnético da bobina aumentará. Correspondentemente, aumentará a indutância L da bobina e a frequência ω diminuirá.

674. No sistema surgirão oscilações amortecidas (se desprezarmos as perdas insignificantes de energia na irradiação das ondas eletromagnéticas). No momento, em que a carga está distribuída igualmente entre os condensadores, a energia do campo eletrostático é mínima, mas a intensidade de corrente e a energia do

- campo magnético serão máximas. A energia total não varia, mas ocorre a transformação de uma forma de energia à outra.
675. O deslocamento do raio eletrônico, sob influência da tensão aplicada ao longo da vertical, escreve-se da seguinte forma:

$$x = \frac{UL}{2dV} V_{10} \cos \omega t = a \cos \omega t$$

(Ver o problema 559). Ao longo da horizontal (eixo y) o deslocamento do raio é igual a:

$$y = \frac{UL}{2dV} V_{20} \cos(\omega t - \varphi) = b \cos(\omega t - \varphi).$$

Para a obtenção da trajetória é necessário excluir, do sistema de equações dado, o tempo. Depois de algumas transformações simples teremos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Se $\varphi_1 = \pi/2$, então, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Esta é a equação de uma elipse. Se $\varphi_2 = \pi$, então, $x = \pm a$ (isto é, $y = 0$), i. é., a oscilação do raio passa ao longo da reta que forma com o eixo x um ângulo α determinado pela igualdade $\tan \alpha = b/a$ (fig. 486).

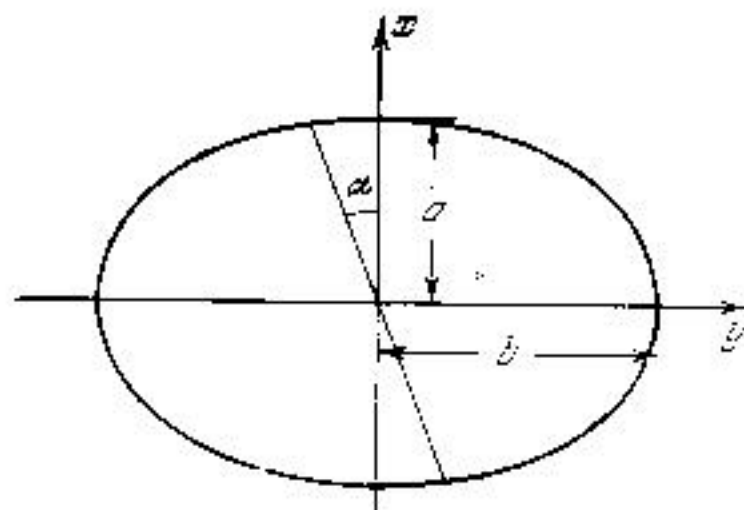


Fig. 486

676. A dependência da tensão, em relação ao tempo, está representada na fig. 487. A tensão no condensador (curva Oa) cresce até o momento, em que atinge o valor V_{expl} . Neste momento, a lâmpada acende-se e o condensador descarrega-se através da lâmpada, (curva ab), enquanto a tensão cai até o valor V_{ext} . Depois disto, o processo repete-se. Surgem, então, as chamadas oscilações de relaxamento, cujo período é igual a τ .

As correntes da carga e da descarga do condensador não são constantes, uma vez que dependem da tensão aplicada no condensador (por exemplo, no carregamento a corrente diminui com o aumento da tensão). Por isso Oa , ab , bc , etc., não são segmentos retos.

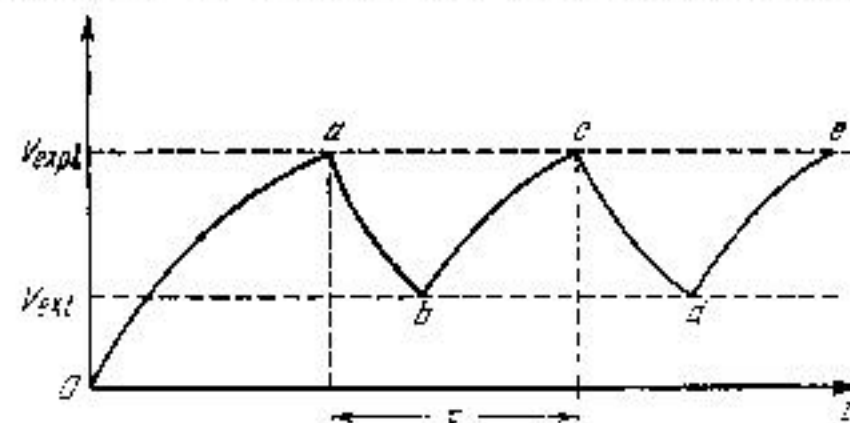


Fig. 487

677. Ao aumentarmos a capacidade, o tempo de carregamento do condensador até o potencial V_{expl} e tempo de descarga do condensador até o potencial V_{ext} aumentará. Consequentemente, cresce, também, o período. O aumento de R provoca o aumento da corrente de carregamento do condensador e, consequentemente, conduz ao aumento do período.
678. Quando a carga nas lâminas do condensador atingir seu valor máximo, é necessário deslocar as lâminas. A fim de vencer as forças de atração entre as placas, é necessário realizar um determinado trabalho. Este trabalho corresponde para o aumento da energia do circuito. Quando a carga é igual a zero, as lâminas deverão ser colocadas na posição inicial. Neste caso, a energia no circuito não variará.

§ 27. ONDAS

679. A velocidade de propagação das ondas determina-se pela força da gravidade. A força da gravidade é caracterizada pela grandeza g , cuja dimensão é: $[g] = L \cdot T^{-2}$. A fim de obtermos uma grandeza, que tenha a dimensão da velocidade, é necessário introduzir uma grandeza característica, que tenha a dimensão de comprimento. Tal grandeza só pode ser o comprimento de onda, uma vez que a profundidade do recipiente é infinitamente grande, e a amplitude das oscilações das partículas na onda é, infinitamente, pequena. Com as grandezas g e λ podemos obter uma terceira grandeza, que tenha a dimensão da velocidade, por um método único e, precisamente, do seguinte modo: $v = k \sqrt{g\lambda}$, onde k é um coeficiente sem dimensões. Os cálculos teóricos demonstram que $k = 1/\sqrt{2\pi}$.
680. Raciocinando analogamente, como foi feito no problema 679, podemos concluir, que, no caso dado, a velocidade de propagação

das ondas pode ser determinada, somente, pela densidade do meio ρ , pelo coeficiente de tensão superficial σ e pelo comprimento de onda λ . Estas grandezas possuem as seguintes dimensões:

$$[\rho] = M L^{-3}, [\sigma] = M T^{-2}, [\lambda] = L,$$

Consequentemente, $v = k \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda \rho}}$, onde k é um coeficiente sem dimensões. O valor numérico do mesmo é igual a $k = \sqrt{2\pi}$.

681. $\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{1}{2} k_1 k_2$.

682. Da lei de Hooke: $F/S = E \Delta l/l$ deduzimos, que a dimensão do módulo de elasticidade é:

$$[E] = M T^{-2} L^{-1}.$$

A dimensão da densidade é $[\rho] = M L^{-3}$. Consequentemente, a expressão para a velocidade pode ser formulada da seguinte modo:

$$v = k \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ onde } k \text{ é um coeficiente sem dimensão.}$$

683. É necessário aumentar a tensão da corda em 4 vezes.

684. $v = v_0 n$, onde $n = 1, 2, 3, 4, \dots$.

$$v_0 = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{T}{\pi \rho}} \approx 4 \text{ Hz.}$$

685. No tubo deveria ser propagado um número inteiro de semicondições:

$$\frac{\lambda}{2} k = l \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

As frequências próprias são: $v_k = c/\lambda = kc/2l = k \cdot 50 \text{ Hz}$ ($c = 340 \text{ m/s}$ é a velocidade do som no ar).

686. O som do diapásão amplifica-se no momento, em que a frequência das oscilações próprias da coluna de ar no recipiente, coincide com a frequência do diapásão. As frequências próprias de oscilações da coluna de ar, no tubo fechado em um extremo, são:

$$v_k = \frac{2k+1}{4} \frac{c}{l},$$

onde l é o comprimento do tubo; $c = 340 \text{ m/s}$ é a velocidade do som no ar; k toma os seguintes valores $0, 1, 2, 3, \dots$. Consequentemente, as posições possíveis do nível da água no recipiente, são determinadas pela distância, desde a superfície do líquido até o extremo superior do recipiente, e são iguais a:

$$l_k = \frac{2k+1}{4} \frac{c}{v} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Para $l = 1 \text{ m}$ são possíveis duas posições do nível da água: $l_0 = 25 \text{ cm}$ e $l_1 = 75 \text{ cm}$.

687. Vejamos uma série de posições consecutivas da bala, que voa ao longo de KA : K, F, E, D, B, A (fig. 488). Em cada ponto, a bala cria ante si uma compressão, que se propaga por todos os lados em forma de um impulso esférico, e devido ao fato de que a velocidade da bala v é maior do que a velocidade do som c , estes impulsos surgem somente depois da passagem da bala. No momento, em que a mesma encontra-se no ponto A , os impulsos

isolados estão representados, na fig. 488, por círculos de diferentes raios. A envoltória destas esferas é a frente ondular, que tem

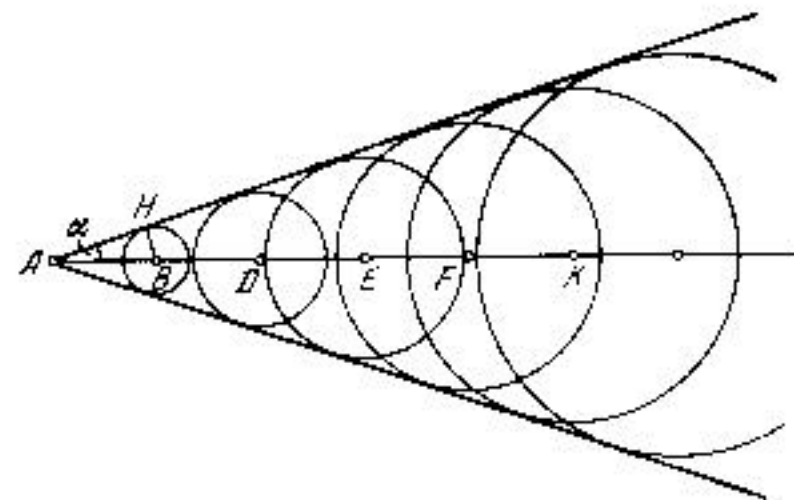


Fig. 488

a forma de uma superfície cônica. O cone move-se para a frente com a velocidade da bala. O ângulo de abertura do cone determina-se pela relação:

$$\sin \alpha = BH/AB = ct/v = cv.$$

688. O homem, encontrando-se no ponto B (fig. 489), é atingido por uma onda sonora emitida no momento, em que o avião encontra-se

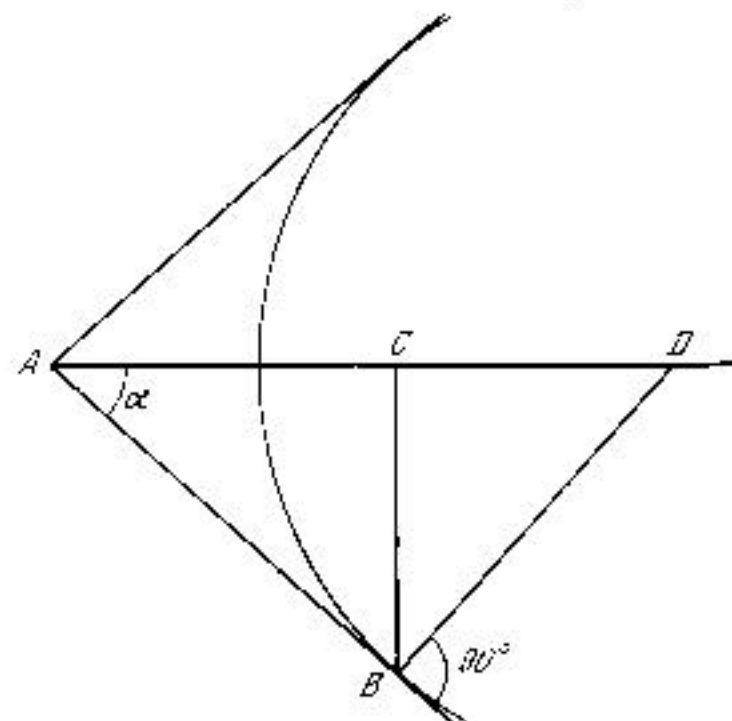


Fig. 489

em um ponto qualquer D (ver a solução do problema 687). A distância $CB = 6$ km. A distância procurada será:

$$1B = BC \sin \alpha = BC \sin \theta,$$

onde v é a velocidade do ar e c , a velocidade do som; donde $AB = 9$ km.

689. Normalmente, a velocidade do vento, a uma determinada altura, é maior do que na superfície da terra. Por isso, as superfícies ondulares, as quais, estando a ar imóvel, têm a forma de uma esfera com centro no ponto de localização da fonte sonora, (linha pontilhada na fig. 490), variam sua forma. Na direção do vento,

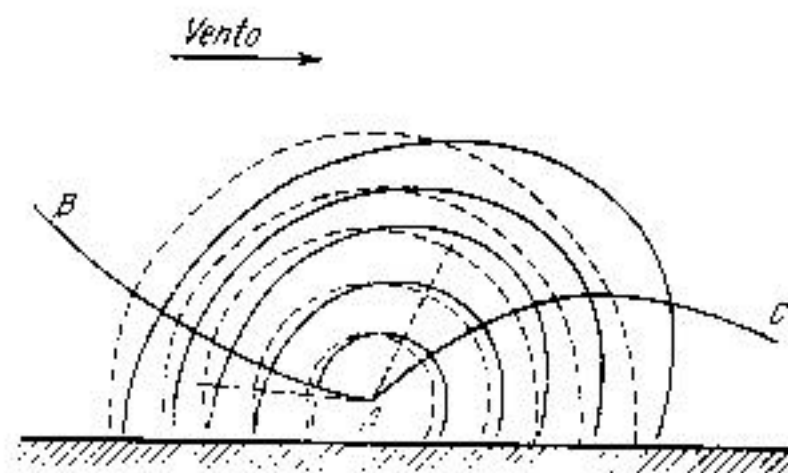


Fig. 490

a velocidade das ondas é maior do que contrária ao mesmo. As formas aproximadas das superfícies ondulares estão representadas na fig. 490 por linhas cheias. A propagação do som ocorre na direção perpendicular a cada ponto das superfícies ondulares. Por isso, o som, que se propaga, contrário ao vento, inclina-se para cima (curva AB) e não atinge o observador na superfície da terra. O som ao ser propagado na direção do vento, inclina-se para a terra (curva ACI) e atinge o observador.

690. A televisão baseia-se na propagação de ondas, cujo comprimento é menor do que 10 m. A ionosfera para estas ondas é transparente e a reflexão das ondas nela mesma não se processa. As ondas curtas propagam-se, praticamente, em linha reta, uma vez que nos obstáculos terrestres (casas, etc.) as mesmas quase não sofrem difração.
691. A fim de calcular, pela posição do impulso refletido na tela de um tubo de raios eletrônicos, a distância até o objeto, é necessário que a reflexão do impulso chegue não antes do um tempo τ , e não depois de $T = 1\tau$, após ter-se emitido um impulso retilíneo. Consequentemente, a distância mínima do objetivo é $l = c\tau/2 = 120$ m e a distância máxima é $L = cT/2 \approx 90$ km.
692. Refletindo-se do teto, a onda atinge a antena de recepção com um atraso $\tau = AB/c = 10^{-6}$ s. A velocidade do raio eletrônico,

ao longo da tela, é $v = l/\Delta t$, onde $\Delta t = \frac{1}{25 \cdot 625}$ s é o tempo, no qual o raio descreve uma linha. (O tempo do trajeto inverso do raio pode ser desprezado). O deslocamento da imagem é $\Delta l = v\tau \approx 7,8$ cm.

693. A capacidade C do vibrador, ao submergirmo-lo em querosene, aumenta em ϵ vezes. A frequência das oscilações próprias do circuito é proporcional a $1/\sqrt{C}$. Consequentemente, a frequência das oscilações diminui em $\sqrt{\epsilon}$ vezes. No vácuo, a frequência das oscilações do vibrador é igual a $\nu_0 = c/2l$ e no dielétrico é: $\nu = c/2l\sqrt{\epsilon}$. A esta frequência no vácuo corresponde o comprimento de onda $\lambda_0 = c/\nu_0 = 2l\sqrt{\epsilon} \approx 1,1$ m. Este resultado pode ser obtido por um caminho mais curto. O comprimento da onda no querosene é: $\lambda = 2l$. No vácuo, ele aumenta em $\sqrt{\epsilon}$ vezes; consequentemente, $\lambda_0 = 2l\sqrt{\epsilon}$.

Ótica geométrica

§ 28. FOTOMETRIA

694. A menor iluminação de parede do salão (fig. 491) é $E_1 = (I \cos \alpha)^2$. A menor iluminação do chão é $E_2 = I \cos^2 \beta$. Pelas condições do problema temos que:

$$E_1/E_2 = \cos \alpha \cos \beta = D/2h = 2,$$

donde $h = D/4 = 7,5$ m.

695. A iluminação do meio da mesa é $E = I_1/H_1^2 + I_2/H_2^2$, onde H_2 é a altura da segunda lâmpada sobre a mesa. A iluminação da

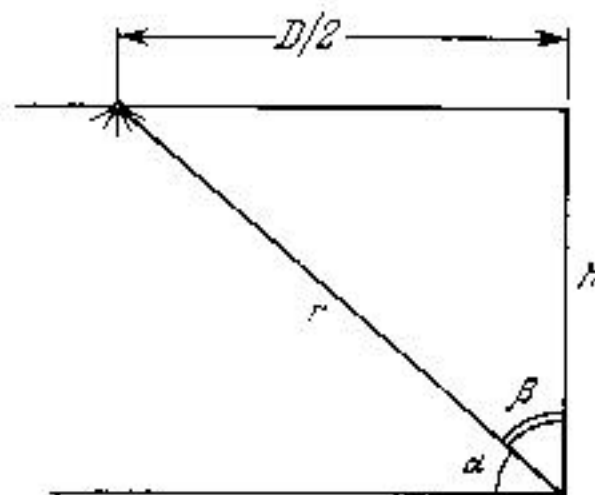


Fig. 491

borda da mesa, no primeiro e no segundo casos, é igual a:

$$E_1 = \frac{I_1 H_1}{(H_1^2 + D^2/4)^{3/2}}, \quad E_2 = \frac{I_2 H_2}{(H_2^2 + D^2/4)^{3/2}},$$

donde:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{[H_1^2 - (\frac{I_1}{I_2}) D^2/4]^{3/2}}{(H_2^2 + D^2/4)^{3/2}} = 3.$$

- A iluminação, nos bordes da mesa diminuirá em 3 vezes.
696. Se a normal à placa forma um ângulo α com a direção LS_1 , a iluminação da placa é:

$$E = \frac{I}{a^2} [\cos \alpha + \cos (90^\circ - \alpha)] = \\ = \frac{I}{a^2} 2 \cos 45^\circ \cos (\alpha - 45^\circ).$$

Consequentemente, a iluminação da meseta será máxima, se ela estiver paralela ao lado do triângulo $S_1 S_2$:

$$E_{\max} = \sqrt{2} I/a^2.$$

697. Pela utilização de uma fonte auxiliar, juntamente com a fonte padrão, a igualdade das iluminações teria lugar para a seguinte relação: $I_0/I_1 = r_1^2/r_2^2$, onde I_0 é a intensidade de luz da fonte padrão e I_1 é a intensidade de luz da fonte auxiliar. No segundo caso, a igualdade das iluminações seria atingida para $I_x/I_2 = r_2^2/r_1^2$, onde I_x é a intensidade de luz procurada, donde: $I_x = r_2^2/r_1^2 \cdot I_2 = 400 I_0$.
698. O fluxo luminoso total da lâmpada é $\Phi_0 = 4\pi I$. Se a lâmpada estiver fixa no teto, então, metade deste fluxo atinge as paredes e o chão. Consequentemente, o fluxo procurado é: $\Phi = 2\pi I = 628$ lux.
699. A quantidade da energia luminosa, absorvida pelas paredes internas do cilindro, por unidade de tempo (fluxo luminoso), em ambos os casos, é a mesma. Entretanto, a área da superfície interna do cilindro variará em R_1/R_2 vezes. Por isso, a iluminação variará (aumentará) em R_1/R_2 vezes, i.é., $E_1/E_2 = R_2/R_1$.
700. A iluminação na borda da mesa é:

$$E = \frac{I \cos \varphi}{R^2} = \frac{1}{R^2} \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

onde I é a intensidade da luz da lâmpada; R é o raio da mesa; φ é o ângulo de incidência dos raios (fig. 492). O máximo valor de E obtém-se para um ângulo φ , que satisfaça à equação: $1 - \dots = \dots \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$, i.é., para $\varphi = \arcsin \sqrt{2/3}$. A lâmpada deverá ser suspensa a uma altura $h = (\sqrt{2}/2) R \approx 0,71 R$ sobre a mesa.

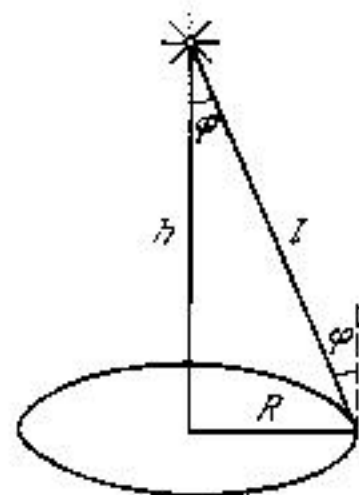


Fig. 492

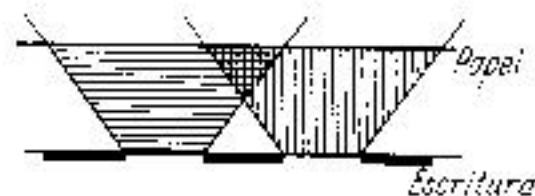


Fig. 493

701. O papel de seda dispersa, para todos os lados, as raios luminosos incidentes no mesmo. Se o papel encontra-se a uma distância qualquer do texto do livro, então, os feixes luminosos divergentes, refletidos das partes brancas da página (entre as letras), sobrepõem-se no lado do papel da seda dirigido ao texto (fig. 493). Como resultado, o papel será iluminado quase por igual e como resultado da dispersão da luz por ele, não será possível ler o texto. Se o papel for colorado imediatamente sobre o texto, então, a iluminação do lado do papel, dirigido ao texto, não será uniforme. Correspondentemente, a intensidade da luz dispersada será diferente em diferentes partes da folha de papel. Isto permitirá ler o texto.

§ 29. LEIS FUNDAMENTAIS DA ÓTICA

702. Somente a sombra da fonte pontual será igualmente nítida em todos os lugares. Seções isoladas da fonte longa criam sombras que se sobrepõem uma à outra. Neste caso, a sombra terá um limite tanto mais delimitado, quanto menor for a distância do objeto até a superfície no qual forma-se a sombra, uma vez que neste caso, as distâncias entre os limites das sombras, de diferentes seções da fonte, serão menores. E, por isso, precisamente, que as pernas possuem uma sombra mais forte do que a cabeça.
703. O lápis deve ser colocado paralelamente à lâmpada e o mais próximo possível da mesa. Neste caso, as sombras criadas por elementos isolados da lâmpada, quase que exatamente, sobrepõem-se umas às outras. Se o lápis estiver perpendicular à lâmpada, então, as sombras de elementos isolados da lâmpada ficarão tão deslocadas umas relativamente às outras, que uma sombra sensível não se forma.
704. O fenômeno pode ser observado no caso, em que a distância angular entre os galhos seja menor do que o diâmetro angular do disco solar. Suponhamos, para maior determinação, que o

galho inferior é mais grosso do que o galho superior. A fim de compreendermos por que a iluminação, dentro da sombra, varia conforme foi indicado nas condições do problema, suponhamos, que olhamos para o Sol, alternativamente, desde diferentes seções da sombra.

Ao lado da sombra, o disco solar é visto totalmente. Estando o olho na seção da sombra A (fig. 240), o olho encontra-se na semisombra dum galho inferior. Na frente do disco solar vê-se,

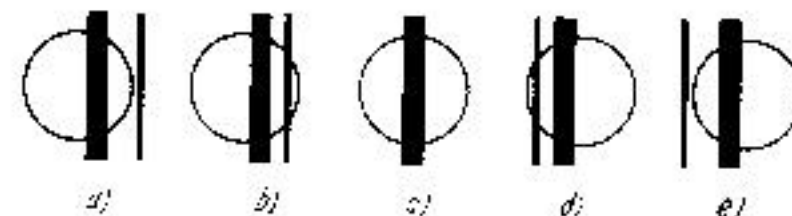


Fig. 494

somente, este galho (fig. 494.a). Uma vez que ele encobre parte do disco solar, a iluminação deste ponto será menor. Movendo o olho para a posição B (fig. 240), nós veremos, que o segundo galho também encobre em parte o disco solar (fig. 494.b). Por isso a iluminação será ainda menor. No deslocamento ulterior, o olho ocupará uma posição C (fig. 240), na qual ambos os galhos sobrepõem-se um ao outro (fig. 494.c). Agora, a parte do disco solar coberta pelos galhos, tornou-se menor e, consequentemente, a iluminação é maior. Como vê-se o disco solar desde as partes D e E está representado na fig. 494. d, e. Isto explica a grande claridade da região central da sombra, em comparação com as regiões vizinhas.

705. Como vemos na fig. 495, $H = l \cdot \sin \alpha$, mas $\sin \alpha = b/a$, onde $b = DE$ é o diâmetro da seção transversal do cone lumi-

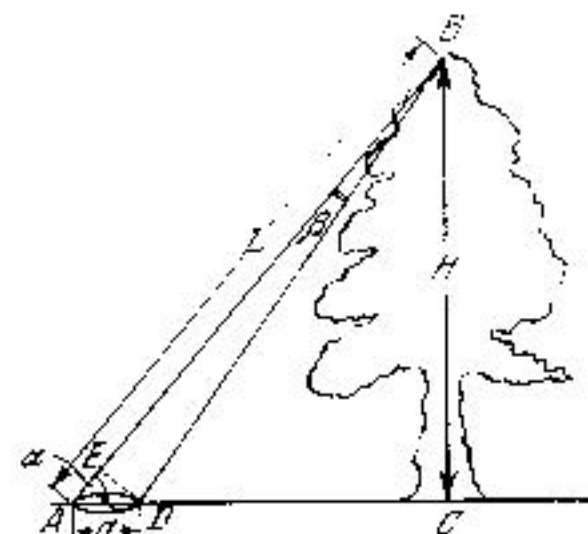


Fig. 495

nosso na superfície da terra. Para a medida angular do disco solar β , obtemos que $L = h/\beta$. Consequentemente:

$$H = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{b^2}{a} = 0 \text{ m.}$$

706. A altura do espelho deverá ser igual à metade da altura do homem. A distância da borda inferior do espelho até o chão deverá ser igual à metade da distância dos olhos do homem até os seus pés (fig. 496).

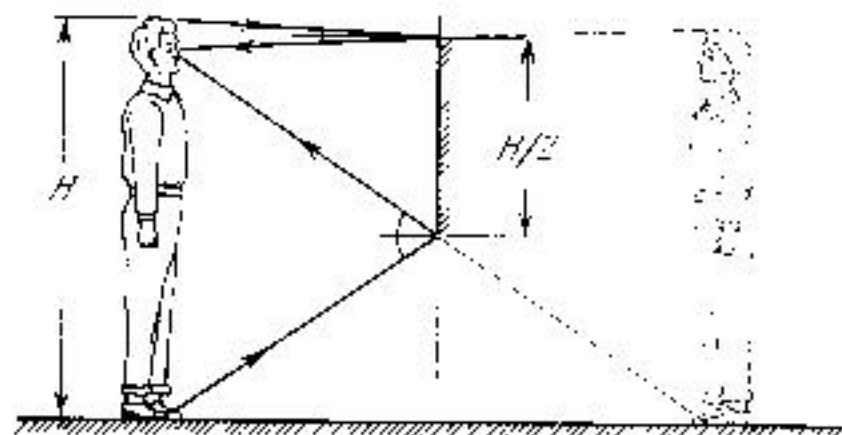


Fig. 496

707. Suponhamos, que seja h a altura do objeto e α , o ângulo de incidência dos raios no espelho (fig. 497). Se a tela encontra-se a uma distância $l \gg h \tan \alpha$ do objeto, então, na tela serão visíveis

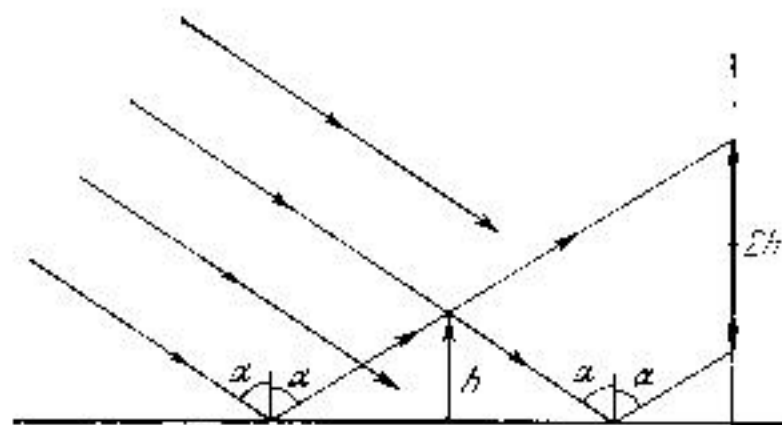


Fig. 497

duas sombras, uma direita e outra invertida, unidas pelas bases. O comprimento total da sombra será igual a $2h$. A sombra iluminada pelo sol destaca-se em contraste com as demais seções da

tela, iluminadas diretamente e pelos raios refletidos. Se a tela estiver colocada mais próxima, o comprimento da sombra será menor do que $2h$, uma vez que na mesma existirão partes que não são iluminadas nem pelos raios diretos e nem pelos raios refletidos.

708. Uma fonte de luz pontual sempre dá uma imagem, cuja forma é determinada pela forma do espelho. O sol tem dimensões finitas. Cada pequeno setor iluminado da superfície, nos dá uma mancha clara, que reflete a forma do espelho. Estas manchas, de diferentes regiões do Sol, sobrepõem-se uma à outra e dão um quadro mais ou menos disperso. Se a superfície, na qual é observada a imagem, encontra-se longe do espelho, então, a forma da mancha luminosa não dependerá da forma do espelho. Somente a uma distância pequena do espelho, a mancha refletirá a forma do espelho, uma vez que os ângulos, sob os quais os raios incidem no espelho de diferentes regiões do sol, diferem-se muito pouco um do outro.
709. A paisagem refletida nós veremos, como se estivéssemos olhando na mesma de um ponto, localizado sobre a superfície da água, a uma distância igual à da objetiva da máquina fotográfica até a água.

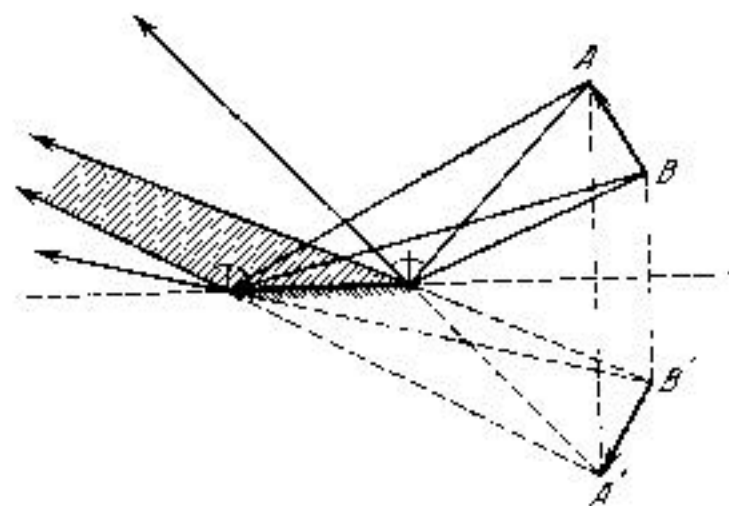


Fig. 498

710. A imagem do segmento AB será vista totalmente, somente, se o olho estiver localizado dentro da região sombreada na fig. 498.
711. No movimento do espelho MN , em direção à parede, a posição da imagem AB na parede, como se vê imediatamente na fig. 499, permanecerá invariável (S_1 e S_2 são as imagens da fonte S para duas posições do espelho: MN e $M'N'$). As dimensões da imagem também não variarão, permanecendo todo o tempo iguais ao dobro das medidas do espelho.

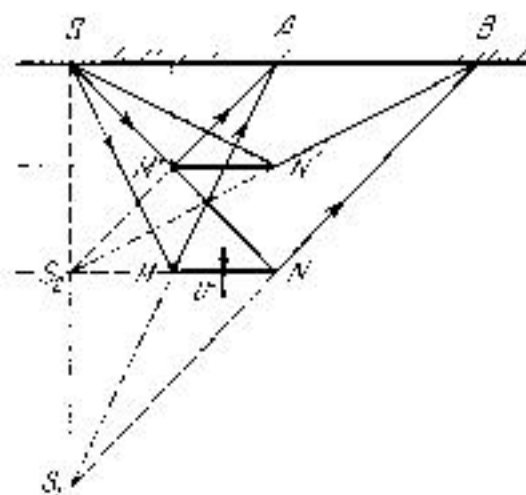


Fig. 499

712. Se desprezarmos as perdas na reflexão, a iluminação da imagem será sempre 4 vezes menor do que a iluminação do espelho. Ao mesmo tempo, a iluminação do espelho varia, em consequência da variação da distância da lâmpada até o espelho e em consequência da variação do ângulo de incidência dos raios. Para um espelho pequeno teremos iluminação máxima possível para uma distância do espelho até a parede igual a: $l = (\sqrt{2}/2) d$, onde d é a distância da fonte de luz até o ponto da parede, ao qual aproxima-se o espelho.
713. Ao girarmos o espelho em um ângulo α , o raio refletido girará em 2α , devido a que o ângulo de incidência aumenta em α e o ângulo de reflexão aumenta na mesma grandeza. Consequentemente, a velocidade angular de rotação do raio refletido é: $\omega = 2\pi n/2$. A velocidade linear do movimento da imagem pela tela é $v = 4\pi nR \approx 62,8$ m/s.
714. 1) O raio refletido do primeiro espelho forma um ângulo igual a 2α com o raio incidente, onde α é o ângulo de incidência. Em um intervalo de tempo t , o espelho gira em um ângulo ωt e o novo ângulo de incidência será igual a $\alpha + \omega t$. O ângulo de reflexão também será esse mesmo. Consequentemente, o ângulo entre o raio incidente e o raio refletido aumenta em $2\omega t$, i.é., o raio refletido girará em um ângulo $2\omega t$. Em virtude disto, o ângulo de incidência no segundo espelho, se o mesmo não girasse, seria igual a $\beta + 2\omega t$, onde β é o ângulo de incidência, estando os discos imóveis. Mas, no tempo t , o espelho também gira em um ângulo ωt , por isso o ângulo de incidência torna-se igual a $\beta + 3\omega t$. O ângulo de reflexão será esse mesmo. Consequentemente, depois de duas reflexões, o raio dá um giro em um ângulo $3\omega t$ de sua direção, estando fixos os espelhos. Depois de três reflexões o raio gira em $5\omega t$, depois de n reflexões, em $(2n - 1) \cdot 2\omega t$. Deste modo, a velocidade angular será igual a $\Omega = (2n - 1) \cdot 2\omega$.
- 2) A imagem no espelho que se distancia da fonte com velocidade v , distanciar-se-á da fonte com velocidade igual a $2v$, e do segundo espelho, com velocidade $3v$. Por isso, a segunda imagem

move-se com velocidade $3v$ relativamente ao segundo espelho e com velocidade igual a $4v$ relativamente à fonte. A velocidade da terceira imagem, relativamente à fonte, será igual a $6v$ e a velocidade da enésima será igual a $2nv$.

715. 1) Ao girarmos o primeiro espelho em um ângulo ωt , o raio refletido girará em um ângulo $2\omega t$ (ver a solução do problema 714). Consequentemente, aumentará em $2\omega t$ o ângulo de incidência no segundo espelho e, se o mesmo não girasse, o ângulo de reflexão também aumentaria em $2\omega t$. Depois de duas reflexões, o raio girará, em comparação com o caso dos espelhos fixos, em um ângulo $2\omega t$. Entretanto, em consequência da rotação do segundo espelho, o ângulo de incidência do raio no mesmo, em um tempo t , diminuirá em ωt . Na mesma grandeza diminuirá o ângulo de reflexão, por isso o raio refletido terá a mesma direção, que no caso dos discos fixos. Uma vez que tal discussão pode ser feita para quaisquer das duas reflexões consecutivas, a velocidade angular de rotação do raio, que sofre n reflexões, será:

$$\Omega = 0, \text{ se } n \text{ for par; } \Omega = 2\omega, \text{ se } n \text{ for ímpar.}$$

2) A primeira imagem distancia-se da fonte com velocidade $2v$ e do segundo espelho, com velocidade v . Consequentemente, a segunda imagem move-se, relativamente ao segundo espelho, com velocidade v , i.é., a mesma está fixa em relação à fonte. Continuando esta consideração, encontraremos, que a velocidade linear procurada da enésima imagem será igual a zero, se n for par e igual a $2v$, se n for ímpar.

716. O raio refletido do espelho ON forma com o raio incidente um ângulo φ (ver fig. 244), que não depende do ângulo de incidência

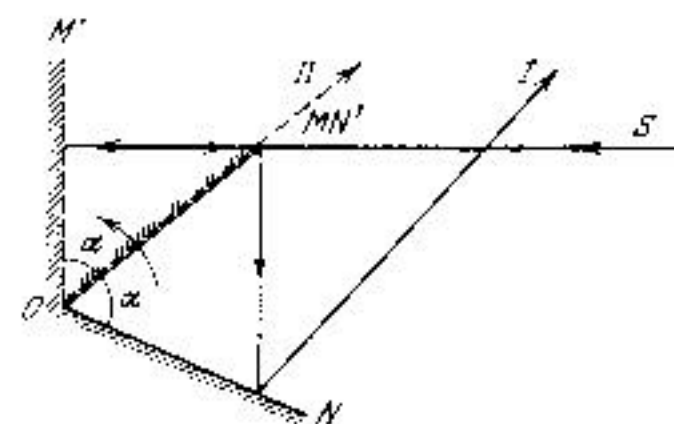


Fig. 500

i. Realmente, como vemos do triângulo ABC , $\varphi = 180^\circ - 2(i + r)$. Ao mesmo tempo, no triângulo OAB $\alpha = (90^\circ - i) + (90^\circ - r) = 180^\circ$, donde $\varphi = 180^\circ - 2\alpha = 60^\circ$. Na rotação do espelho a direção do raio refletido não varia. Consequentemente, se, atingindo o espelho OM , o raio refletir-se do espelho ON , o mesmo obrigatoriamente atingirá o receptor. Como não é difícil ver na fig. 500, na qual estão representadas

717. Não, uma vez que o olho será atingido pelos raios que dão as imagens, somente, de pequenas partes do quadro (ver a fig. 501,

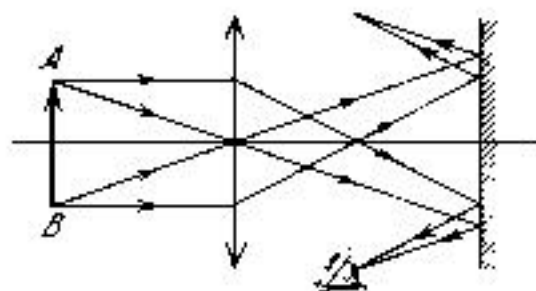


Fig. 501

718. Da igualdade de triângulos SOA , SOB , $S'O A$, $S'O B$ deduz-se (fig. 562), que a fonte de luz S , sua imagem S' no espelho OB e

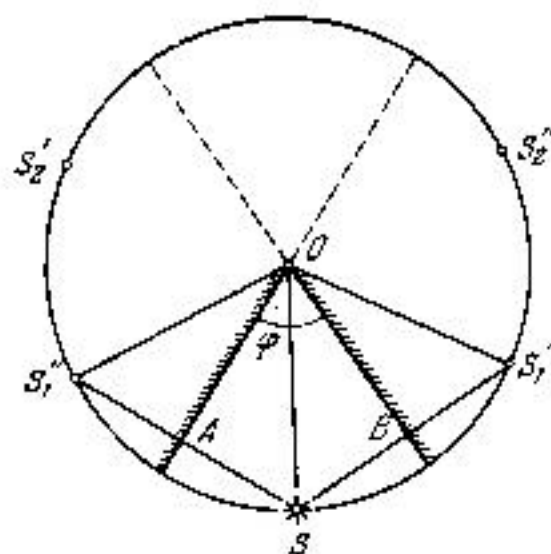


Fig. 502

468

719. Utilizando a solução do problema 718, construiremos em série, as primeiras, segundas, terceiras, etc. imagens da fonte S nos espelhos (fig. 503). Todas elas encontram-se em uma circunfe-

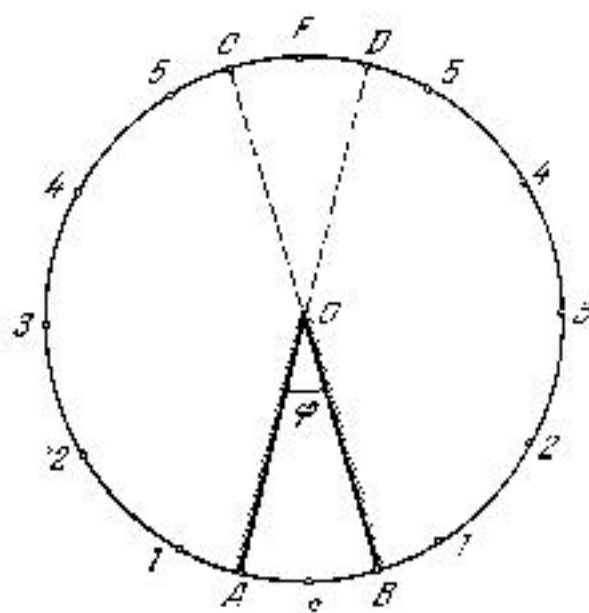


Fig. 592

720. Construiremos a imagem do ponto B no espelho bd (fig. 504). A seguir construímos a imagem B_1 no espelho ed ; B_2 é a imagem de B_1 no espelho ac ; B_3 é a imagem de B_2 no espelho ab . Unimos os pontos A e B_3 . C é o ponto de intersecção de ab com a linha AB_3 . De B_3 traçamos a linha B_3C . O ponto D , de intersecção desta linha com ac , uniremos com B_2 . E uniremos com B_1 e F com B . Pode-se afirmar, que a linha quebrada $ACDEFB$, é a trajetória procurada do raio. Realmente, uma vez que o $\triangle AB_3CB_2$ é isósceles,

CD é a reflexão do raio AC . Por analogia, pode-se convencer de que DE é a reflexão de CD , etc.

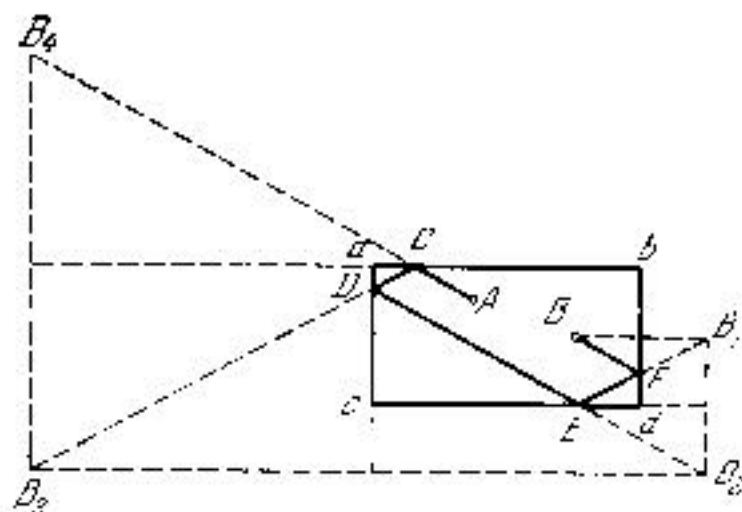


Fig. 594

A solução dada do problema não é única, uma vez que o raio inicialmente não é obrigado a dirigir-se para o espelho AB .

721. O coeficiente de reflexão da luz da superfície da água, diminui com a diminuição do ângulo de incidência. Se o observador olha para baixo, então, os seus olhos são atingidos por raios refletidos sob ângulos pequenos. Os raios refletidos de regiões marítimas no horizonte atingem os olhos sob grandes ângulos.
722. Segundo a lei de refração $\sin i \sin r = n$ (fig. 595). Ao sair da placa, temos que $\sin r \sin i_1 = 1/n$. Multiplicando estas expres-

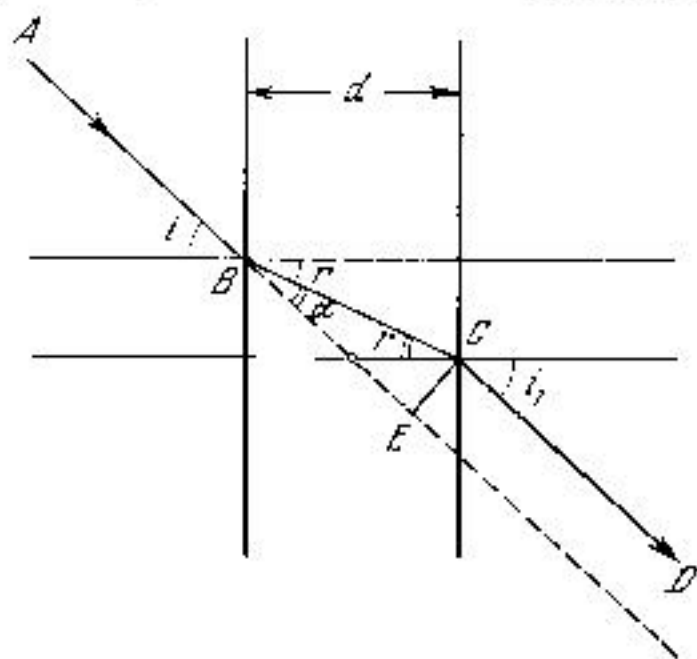


Fig. 595

sões, obtemos que $\sin i = \sin r_1$, i.é., o raio, que é refratado da placa CD , é paralelo ao raio incidente AB . Como vemos no desenho $\alpha = i - r$. O deslocamento procurado do raio é $x = EC = BC \sin (i - r)$, uma vez que $BC = d \cos r$, então,

$$x = \frac{d \sin (i - r)}{\cos r} = d \sin i \left(1 - \frac{\cos i}{n \sqrt{1 - \sin^2 i}} \right).$$

O deslocamento máximo é igual a d para $i \rightarrow 90^\circ$.

723. O ângulo de incidência do raio na face AC e BC é igual a 45° . Para a reflexão total é necessário que $\sin i > 1/n$, donde $n > \sqrt{2} \approx 1,4$.
724. O ângulo de incidência do raio na face BC é igual ao ângulo procurado α . A fim de que o raio reflita-se, totalmente, da face BC , é necessário que o ângulo α seja maior do que o ângulo limite. Consequentemente, $\sin \alpha > n_2/n_1$, onde n_2 é o índice de refração da água, donde $\alpha > 42,20^\circ$.
725. Este fenômeno é nada mais que uma miragem, que frequentemente observa-se nos desertos. A camada aquecida de ar, próxima ao asfalto, tem um coeficiente de refração menor do que as camadas localizadas mais acima. Tudo conseqüentemente disto, ocorre a reflexão total e resulta que o asfalto torna-se um ótimo refletor de luz como a superfície da água.
726. Dividamos a placa em uma infinidade de lâminas finas, de uma espessura bem pequena, a fim de que, nos limites de cada lâmina,

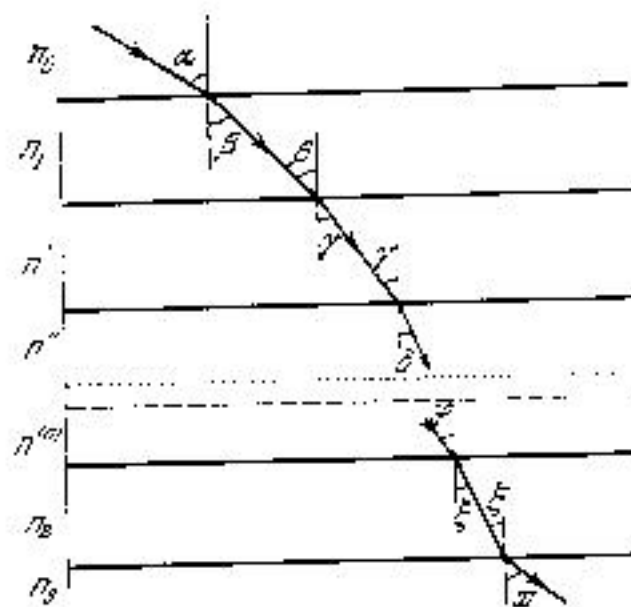


Fig. 596

possamos considerar o índice de refração como uma grandeza constante (fig. 596). Suponhamos, que o raio penetra na placa de um meio com índice de refração n_2 e sai da mesma para um meio com índice de refração n_3 . Então, segundo a lei da refração temos

que:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_1}{n_2},$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{n_2}{n_3}, \quad \text{etc.}, \quad \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \epsilon}{\sin \alpha} = \frac{n_3}{n_2}.$$

Multiplicando estas igualdades, obteremos que $\sin \alpha \sin \alpha = \dots = \sin \alpha \sin \alpha$.

Consequentemente, o ângulo, com que o raio sai da placa, é:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{n_0}{n_3} \sin \alpha \right)$$

e dependerá, somente, do ângulo de incidência do raio na placa e dos índices de refração dos meios, em ambos os lados da mesma. Em particular, se $n_0 = n_3$, então, $\alpha = \alpha$. Normalmente, o ângulo θ de inclinação do raio, em relação à vertical, está relacionado com o índice de refração n , em qualquer ponto da placa, pela relação $n \sin \theta = \text{const} = n_0 \sin \alpha$. Se, em um lugar qualquer dentro da placa, o índice de refração atinge um valor $n = n_0 \sin \alpha$, então, ocorrerá a reflexão total. Neste caso, o raio sairá da placa para o meio com o mesmo ângulo α , com o qual ele penetrou na mesma (fig. 507).

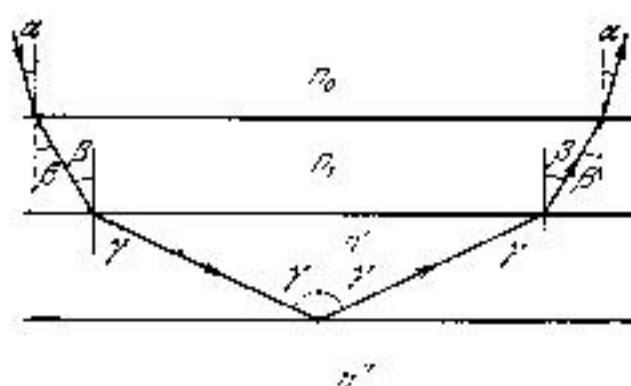


Fig. 507

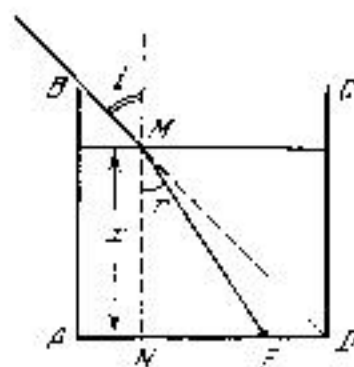


Fig. 508

727. A quantidade mínima de água, determinada pelo nível x (fig. 508), podemos determinar do triângulo MNF . $NF = x - l = x \operatorname{tg} r$. Da lei da refração temos, que $\sin r = \sin i$. Consequentemente,

$$x = \frac{h}{1 - \operatorname{tg} r} = \frac{l \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i} \approx 27 \text{ cm},$$

uma vez que $i = 45^\circ$ e $n = 1,3$. O volume necessário de água é $V = x a^2 \approx 43,2 \text{ l}$.

728. $\varphi = 120^\circ$.

729. O trajeto do raio no prisma está representado na fig. 509. Entre os ângulos α e β existe uma ligação evidente: $2\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 2\beta$, donde: $\alpha = 72^\circ$; $\beta = 36^\circ$.

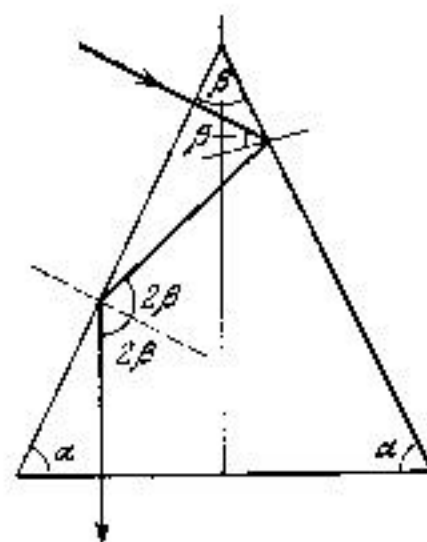


Fig. 509

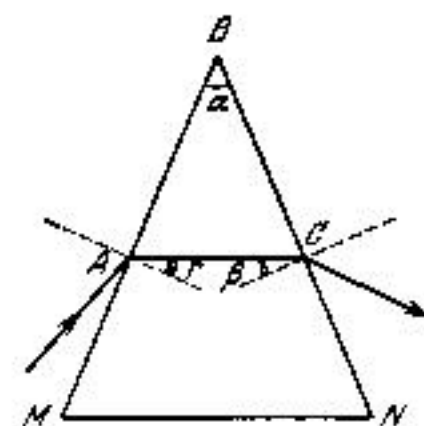


Fig. 510

730. O trajeto do raio no prisma está representado na fig. 510. A fim de que não ocorra uma reflexão total na face BC , é necessário que $\sin \beta \leq 1/n$. Como vemos no desenho, $\beta = \alpha - r$. Consequentemente, quanto maior for r , tanto maior será o valor permitido de α . O valor máximo de r determina-se pela condição: $\sin r = 1/n$ (o ângulo de incidência é igual a 90°), donde $\alpha_{\text{máx}} = 2 \arcsin (2/3) \approx 83^\circ 40'$.

731. Considerando os triângulos ABC , AMC e ADC (fig. 511), não é difícil convencer-se de que $r = r_1 = q$; $\gamma = \alpha - \beta - \eta$. Pela lei da refração temos que:

$$\sin \alpha / \sin r = n, \quad \sin r_1 / \sin \beta = \frac{1}{n}.$$

Resolvendo o sistema de equações obtidas, determinamos que:

$$n = \sin \beta \sqrt{\left\{ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin (\alpha - \beta - \gamma)} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\alpha - \beta - \gamma)} \right\}^2 + 1}.$$

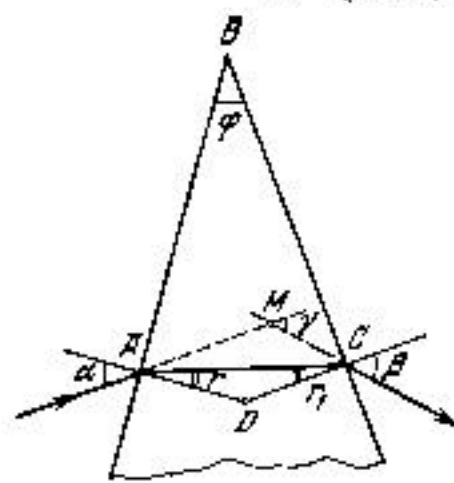


Fig. 511

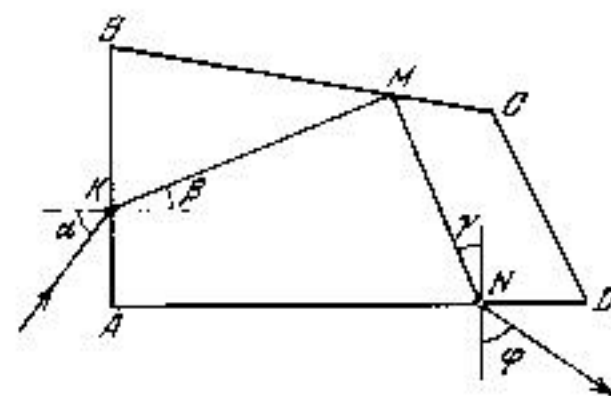


Fig. 512

732. Pelas condições do problema o raio incidente e o raio que passa através do prisma, são perpendiculares entre si. Consequentemente, $\angle \varphi = \angle \alpha$, assim como, $\angle \gamma = \angle \beta$ (fig. 512). A soma dos ângulos do paralelepípedo $AKMN$ é igual a 360° . Por isso, $\angle KMN = 90^\circ$ e o raio KM incide na face BC sob um ângulo de 45° . Conhecendo os ângulos do triângulo KBM , não é difícil encontrar que $\beta = 30^\circ$. Pela lei da refração temos que $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Consequentemente,

$$\sin \alpha = 0,5 n, \alpha = \arcsen 0,5 n.$$

Uma vez que a reflexão total sob um ângulo de 45° é observada, somente, para $n \geq \sqrt{2}$, então, o ângulo α situa-se nos limites $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

733. O papel, em parte, permite a passagem de luz. Entretanto, em consequência da estrutura fibrosa e do grande número de poros, a dispersão da luz, em todas as partes, é muito grande. Por isso, ler o texto é impossível. Cada gota de água ao encher os poros, diminui a dispersão da luz, uma vez que o índice de refração das mesmas é semelhante ao índice de refração do papel. A luz começa a passar através do papel, não sofrendo deslocamentos sensíveis. Em consequência disto, o texto pode ser lido facilmente.

734. Na primeira fronteira de divisão, o feixe, portador de uma energia E , divide-se em dois (fig. 513). Para o primeiro meio retornará um

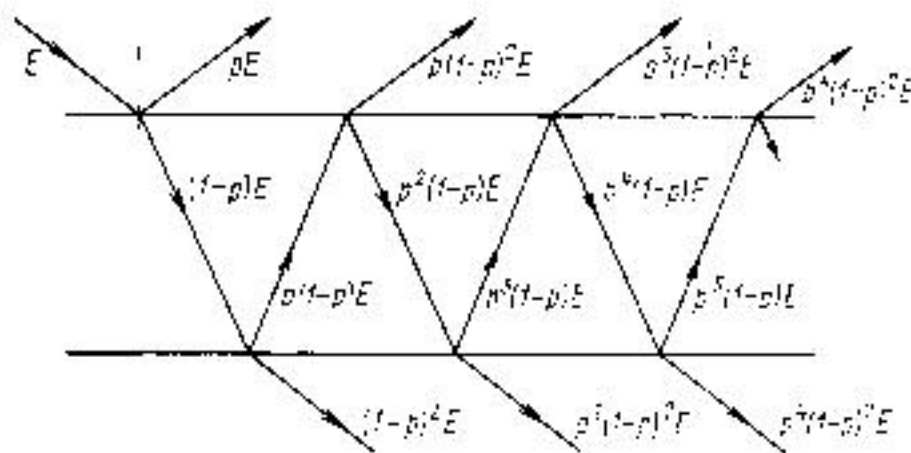


Fig. 513

feixe com energia pE e infiltrar-se-á na placa uma luz que possui energia $(1-p)E$. Na segunda fronteira de divisão, o feixe, que possui energia $(1-p)E$, divide-se novamente. O feixe sairá da placa no segundo meio com energia $(1-p)^2E$. Fazendo considerações análogas, sucessivamente chegaremos à conclusão que através da placa passarão e sairão no segundo meio, feixes luminosos com energias $(1-p)^2E$, $p^2(1-p)^2E$, $p^4(1-p)^2E$, etc. (fig. 513).

A energia resultante dos feixes, que atingem o segundo meio, é igual a:

$$E_2 = (1-p)^2 E (1 + p^2 + p^4 + \dots) = E \frac{(1-p)^2}{1-p^2} = E \frac{1-p}{1+p}.$$

Ao primeiro meio voltarão os feixes com energias:

$$E_1 = pE + (1-p)^2 Ep (1 + p^2 + p^4 + \dots) = E \frac{2p}{1+p}.$$

A energia total será igual a:

$$E_1 + E_2 = E \frac{2p}{1+p} + E \frac{1-p}{1+p} = E.$$

§ 30. LENTES E ESPELHOS ESFÉRICOS

735. Suponhamos, que a distância do ponto luminoso até o espelho seja igual a d , e a distância da imagem até o espelho seja f . Então, pela fórmula do espelho côncavo temos que:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

Pela condição $|d - f| = 0,75 R$. Resolvendo o sistema de equações obtido, encontramos as seguintes soluções:

$$d_1 = 1,5 R, d_2 = 0,25 R, d_3 = 0,75 R.$$

A quarta solução $d_4 = -0,5 R$ é inconveniente, uma vez que só tem sentido $d > 0$.

736. $f = 2R$.

737. A lente é divergente. A distância focal da mesma é igual a 3 m.

738. No primeiro caso, a distância focal determina-se pela fórmula:

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Uma vez que no vácuo a distância focal da lente é igual a f , então,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{(n-1)f},$$

donde $f_1 = \frac{(n-1)f}{n/n_1 - 1} = 90$ cm. No segundo caso, a distância

focal procurada é igual a $f_2 = \frac{(n-1)f}{n/n_2 - 1} = -102$ cm. A lente será divergente.

739. Se a lente tiver a parte convexa dirigida para dentro do tubo, então, $F_1 = \frac{n_1}{n_2 - 1} R$. Se para dentro do tubo estiver dirigida a

parte plana da lente, então, $F_2 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$.

740. Como foi demonstrado na solução do problema 738,

$$-f = \frac{n_2(n_1 - 1)}{D(n_1 - n_2)}, \text{ donde } n_2 = \frac{fDn_1}{fD + 1 - n_1} \approx 1,67.$$

741. Simbolizemos por R o raio de curvatura das superfícies da lente, por n_1 o índice de refração do vidro. Então,

$$\frac{1}{F_1} = (n_1 - 1) \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_1}{n} - 1 \right) \frac{2}{R}.$$

Ao mesmo tempo, se a lente encontra-se na região de separação dos meios e os raios partem da água, o foco da lente está localizado no ar, a uma distância F' determinada da igualdade:

$$\frac{1}{F'} = \frac{n_1 - n}{R} + \frac{n_1 - 1}{R}.$$

Correspondentemente, se os raios partem do ar, o foco está localizado na água, a uma distância F'' , sendo que:

$$\frac{1}{F''} = \frac{n_1 - n}{R} + \frac{n_1 - 1}{R}.$$

Destas quatro equações, deduzimos que:

$$F' = \frac{2F_1F_2}{F_2 + nF_1} = \frac{6F_1F_2}{4F_1 + 3F_2}, \quad F'' = \frac{2nF_1F_2}{F_2 + nF_1} = \frac{3F_1F_2}{4F_1 + 3F_2}.$$

742. Está claro que uma das imagens será virtual. Por isso, simbolizando por a_1 e a_2 as distâncias das fontes de luz até a lente, e por b_1 e b_2 as distâncias da lente até as imagens, teremos que:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f},$$

sendo que pelas condições do problema $a_1 + a_2 = l$, $b_1 = b_2$. Resolvendo o sistema dado de equações, obtemos que:

$$a_1 = \frac{l(1 \pm \sqrt{1 - 2f/l})}{2}.$$

A lente deverá localizar-se a uma distância de 6 cm de uma das fontes e a 18 cm da outra.

743. Aplicando a ambos os casos a fórmula da lente, obtemos que:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}.$$

Pela condição do problema $a_2 = a_1 + l$, $b_1/a_1 = k_1 = 3$ (aumento no primeiro caso), $b_2/a_2 = k_2 = 2$ (aumento no segundo caso), donde: $f = \frac{F_1 k_2}{k_1 - k_2}$, $f = 9$ cm.

744. 1) O trajeto dos raios, no caso dado, está representado na Fig. 514, a. Utilizando a propriedade da reversibilidade dos feixes

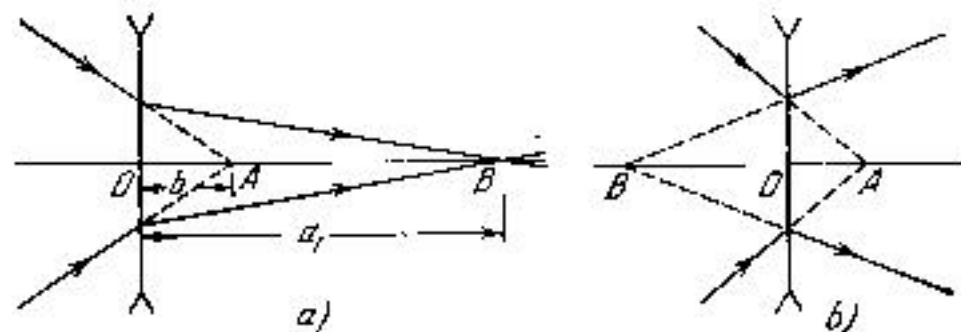


Fig. 514

luminosos, o ponto B pode ser considerado como uma fonte de luz, e o ponto A, como uma imagem. Então, pela fórmula da lente, temos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f},$$

onde $f = a_1 b / (a_1 - b) = 20$ cm.

2) O trajeto dos raios está representado na Fig. 514, b. No caso dado, a imagem (ponto A) e a fonte (ponto B) são virtuais. Pela fórmula da lente, temos:

$$-\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f},$$

onde $f = a_2 b / (a_2 - b) = 12$ cm.

745. Baseando-se na fórmula da lente, temos que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{1}{f},$$

onde a é a distância entre a lente e a lâmpada, donde:

$$a^2 - ad + df = 0,$$

Resolvendo esta equação, obtemos que:

$$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - df}.$$

Consequentemente, serão possíveis duas posições da lente: a uma distância $a_1 = 70$ cm da lâmpada e a uma distância $a_2 = 30$ cm. Para $f = 28$ cm não existirá uma imagem nítida na tela, para qualquer posição da lâmpada, uma vez que para a obtenção da imagem é necessário que $d \geq 4f$.

746. No primeiro caso, $h_1/H = b_1/a_1$, onde a_1 e b_1 são as distâncias do objeto e da imagem até a lente. No segundo caso, correspondentemente, $h_2/H = b_2/a_2$. Como deduzimos da solução do problema 743: $a_1 = b_2$ e $b_1 = a_2$, consequentemente, $H = \sqrt{h_1 h_2}$.

747.
$$F = \frac{n - n_1}{n_1(n - 1)} \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 4 \text{ cm}.$$

748. Em base da fórmula do espelho, temos que:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

O aumento linear do espelho é: $H/h = b/a$. A dimensão angular da imagem em um espelho côncavo, pelas condições do problema, é 1,5 vezes maior do que a dimensão angular da imagem em um espelho plano: $\beta = 1,5\alpha$ (fig. 515). É evidente que $\tan \alpha = h/2a$, $\tan \beta = H/(a + b)$. Para $h \ll 2a$ os ângulos α e β serão pequenos. Para pequenos ângulos, temos que:

$$H/(a + b) \approx 1,5 \cdot h/2a.$$

Excluindo desta equação as incógnitas H/h e b , determinamos que $f = 3a/2$. Consequentemente, $R = 2f = 3a = 6m$.

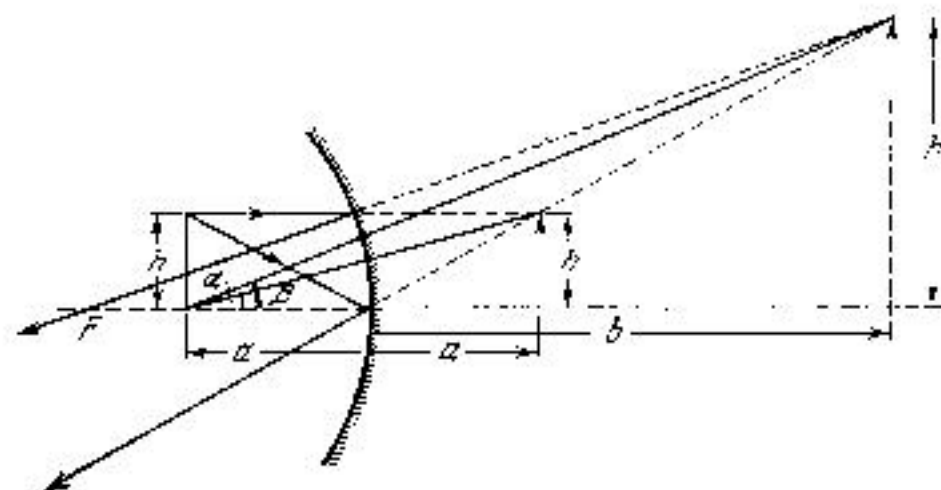


Fig. 515

749. A construção procurada vê-se representada na fig. 516. Prolonguemos AB até a intersecção com o plano focal da lente NN' . O feixe de raios paralelos, depois da refração na lente, continua

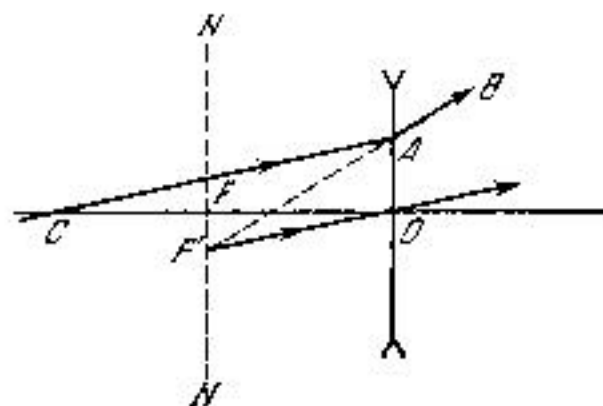


Fig. 516

de tal modo que os prolongamentos dos raios refratados deverão interceptar-se em F' . O raio $F'O$ não refratar-se-á. Consequentemente, até a lente, o raio CA , incidente no ponto A , é paralelo a $F'O$.

750. Se A é a fonte e B é a imagem, então, a lente é convergente. A posição do centro ótico da lente O e dos focos F da mesma, encontra-se pela construção gráfica representada na fig. 517. Se B é a fonte e A é a imagem, então, a lente é divergente. A construção correspondente vê-se na fig. 518.

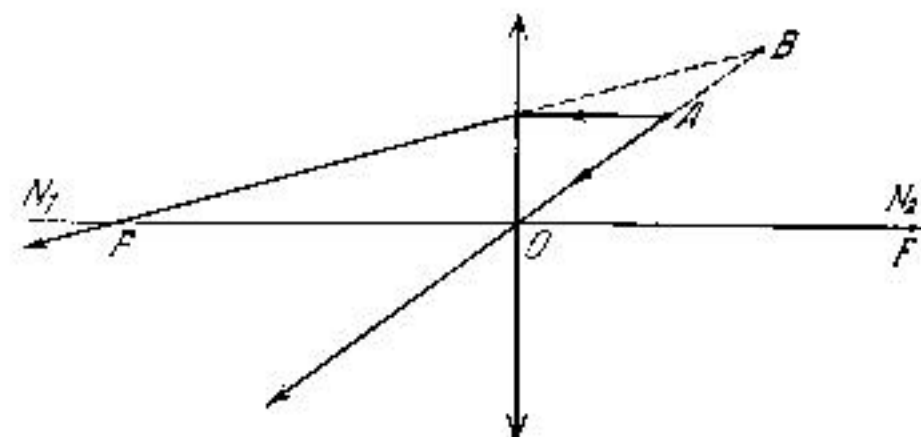


Fig. 517

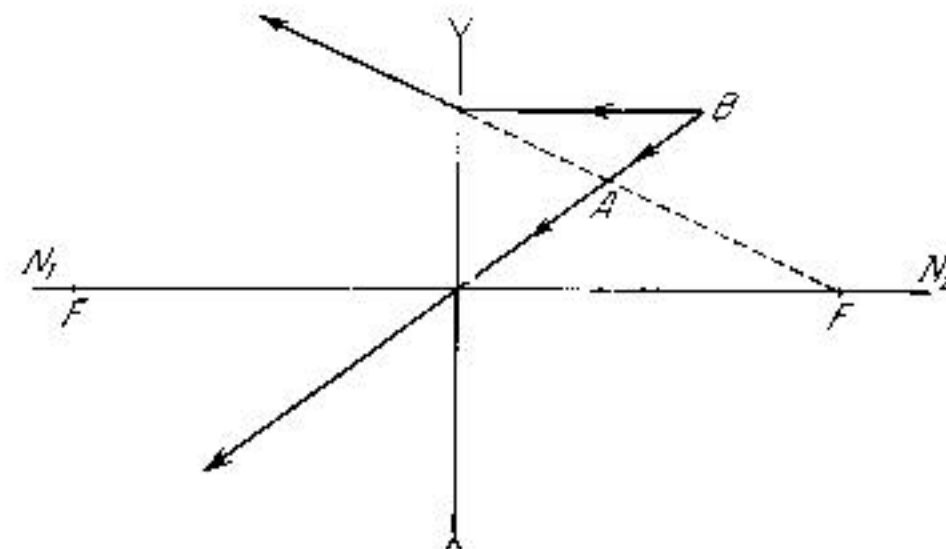


Fig. 518

751. O centro da lente O é o ponto de intersecção das retas SS' e N_1N_2 . Os focos são determinados facilmente pela construção dos raios, paralelos ao eixo ótico principal (fig. 519).

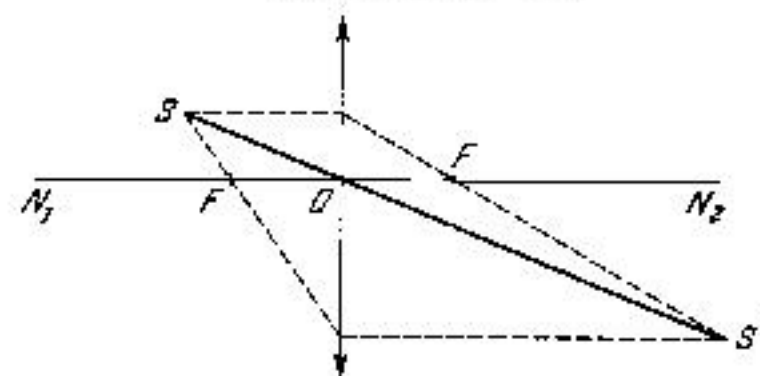


Fig. 519

752. Traçando uma perpendicular BO à reta N_1N_2 , encontramos o ponto O , que é o centro ótico da lente (fig. 520). Traçamos um

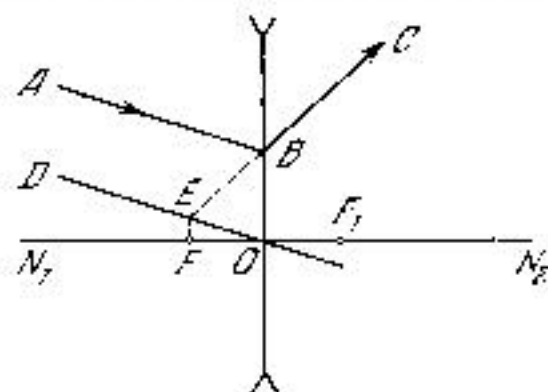


Fig. 520

eixo ótico secundário DO paralelamente ao raio AB . Prolongamos a reta BC até a intersecção com DO no ponto E , que se localiza no plano focal. Baixando de E uma perpendicular a N_1N_2 , encontramos o ponto F , que é um dos focos principais da lente. Utilizando a propriedade da reversibilidade do raio, poderemos encontrar, de um modo análogo, o outro foco principal da lente F_1 . A imagem S' pode ser real ou virtual. Em ambos os casos, para a determinação da posição da fonte, traçamos um raio arbitrário ADS' e, paralelamente ao mesmo, um eixo ótico secundário BOC (fig. 521). Unindo por retas os pontos de intersecção B e C

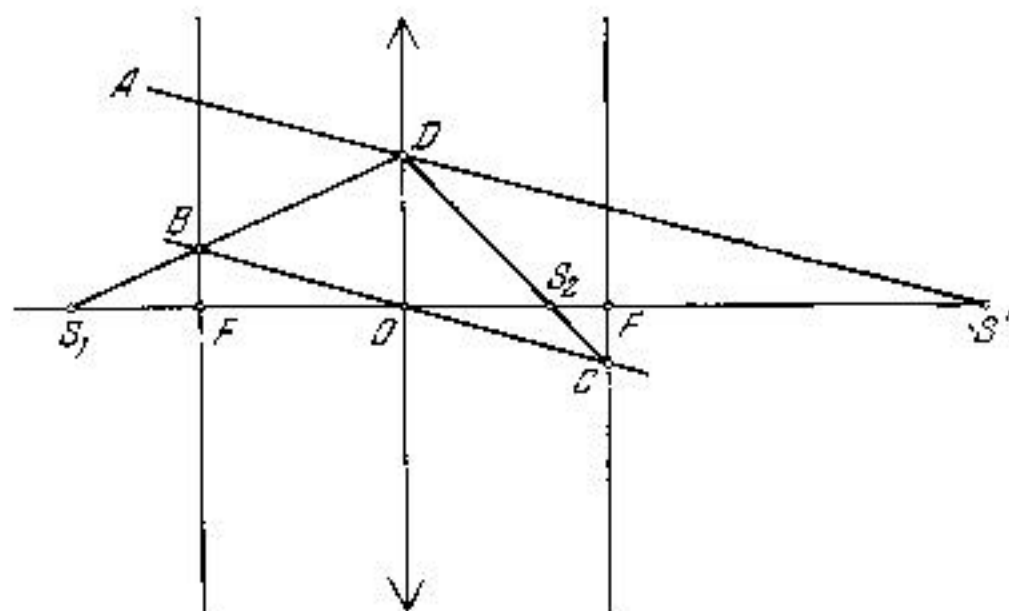


Fig. 521

(o eixo secundário com os planos focais); com o ponto D , determinamos a posição da fonte S_1 (se a imagem S' for real) e S_2 (se a imagem S' for virtual).

754. Utilizando o fato, de que o raio incidente no espelho, no seu polo, reflete-se simetricamente em relação ao eixo ótico principal, construímos o ponto S_1 , simétrico com S' , e traçamos o raio SS_1 , até a intersecção com o eixo no ponto P (fig. 522). Este

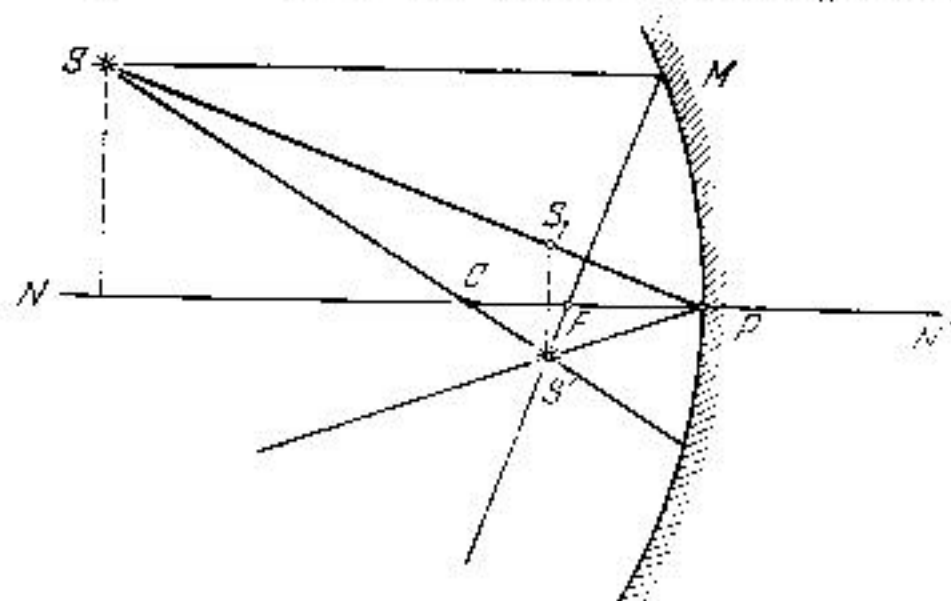


Fig. 522

ponto será o polo do espelho. O centro ótico C do espelho, como é evidente pode ser encontrado como o ponto de intersecção do raio SS' com o eixo NN' . O foco é determinado pela construção comum do raio SM , paralelo ao eixo, o qual, ao refletir-se, deverá passar pelo foco F localizada no eixo ótico da espelho e por S' .

755. 1) Construindo, como na solução do problema 754, o raio SS_1 , encontramos o ponto C (centro ótico do espelho) (fig. 523, a).

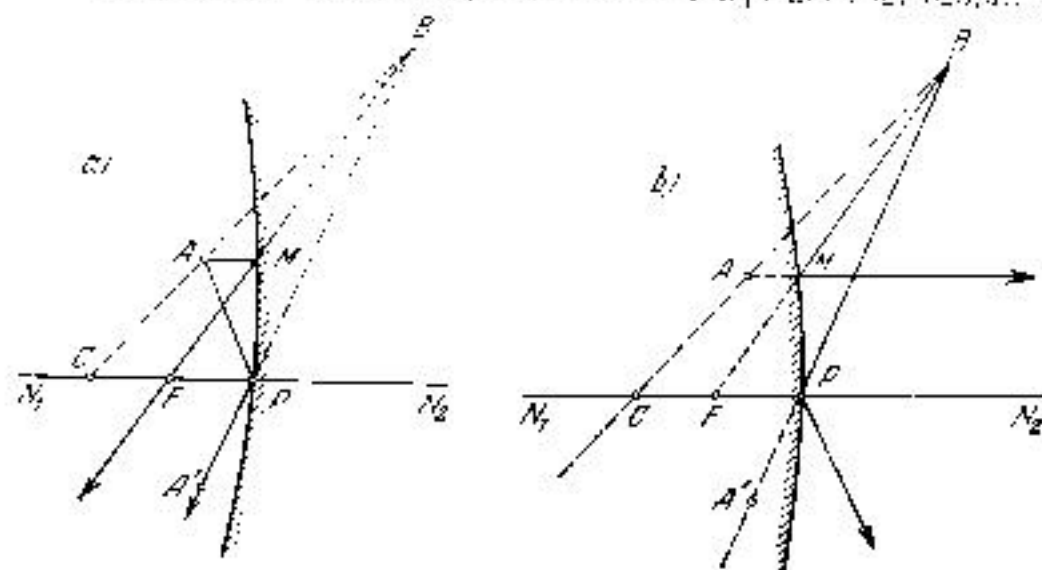


Fig. 523

poço P pode ser encontrado, construindo com auxílio de um ponto simétrico A' , o trajeto do raio refletido no polo A PA' . A posição do foco do espelho F determina-se com a ajuda de uma construção comum do raio AM , paralelo ao eixo.

2) Por uma construção análoga determinamos o centro do espelho C e o polo P (fig. 523, b). O raio BM , refletindo-se, dirige-se à paralelamente ao eixo ótico do espelho. Por isso, para a determinação do foco, primeiramente encontramos o ponto de interseção M da reta AM , paralela ao eixo ótico, com o espelho, e depois prolongamos BM até a interseção com o eixo no foco F .

756. 1) Os raios, refletidos de um espelho plano, aumentam a iluminação no centro da tela. A presença do espelho é equivalente ao surgimento de uma nova fonte (com a mesma intensidade de luz), localizada a uma distância da tela três vezes maior do que a primeira fonte. Por isso, a iluminação deverá aumentar em 1,9 da iluminação, que existia anteriormente: $E_1 = 2,5$ lux. 2) O espelho côncavo está localizado de tal modo, que a fonte encontra-se no foco do mesmo. Os raios, depois de refletirem-se do espelho, formam um feixe de raios paralelos. A iluminação no eixo do feixe de raios paralelos é uniforme em todos os lugares e igual a iluminação, criada por uma fonte pontual e localizada em um ponto do espelho, o mais próximo possível do mesmo. A iluminação total, no centro da tela, é igual à soma das iluminações, criadas pela própria fonte no centro da tela e pelos raios refletidos: $E_2 = 2 \cdot 2,25$ lux = 4,5 lux. 3) A imagem virtual de uma fonte pontual em um espelho convexo encontra-se a uma distância $2,5r$ da tela (r é a distância

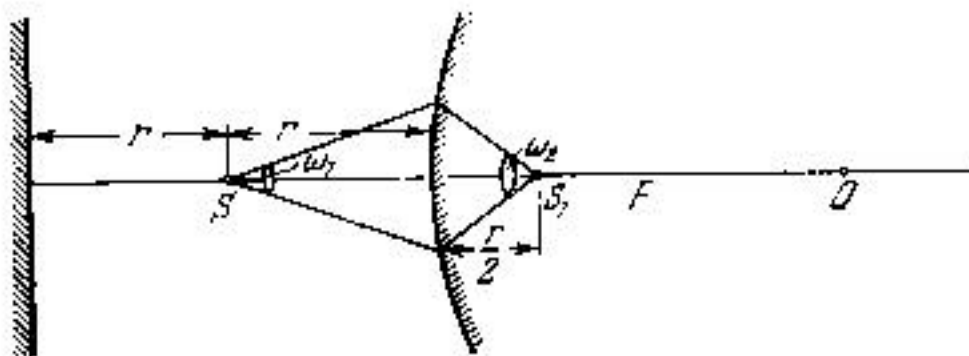


Fig. 524

da tela até a fonte). O fluxo luminoso Φ , enviado por esta fonte virtual, é igual ao fluxo luminoso da fonte real que incide no espelho: $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$. Uma vez que o ângulo sólido ω_1 do fluxo, que incide no espelho da fonte S (fig. 524), é quatro vezes menor do que o ângulo sólido ω_2 , dentro do qual propagam-se os raios da fonte virtual S_2 , então, a intensidade da luz I_2 da fonte virtual é quatro vezes menor do que a intensidade da luz da fonte S . Por isso, a fonte virtual cria no centro da tela uma iluminação $4 \cdot (2,5)^2 = 25$ vezes menor do que a fonte real. Consequentemente, $E_3 = 2,34$ lux.

757. Cada setor da lente cria uma imagem completa independentemente das outras. Por isso não se obtém nenhuma feixe na imagem. Ela é simplesmente menos luminosa.

758. Qualquer seção da lente dá a mesma forma de imagem, que a lente toda. Uma lente complexa pode, em virtude disso, ser considerada como duas lentes com diferentes distâncias focais, mas com um centro ótico comum. Correspondentemente, esta lente criará duas imagens: no ponto S_1 e no ponto S_2 (fig. 525). Na tela, localizada perpendicularmente ao eixo ótico no ponto S_1 ou S_2 , a imagem da fonte será circundada por uma auréola

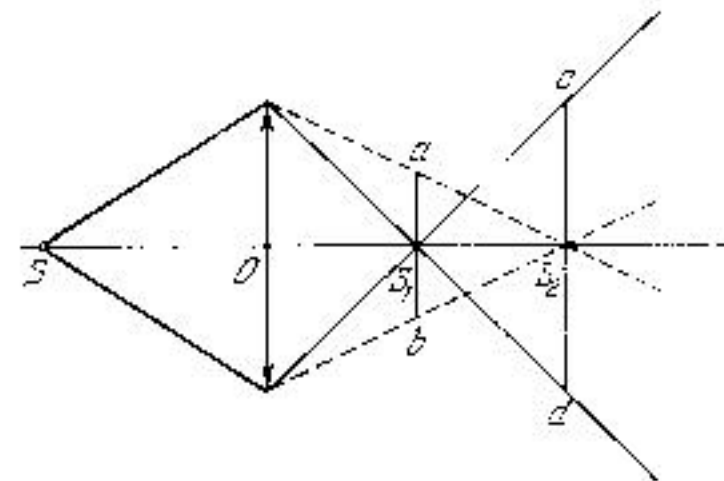


Fig. 525

luminosa de diâmetro ab ou, correspondentemente, de diâmetro cd .

759. Para demonstração da igualdade das dimensões do disco solar, vistas no horizonte e no zênite, é necessário projetar o disco solar, em ambos os casos, numa folha de papel com auxílio de uma lente de distância focal grande. Neste caso, a lente e a folha deverão ficar perpendiculares aos raios solares. A lente deverá possuir uma grande distância focal, uma vez que as dimensões da imagem são proporcionais a essa distância. Medindo as dimensões das imagens, nos convencemos de que as mesmas são iguais.

§ 31. SISTEMAS E APARELHOS ÓTICOS

760. A lente divergente deverá ser colocada a uma distância de 25 cm da convergente. Então, os focos das lentes divergente e convergente coincidirão. Na fig. 526 está representado graficamente o trajeto dos raios.

São possíveis dois casos:

761. 1) O espelho encontra-se a uma distância $d = f + R$ da lente. O trajeto do raio, paralelo ao eixo ótico do sistema, assim como a imagem do objeto AB , estão representados na fig. 527. A imagem $A'B'$ (direta e real) obtém-se no tamanho natural para qualquer posição do objeto.

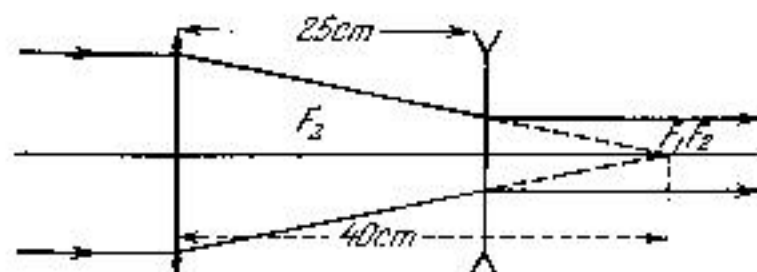


Fig. 526

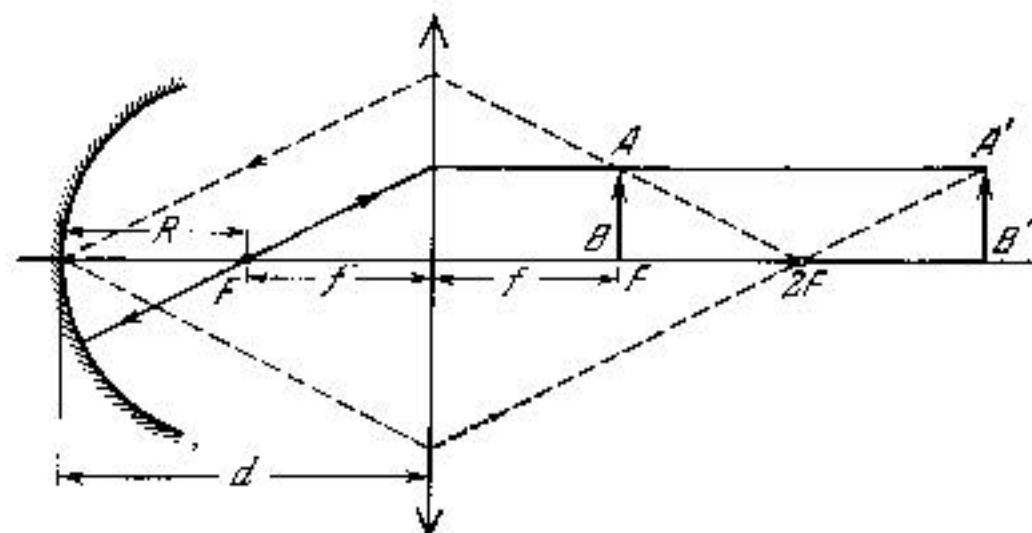


Fig. 527

2) O espelho encontra-se a uma distância igual a $d - f - R$ da lente (fig. 528). A imagem do objeto $A'B'$ terá, também, um tamanho natural, sendo inversa e virtual para qualquer posição do objeto.

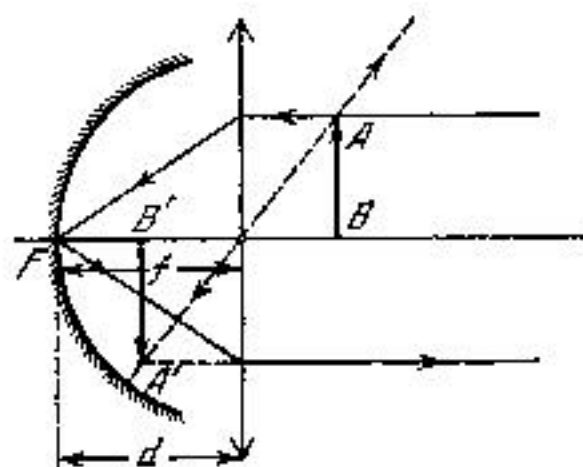


Fig. 528

762. O trajeto dos raios no sistema ótico dado está representado na fig. 529. A primeira lente, na ausência da segunda, cria a imagem $A'B'$, que se encontra a uma distância $b_1 = 60$ cm da lente.

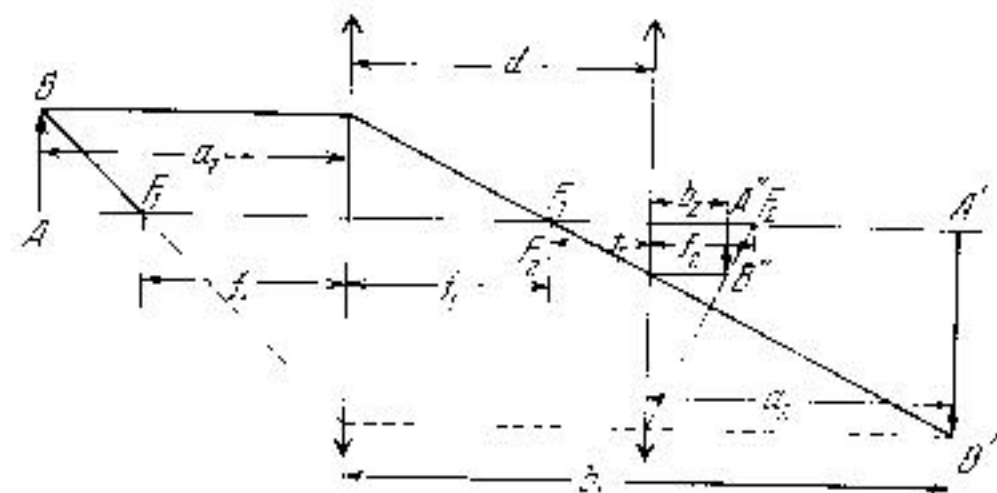


Fig. 529

Esta distância determina-se pela fórmula da lente:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

A imagem $A'B'$ é «virtual» em relação à segunda lente. Consequentemente:

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2},$$

onde $a_2 = b_1 - d = 60$ cm; donde: $b_2 = 7,5$ cm.

763. Da solução do problema anterior deduz-se, que no caso de duas lentes convergentes, que se encontram a uma certa distância d uma da outra, é válida a igualdade:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{d}{a_2 b_1}.$$

Em nosso caso, a lente divergente está localizada junto à convergente ($d = 0$), por isso

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f},$$

onde f é a distância focal do sistema procurada; donde: $f = f_1 f_2 / (f_1 - f_2)$.

764. A lente média (a terceira) é convergente. Se a distância do objeto até a lente da frente do sistema, é igual a d , então, a distância da lente de trás até a imagem, é igual a $f = F^2 / 4d$, onde F é a distância focal da lente divergente. O aumento do sistema é $k = F / 2d$. Na menor distância, entre o objeto e a sua imagem (esta distância é igual a $3F$), $k = 1$.

765. Na segunda lente incide um feixe luminoso, que parte do ponto situado a uma distância $a_2 = 5$ cm da lente. O prolongamento dos

raios luminosos, refratados por esta lente, interceptam-se, como deduzimos da fórmula da lente, a uma distância $b_2 = 1$ cm da mesma (fig. 530). Este ponto coincide com o foco da terceira lente. Por isso, os raios, que saem do sistema, formarão um feixe de raios paralelos. O sistema dado é um telescópio.

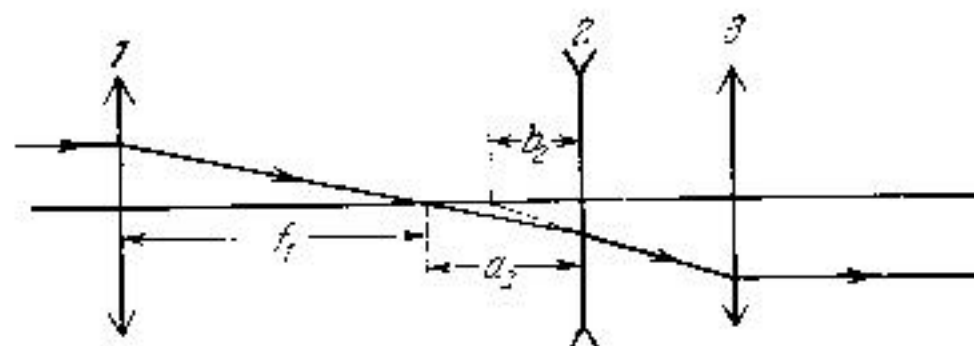


Fig. 530

766. A imagem, obtida pelo segundo sistema, é virtual. Ela localiza-se no plano focal frontal da primeira lente. O tamanho da imagem é igual a 2 mm.
767. Suponhamos, que a distância entre as lentes seja igual a a . Então, se os raios incidem, inicialmente, na lente divergente, a equação para a segunda (convergente) lente é escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{F-a} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}.$$

No caso, em que no primeiro plano localiza-se a lente convergente, a equação para a lente divergente é escrita da seguinte forma:

$$-\frac{1}{p-a} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F}.$$

Onde f_1 e f_2 são as distâncias da lente do três até a imagem no primeiro e no segundo casos. Pela condição, temos que $f_1 = f_2 = f$. Dessas igualdades, temos: $F = f/2 = 10$ cm.

768. O diâmetro da imagem da lua, obtida com o auxílio de uma lente é $d_1 = \varphi F_1$, onde φ é o diâmetro angular da lua. O diâmetro da imagem real, formado pelo sistema dado, é $d_2 = \varphi F^2/a$, onde a é a distância entre as lentes, F é a distância focal das mesmas (ver a solução do problema 767). Consequentemente, $F_x = F^2/a = 25$ cm.
769. A dimensão da imagem, formada pela primeira lente não depende da lente ser divergente ou convergente. Em ambos os casos o diâmetro da imagem é igual a φF , onde φ é o diâmetro angular da lua. Se a segunda lente for convergente, então o aumento da mesma é $k_1 = f_1/(F-a) = F/a$. Analogamente se a segunda lente é divergente, então $k_2 = f_2/(F-a)$, donde deduz-se, que $k_1 = k_2$ e o diâmetro da imagem resultante é $d = \varphi F \cdot F/a = \varphi F^2/a$, igual em ambos os casos.

770. Na fig. 531 está representado o trajeto do raio através da lâmina, do ponto S do objeto. Como resultado da refração da luz na lâmina, temos a impressão que o raio BE sai do ponto S' ; S' é a imagem virtual de S na lâmina. Deste modo, a distância entre a imagem do objeto na lâmina e a lente é igual a $a' = a - SS'$.

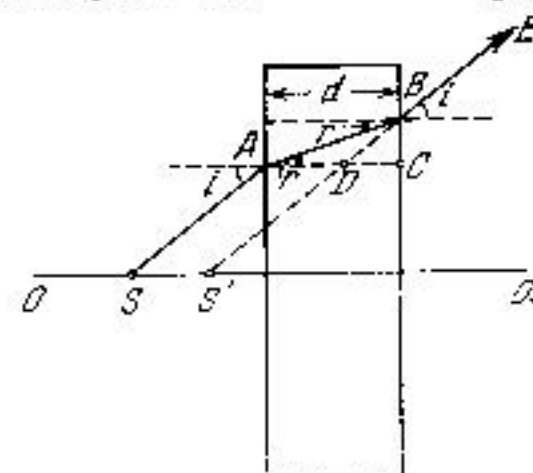


Fig. 531

O deslocamento $SS' = AD = t - DC$. Considerando os ângulos de incidência na lâmina pequenos, teremos que:

$$DC = \frac{BC}{n} = \frac{d \cdot r}{n},$$

uma vez que $r \approx n$. Consequentemente, $SS' = d(1 - 1/n) = -4$ cm. Até o instante, em que foi colocada a lâmina, a tela encontrava-se a uma distância $b = a^2/(a - f) = 120$ cm; depois que foi colocada a lâmina, a tela encontrar-se-á a uma distância $b' = a'^2/(a' - f) = 180$ cm. É necessário mover a tela em 60 cm.

771. Sem o espelho a imagem do objeto $A'B$ é obtida a uma distância $b = a^2/(a - f) = 180$ cm da lente (fig. 532). Depois da

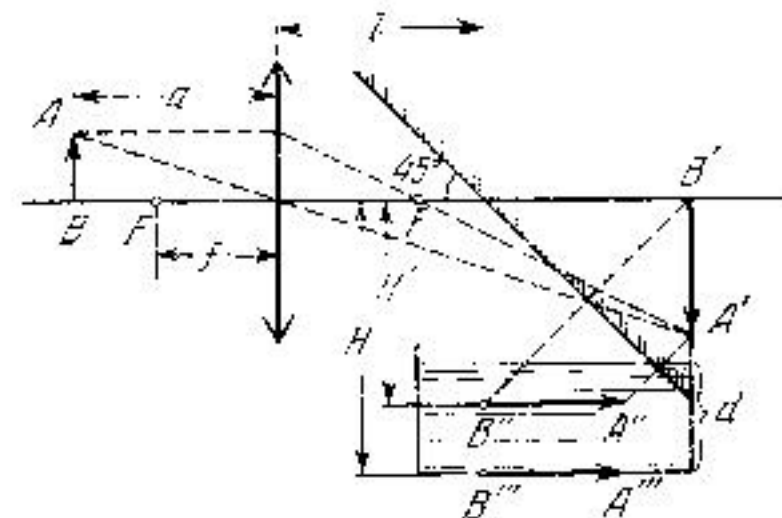


Fig. 532

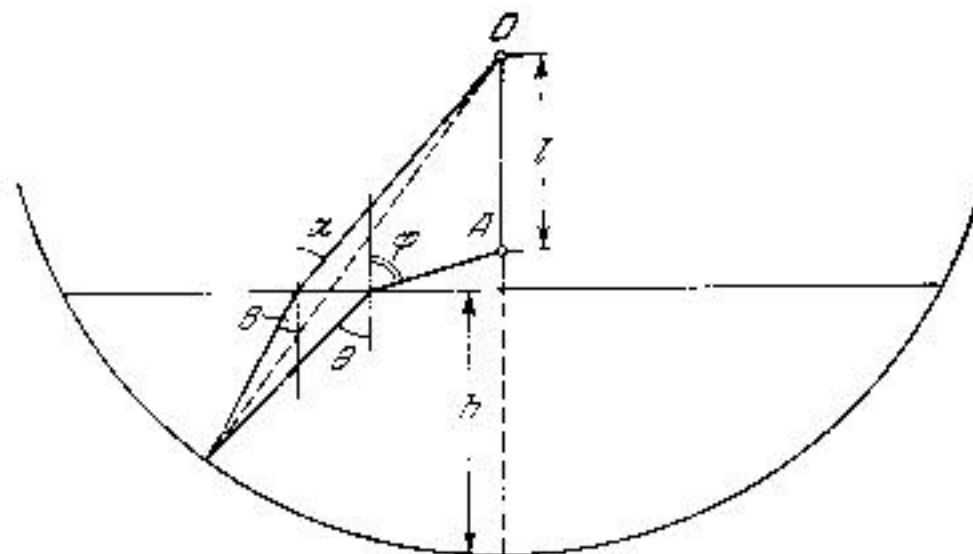
772. Serão possíveis dois casos:

१३३३

Fig. 534

$$\sin \alpha / \sin \beta = n, \sin (\alpha + \theta) / \sin (2\alpha - \beta) = n.$$

773. Uma vez que a imagem, a qual coincide com a fonte, é formada, como resultado da reflexão da parte do espelho não coberto pelo



File 555

$$\sin \alpha / \sin \beta = a \approx a', \quad \sin \varphi / \sin \theta = n \approx n'.$$

774. A imagem $A'B'$, obtida no sistema, está representada, na fig. 536. F_1 e F_2 são os focos da lente e do espelho; $A'B'$ é a imagem obtida pelo lente no caso, em que sua superfície não está prateada.

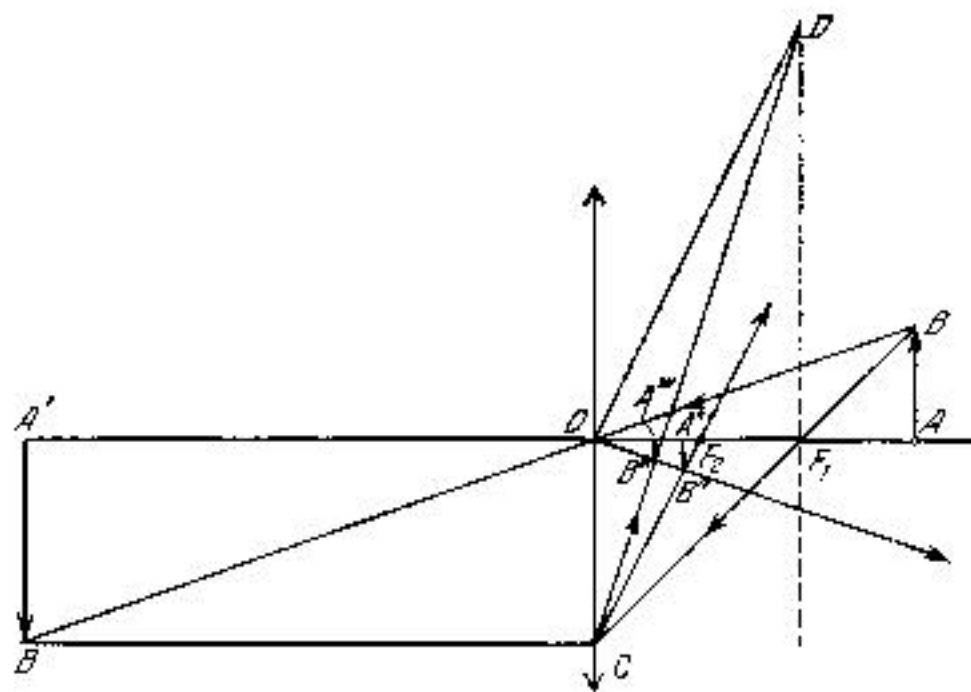


Fig. 536

A imagem $A'B'$, obtida pelo espelho côncavo, pode ser construída, considerando que o raio BO , depois de passar pela lente e refletir-se da superfície do espelho, tomará o trajeto OB'' , sendo que $\angle BOA = \angle B''OA$. O raio BC sai da lente paralelamente ao eixo ótico do sistema e depois da reflexão passará por F_2 .

Os raios refletidos do espelho refratam-se na lente mais uma vez e formam a imagem $A''B''$. O ponto B'' situa-se na interseção dos raios OB'' e CF_2 . O raio OB'' passa através do centro ótico da lente, depois da reflexão, e, por isso, não se refrata. O raio CD é construído do seguinte modo. Depois da primeira refração na lente e reflexão, o raio BC seguirá na direção de F_2 e refratar-se-á na lente outra vez. A direção do mesmo, depois da segunda refração, é determinada pelo método utilizado no problema 753: através do centro ótico O , traça-se, até a interseção com o plano focal da lente, o raio OD , paralelo a CF_2 . Então, unindo C e D , obtemos o raio procurado.

Uma vez que os raios refratam-se na lente duas vezes, a distância focal f do sistema pode ser determinada da relação (ver o problema 763):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{r},$$

onde $f_2 = R/2$ é a distância focal do espelho. Deste modo, $f = 1/f_2 (1 + 2f_2) = 2,5$ cm, donde a distância a_1 até a imagem

$A''B''$, determina-se pela fórmula:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Consequentemente; $b = af/(a - f) = 3$ cm.

775. A convergência do sistema é igual à soma das convergências dos seus componentes (se os mesmos não forem colocados juntos). No primeiro caso, teremos que:

$$\frac{1}{f_1} = (n-1) \frac{1}{R} + (n-1) \frac{1}{R}.$$

No segundo caso:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1) \frac{1}{R} + \frac{2}{R} = (n-1) \frac{1}{R},$$

donde: $f_2 = f_1 (1 - 1/n)$.

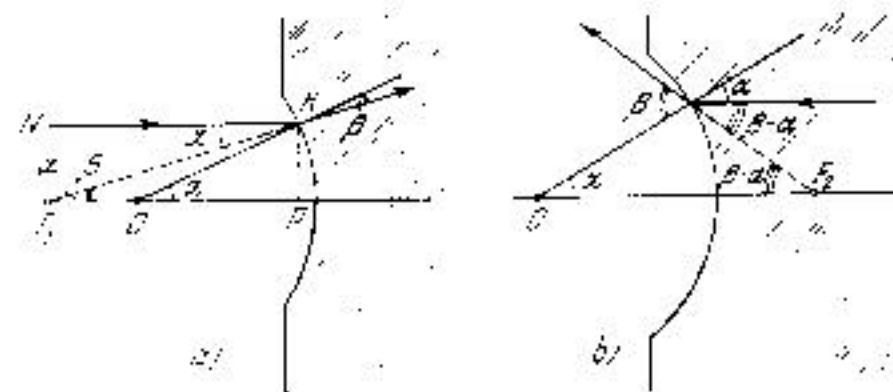


Fig. 537

776. A distância focal de lente delgada é $f = \frac{r}{n-1}$, onde r é o raio da superfície esférica. Suponhamos, que os raios dirijam-se paralelamente ao eixo ótico da superfície esférica e incidam na mesma desde o ar (fig. 537). Refratando-se na superfície, o raio NA inclina-se em um ângulo $\alpha = \beta$ do eixo ótico. Como vemos no fig. 537.a, $OP \cdot \tan \alpha = F_1 P \tan (\alpha - \beta)$. Pela lei da refração temos que: $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Em virtude de que os ângulos examinados são pequenos, deduzimos que $\alpha \approx f_1 (\alpha - \beta)$ e $\alpha = \beta$ consequentemente,

$$f_1 = \frac{n}{n-1} r = nf.$$

Se os raios paralelos incidem desde um vácuo (fig. 537.b), uma análise análoga conduz às equações:

$$\sin \alpha / \sin \beta = 1/n, \quad \tan \alpha = f_2 \tan (\beta - \alpha).$$

Em virtude de que os ângulos são pequenos, temos que: $\beta = n \alpha$, $r \alpha = f_2 (\beta - \alpha)$; donde $f_2 = r/(n-1) = f$.

777. São possíveis dois casos: o foco encontra-se dentro da esfera ou fora dela. Analisemos, inicialmente, o primeiro caso. O trajeto do raio, que incide na esfera por um ângulo i , está representado

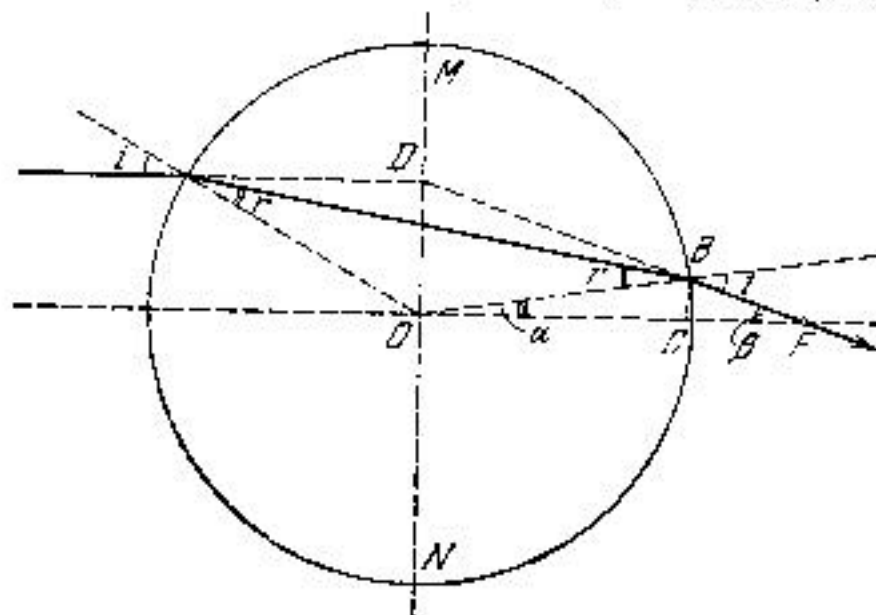


Fig. 538

na fig. 538. Considerando, que os ângulos i e r são pequenos, de acordo com as condições do problema, teremos que: $BC \approx R \sin r \approx R \sin (2r - i) \approx R (2r - i) \approx \frac{R \cdot i}{n} (2 - n)$. É evidente, que o foco encontra-se fora da esfera quando $n < 2$.

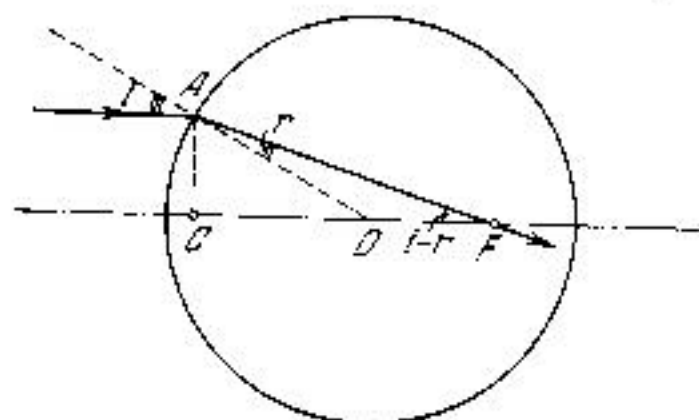


Fig. 539

Se $n = 2$, então, o foco encontra-se na superfície da esfera. A distância

$CF = BC \cdot \text{ctg } \beta \approx BC \cdot \beta$, $\beta \approx 2(i - r) \approx 2i(n - 1)/n$, que é determinada com auxílio da fig. 538. A distância procurada é $f = R + CF = Rn/2(n - 1)$. O trajeto do raio para $n > 2$ está representado na fig. 539. A distância procurada

é $f' = OF \approx CF - R$. Como vemos na fig. 539,

$$CF = AC \text{ ctg } (i - r) \approx \frac{AC}{i - r} \approx \frac{R \cdot i}{i - r},$$

donde $f' = R/(n - 1)$.

778. A refração dos raios, oriundos da fonte, na superfície frontal da esfera é descrita pela fórmula:

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f_1} = \frac{n - 1}{R},$$

onde f_1 é a distância da imagem até a superfície frontal. Da superfície de trás (coberta de prata), a imagem encontra-se a uma distância $2R - f_1$. A reflexão dos raios no espelho esférico formado é descrita pela fórmula:

$$-\frac{1}{2R - f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R},$$

A nova imagem encontra-se a uma distância f_2 da superfície espelular traseira e a uma distância $2R - f_2$ da superfície frontal. O cálculo da refração na superfície frontal é feito pela fórmula:

$$\frac{n}{2R - f_2} + \frac{1}{d} = \frac{n - 1}{R}.$$

onde foi considerado, que a imagem final é obtida no ar, a uma distância d da esfera.

Resolvendo o sistema de três equações, obtemos que $d_1 = 5R$, $d_2 = -R$. O segundo valor corresponde à localização da fonte no centro da esfera, o que contradiz as condições do problema.

779. Prolonguemos o raio BF até a interseção com o raio, que incide na esfera paralelamente ao eixo óptico (fig. 538). Não é difícil ver, que o segmento DO , a qual O é o ponto de interseção com o centro da esfera, forma com a direção do raio incidente um ângulo reto. O triângulo ODF é retângulo, devido a que:

$$OF \cdot \beta \approx \frac{R}{2} \cdot \frac{n}{n - 1} \cdot \frac{2i(n - 1)}{n} = R \cdot i$$

(ver o problema 777). Consequentemente os planos principais da esfera MN coincidem e passam pelo centro da mesma.

780. A distância focal da esfera é:

$$f = \frac{R}{2} \cdot \frac{n}{n - 1} = 15 \text{ cm.}$$

(ver os problemas 777 e 779). Utilizando a fórmula da lente, a que é permitida, uma vez que os planos principais coincidem, determinamos a distância do centro da lente até a imagem: $l = af/(a - f) = -15 \text{ cm}$. A imagem será virtual e encontrar-se-á em frente da esfera.

781. A parede fina de um recipiente esférico pode ser considerada como uma lente divergente com distância focal:

$$f_1 = \frac{1}{(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)} \approx \frac{R^2}{(n-1)\Delta R}$$

Passando por duas lentes deste tipo, situadas a uma distância $2R$ uma da outra (fig. 540), os raios, paralelos ao eixo óptico principal (do diâmetro do recipiente), refratam-se de tal modo, que

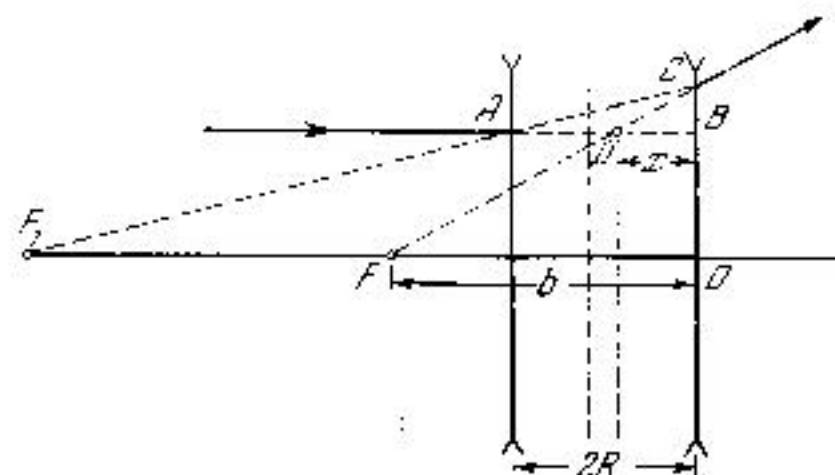


Fig. 540

os prolongamentos dos mesmos interceptam-se no foco F do sistema, a uma distância b da segunda lente, sendo que, pela fórmula da lente, temos:

$$\frac{1}{f_1 + 2R} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1},$$

donde $b = f_1(f_1 + 2R)/(f_1 - R)$. O ponto D de intersecção do segmento AB (prolongamento do raio incidente) e do segmento CF (prolongamento do raio refratado) situa-se no plano principal do sistema, que se encontra a uma distância x da segunda lente. Da semelhança dos triângulos ACB e F_1CO , assim como dos triângulos DCB e FCO , deduzimos que:

$$\frac{x}{b} = \frac{2R}{2R + f_1}.$$

O plano principal localiza-se a uma distância:

$$x = \frac{2Rb}{2R + f_1} = \frac{f_1 R}{f_1 + R}$$

da segunda lente.

Consequentemente, a distância focal do sistema é:

$$f = b - x = \frac{f_1^2}{2(f_1 + R)} \approx \frac{f_1}{2} = \frac{R^2}{2(n-1)\Delta R}.$$

Por força da simetria do sistema ótico dado, as posições do segundo foco e do outro plano principal são evidentes.

782. Como vemos na fig. 541, o ângulo de refração é:

$$r = \angle OAB = \angle ABO = \angle OBC = \angle OCB, \\ \text{e } \angle BAD = \angle HCD = i - r.$$

No ponto A o raio gira em um ângulo $i - r$; no ponto B em um ângulo $\pi - 2r$ e no ponto C em um ângulo $i - r$. Consequentemente,

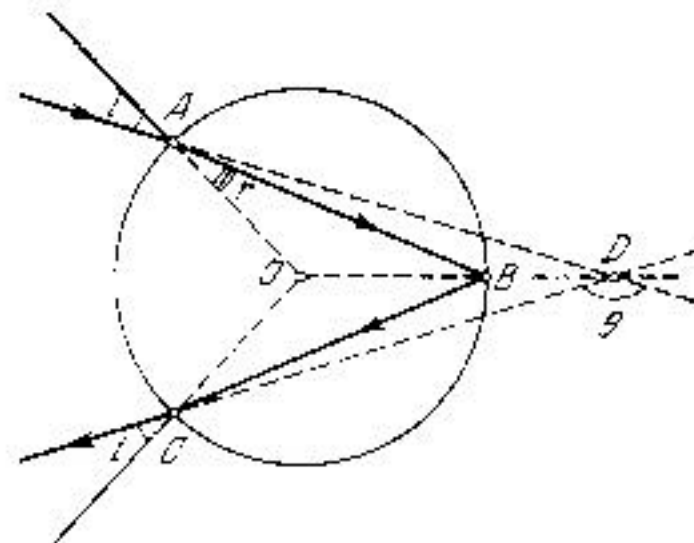


Fig. 541

mente, o ângulo total de desvio do raio em relação à direção inicial é igual a:

$$\theta = i - r + \pi - 2r + i - r = \pi + 2i - 4r.$$

O ângulo r pode ser determinado da relação $\sin i / \sin r = n$.

783. Ao incidir na gota um feixe de raios paralelos, o raio, que passa ao longo do diâmetro, tem um ângulo de incidência $i = 0^\circ$ e os raios, localizados abaixo e acima do mesmo, possuem ângulos de incidência que tomam todos os valores possíveis de 0° até 90° .

1) Utilizando os resultados do problema anterior e a lei da refração, podemos determinar o valor de θ para diferentes i :

Tabela II

i	θ	i	θ
0°	180°	55°	$138^\circ 20'$
20°	$160^\circ 24'$	60°	$137^\circ 58'$
40°	$144^\circ 40'$	65°	$138^\circ 40'$
50°	$139^\circ 40'$	70°	$140^\circ 44'$

2) O gráfico da dependência de θ em relação à i está representado na fig. 542.

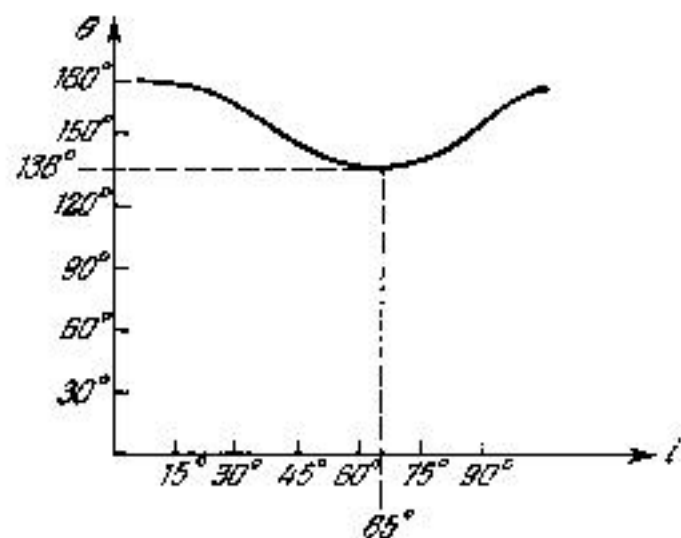


Fig. 542

3) O menor valor do ângulo de desvio é, aproximadamente, igual a $\theta_{\min} = 138^\circ$. Os raios que saem da gota, serão, aproximadamente, paralelos precisamente para $\theta = \theta_{\min}$, uma vez que para isto, como se vê na tabela e no gráfico, θ varia o mais

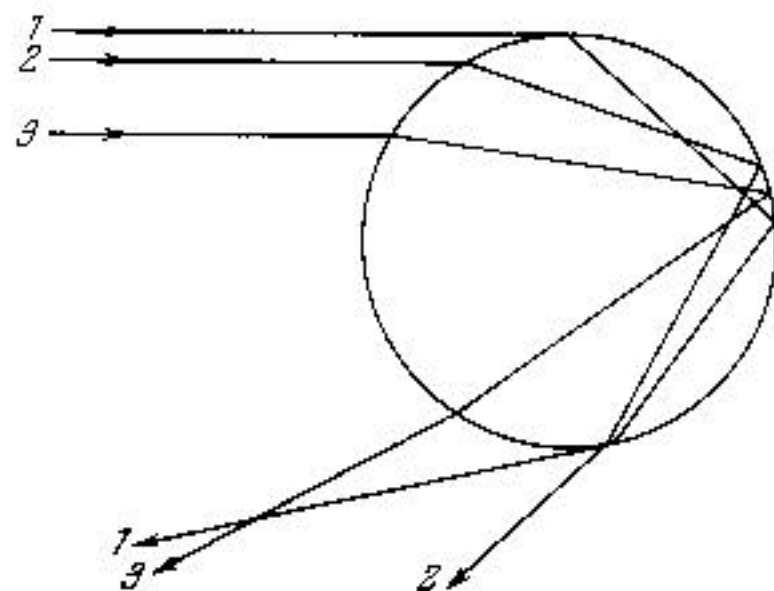


Fig. 543

lentamente possível, para uma variação de i . O trajeto aproximado dos raios na gota está representado na fig. 543.

784. Um vidro mate é necessário, em primeiro lugar, para fixar o plano, no qual é obtida a imagem e, em segundo lugar, para o aumento do ângulo de visão.

O vidro transparente é utilizado para a análise de uma imagem, dada pela objetiva, no microscópio. Para isto, no vidro transparente são projetados os traços que fixam o plano de ajustamento, obtendo-se, assim, uma imagem nítida destes traços no microscópio e das partes do quadro, próximas aos traços, obtido pela objetiva. O vidro mate não pode ser utilizado neste caso, uma vez que no microscópio serão visíveis todas as deformações contidas na estrutura da superfície do vidro mate.

785. 1) Os faróis parecerão ser igualmente claros, uma vez que a iluminação da retina do olho $E = BS \cdot l^2$ é igual para ambos os faróis (onde B é a intensidade do farol, S é a área da abertura de entrada da pupila e l é a distância do cristalino até a retina). 2) A imagem de um objeto distanciado localiza-se mais próxima da objetiva do que a imagem de um objeto próximo. Por isso, o farol distante cria uma grande iluminação na lâmina fotográfica, e a imagem do mesmo, na fotografia, será mais clara.

786. A iluminação da lâmina fotográfica é $E = S \cdot l^2 = A \cdot (u - f)^2 \cdot d^2$, onde $A = d^2/f^2$ é a luminosidade da objetiva, f é a distância focal; d é a distância da objetiva até o objeto fotografado (ver o problema 785). Daqui é evidente, que em uma câmara de pequena distância focal, a exposição deverá ser menor.

787. Analisemos a dependência da iluminação da imagem. Uma vez que a luz é emitida de cada ponto da fonte alongada, o fluxo luminoso Φ , que incide na lente, é proporcional à área da fonte S_1 . Além disso, o fluxo luminoso é proporcional ao ângulo sólido ω , sob o qual é vista a lente desde os pontos da fonte. Se a área da lente é S_2 e a distância da fonte até a lente é igual a d , então, $\omega = S_2/d^2$. Deste modo, $\Phi = BS_1\omega$, onde o coeficiente de proporcionalidade B caracteriza a iluminação da fonte.

O fluxo luminoso distribui-se pela área da imagem S_3 . Por isso, a iluminação da imagem é:

$$E = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{BS_1\omega}{S_3} = \frac{BS_1S_2}{S_3d^2}.$$

A relação das áreas da fonte e da imagem é igual à relação dos quadrados das distâncias das mesmas até a lente: $S_1/S_3 = d^2/f^2$. Consequentemente, a iluminação da imagem $E = BS_2/f^2$ depende somente da distância f da lente até a imagem, permanecendo invariáveis B e S_2 . Utilizando a fórmula da lente

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

e a relação $k = f/d$, encontramos, facilmente, que: $f = F(k + 1)$. Por isso, a relação das iluminações procuradas é:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{(k_1 + 1)^2}{(k_2 + 1)^2} = 4.$$

788. $F = 2al$, ($a = 2l$) = 60 cm.

789. A intensidade de luz da imagem de uma fonte pontual dada não depende da posição da tela. Por isso $rd/(1-i)^2 = I/f^2$. Desta equação do segundo grau obtemos dois valores de $f: f = 1/(1 \pm \sqrt{n})$. Utilizando a fórmula da lente, podemos escrever que:

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

e obtemos para F dois valores:

$$F_1 = \frac{ld}{1+d-d\sqrt{n}} = 12 \text{ cm}, \quad F_2 = \frac{ld}{1+d-d\sqrt{n}} = 60 \text{ cm}.$$

790. $n = 0,75 = 0,25 \sqrt{E_1(E_2 + E_1)} = 1,25$.

791. Se os raios incidem, inicialmente, na lente convergente de diâmetro D (ou em uma lente substituta equivalente), então, todo o fluxo luminoso Φ , que passa pela lente, participa na formação da imagem. Se uma lente divergente estiver na frente, então, parte da luz passa longe da segunda (convergente) lente. O diâmetro efetivo d da lente divergente pode ser determinado pela semelhança de triângulos, utilizando a fórmula: $d = \frac{F}{F-a} D$.

Por isso, na formação da imagem participa o fluxo luminoso:

$$\Phi_1 = \left(\frac{F}{F+a} \right)^2 \Phi \approx \frac{\Phi}{2}.$$

A área da imagem, em ambos os casos, é igual. Consequentemente, a iluminação da imagem, no caso em que a lente divergente estiver na frente, será duas vezes menor do que nos demais casos.

792. As distâncias entre o Sol e a Terra, e o Sol e a Lua, são praticamente iguais. Por isso, se a lua e a parede tiverem um mesmo índice de reflexão, então, a claridade das mesmas deveria parecer igual. Consequentemente, podemos considerar que a superfície da lua é constituída de rochas escuras.
793. No ar a córnea externa convexa do olho reúne os raios e forma a imagem na retina. O cristalino, somente, a auxilia nisto. O índice de refração do líquido, dentro do olho, é muito semelhante ao índice de refração da água. Por isso na água a córnea quase não refrata a luz e o olho torna-se extremamente hipermetrope. Na máscara as propriedades de refração da córnea são conservadas totalmente.
794. Vendo objetos distantes através de óculos, o homem os vê como vesse sem óculos os objetos situados a uma distância $a_2 = 60$ cm. Por isso, para o homem com óculos (ver a solução do problema 763) teremos que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_0},$$

onde $a = \infty$,

Para o homem sem óculos teremos:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

onde b é a profundidade do olho; $1/f$ é menor convergência do olho; $1/f_0$ é a convergência dos óculos. Supõe-se, que os óculos estão colocados juntos aos olhos; donde $f_0 = a_2$. Determinemos, agora, a posição do ponto mais próximo à acomodação dos olhos com óculos:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

donde

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2},$$

e, consequentemente, $a_1 = 15$ cm.

795. Utilizando óculos de uma outra pessoa, a hipermetrope vê nitidamente só objetos muito distanciados. Neste modo a distância a_2 , para uma melhor visão dos olhos de um hipermetrope, determina-se da equação:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = D_1,$$

onde a_1 é uma distância muito grande ($a_1 \rightarrow \infty$); D_1 é a convergência dos óculos do míope.

A convergência D_2 dos óculos, que corrigem o defeito de visão dum hipermetrope, podemos determinar pela seguinte fórmula:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = D_2,$$

onde $a_1 = 0,25$ m é a distância de melhor visão para um olho normal. A distância a_2 , de melhor visão de um míope, determina-se pela fórmula:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = D_1.$$

Se o míope utiliza os óculos do hipermetrope, então, a distância de melhor visão, i.é., a mínima distância a_1 , na qual o míope pode, sem esforço, ler pequenas letras, é determinada pela fórmula:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_2} = D_2.$$

Resolvendo estas quatro equações, obtemos que $a = 12,5$ cm.

796. Ao observarmos um objeto de altura l desde uma distância D , o ângulo de visão φ_1 é determinado pela expressão $\varphi_1 = l/D$. Se observarmos o mesmo objeto, através de uma lupa, o ângulo de visão será: $\varphi_2 = l/(b+r) = l/L$, onde l é a altura da imagem (fig. 544). O aumento angular é:

$$N = \varphi_2/\varphi_1 = l/D:l/L = kD/L,$$

onde $k = f_1 l = b$, $D = (f_1 + b)/f$ é o aumento linear, determinado pela fórmula da lente (f é a distância focal). Consequentemente,

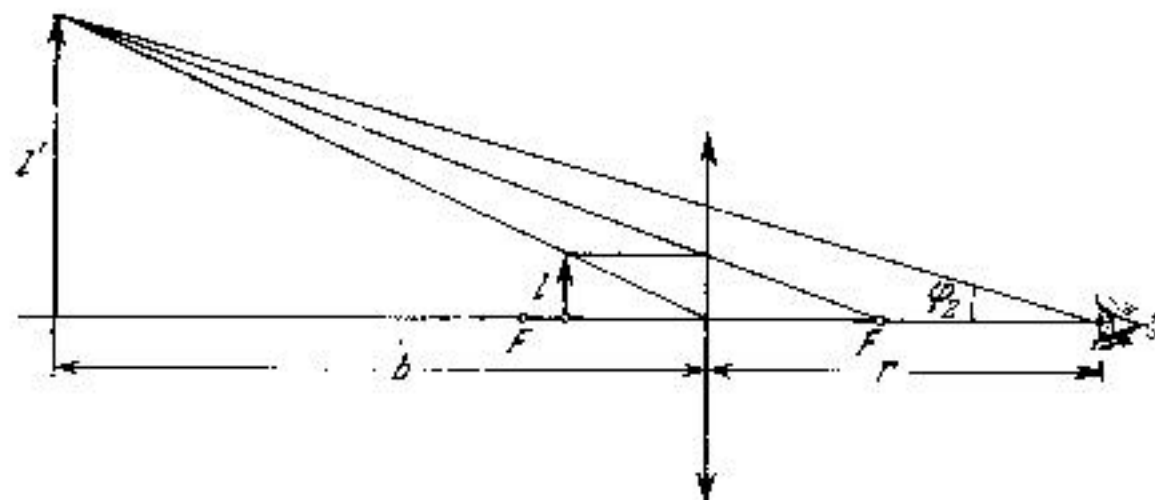


Fig. 544

mente,

$$N = \frac{D}{f} = \frac{b}{f} = \frac{f_1 l}{f} = \frac{f_1}{f} \cdot l.$$

1. Para $L = \infty$, $N = \frac{D}{f}$.

2. Para $L = D$, $N = \frac{D}{f} = 1 + \frac{r}{f}$.

797. O aumento da luneta é $N = f_1/f_2$, onde f_1 é a distância focal da objetiva e f_2 é a distância focal da ocular. Uma vez que a luneta está localizada no infinito, a distância entre a objetiva e a ocular é $f_1 + f_2$, então, $Dd = f_1 f_2 = f_1 b$, onde b é a distância da ocular até a imagem do diafragma. Pela fórmula da lente, temos que

$$\frac{1}{f_1 + f_2} = \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}.$$

Excluindo destas equações b , determinamos que $Ld = f_1 f_2 = D$.

798. Imagens nítidas, de objetos distanciados, podem ser obtidas para duas posições diferentes da lente convergente. Podemos colocá-la antes da lente divergente, ou depois da mesma. Para a primeira posição, a distância d , entre as lentes, pode ser determinada, considerando o ponto K como sendo a imagem virtual do ponto A na lente divergente (fig. 545):

$$-\frac{1}{f_2 - d} - \frac{1}{l} = -\frac{1}{f_1}.$$

4) raio AN é paralelo ao eixo ótico do sistema, donde:

$$d = f_2 - \frac{f_1 l}{f_1 - l} = 3,5 \text{ cm}.$$

Para a segunda posição (a lente convergente está localizada atrás da lente divergente) o trajeto dos raios está representado na fig. 546. Considerando o ponto A como a imagem de K na lente

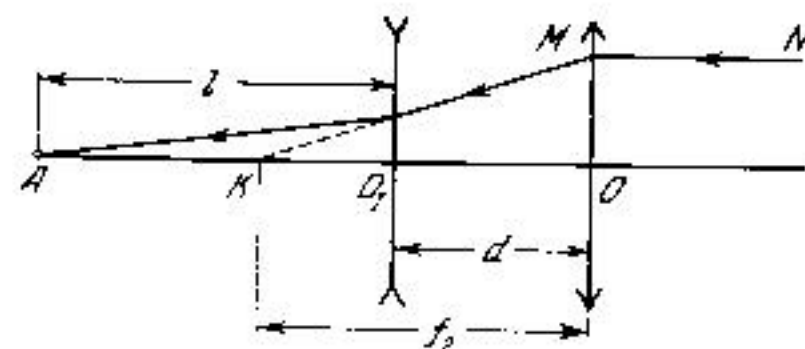


Fig. 545

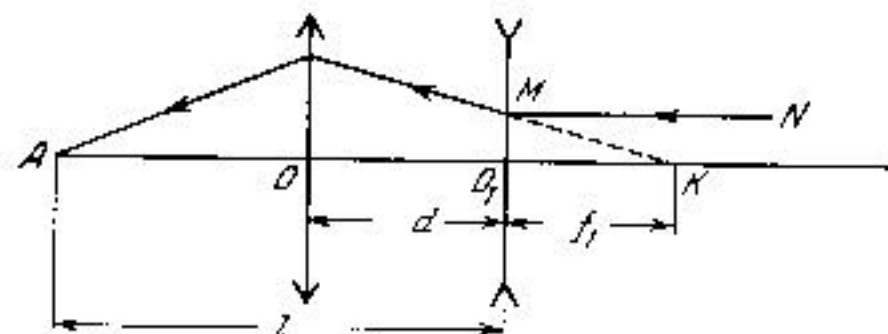


Fig. 546

convergente e aplicando a fórmula da lente, temos que:

$$\frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{l - d} = \frac{1}{f_2},$$

donde:

$$d = \frac{l + f_1}{2} \pm \frac{l - f_1}{2} \sqrt{1 - \frac{4f_2}{l + f_1}}.$$

A distância entre as lentes poderá ser igual a $d_2 = 35 \text{ cm}$ ou igual a $d_3 = 5 \text{ cm}$.

799. Suponhamos, que os raios, os quais partem de um dos extremos do diâmetro do disco visível da lua, estejam dirigidos ao longo

do eixo ótico do sistema. Eles criam uma imagem no eixo ótico no ponto A , que distancia-se da lente divergente em $l = 45$ cm (fig. 547). Os raios que partem do outro extremo do diâmetro,

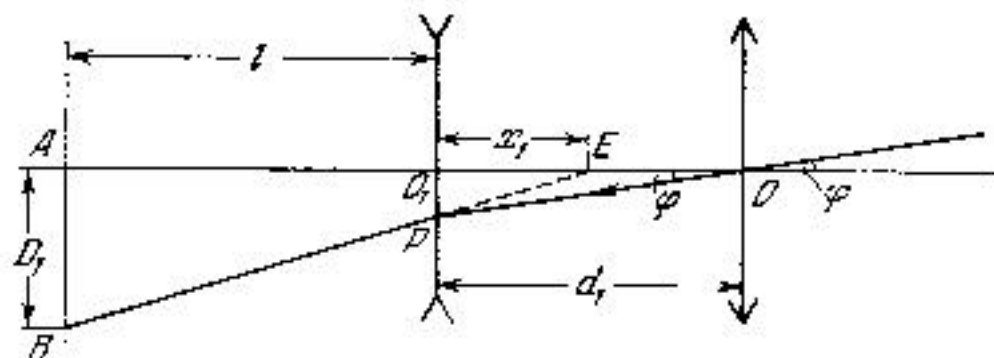


Fig. 547

formam com os primeiros raios, pelas condições do problema, um ângulo φ . Passando pelo sistema, eles criarão uma imagem (ponto B), localizada no plano perpendicular ao eixo ótico e distante da lente divergente a uma mesma distância l . Para a determinação do diâmetro da imagem $D_1 = AB$, observemos o trajeto do raio, que passa através do centro ótico da primeira lente. Na primeira posição das lentes, a lente convergente está situada antes da lente divergente, a uma distância $d_1 = 3,5$ cm. Neste caso, considerando o ponto E como a imagem virtual do ponto O , podemos escrever que:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{f_1},$$

Utilizando a semelhança de triângulos ABE e O_1PE e considerando que $O_1P = d_1 \lg \varphi$, obtemos:

$$\frac{D_1}{l - x_1} = \frac{d_1 \lg \varphi}{x_1} \approx \frac{d_1 f_1}{x_1},$$

Excluindo x_1 das equações dadas, obtemos: $D_1 = 0,72$ cm. Para a segunda posição das lentes ($d_2 = 35$ cm), o trajeto dos raios está representado na fig. 548. A grandeza da imagem da

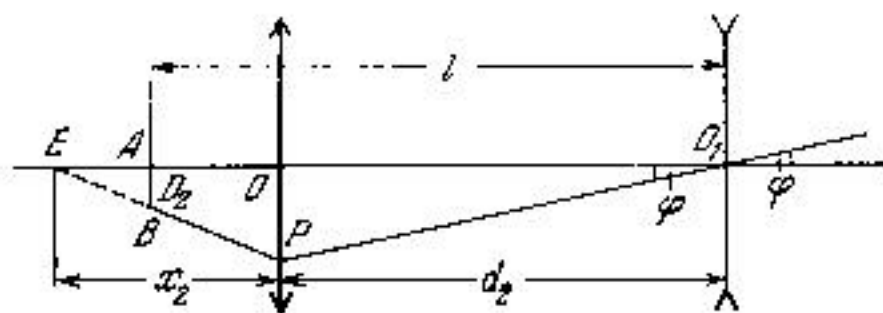


Fig. 548

lua, D_2 , pode ser determinada das equações:

$$\frac{D_2}{(x_2 - d_2) - l} = \frac{d_2 \lg \varphi}{x_2} \approx \frac{d_2 f_2}{x_2},$$

(considerando os triângulos EOP , EAB e OPO_1),

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2},$$

(considerando E como sendo a imagem de O_1); donde $D_2 \approx 0,041$ cm.

Para a terceira posição ($d_3 = 5$ cm), o trajeto dos raios será um pouco diferente (fig. 549) ao que está representado na fig. 548.

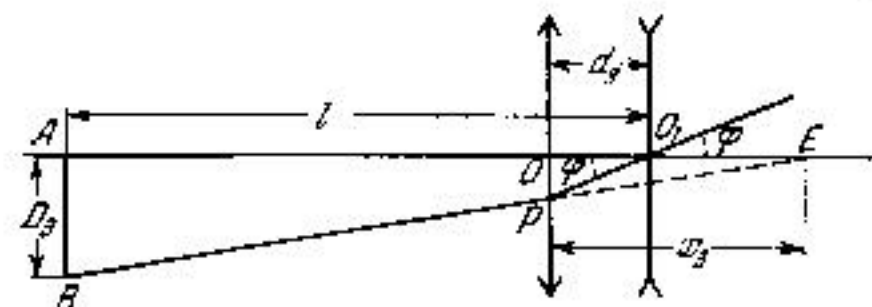


Fig. 549

As equações para a determinação de D_3 escrevem-se, por analogia com os casos anteriores, do seguinte modo:

$$\frac{D_3}{(l - d_3) - x_3} = \frac{d_3 \lg \varphi}{x_3} \approx \frac{d_3 f_2}{x_3},$$

$$\frac{1}{d_3} - \frac{1}{x_3} = \frac{1}{f_2},$$

donde $D_3 = 0,18$ cm.

800. Da fórmula da lente temos que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{obj}}$$

deduz-se que o aumento da objetiva é $k_1 = k_a = F_{obj}/a$ ($a = F_{obj} = 30$). A imagem real invertida do objeto, aumentada pela objetiva, é vista através da ocular, como através de uma lupa, sendo que, no primeiro caso, a imagem virtual dada pela lupa, localiza-se a uma distância $D = 25$ cm dos olhos. Pela fórmula da lupa temos que:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{D} = \frac{1}{F_{oc}},$$

onde a_1 é a distância da imagem, dada pela objetiva, até a ocular. O aumento da ocular é $k_2 = D/a_1 = (D \cdot F_{oc})/F_{oc} = 6$. O aumento total do microscópio é $k = k_1 k_2 = 180$ vezes. No segundo caso, $k_2 = D/F_{oc} = 5$ e $k = k_1 k_2 = 150$ vezes.

§ 32. INTERFERÊNCIA DA LUZ

801. Não. A presença de mínimos de iluminação no quadro de interferência significa, que a energia luminosa não se propaga nesta região do espaço.
802. Em um ponto arbitrário da tela C observaremos um máximo de iluminação, se a diferença de marcha é $d_2 - d_1 = k\lambda$, onde $k = 0, 1, 2, \dots$ são números inteiros (fig. 330). Pelo teorema de

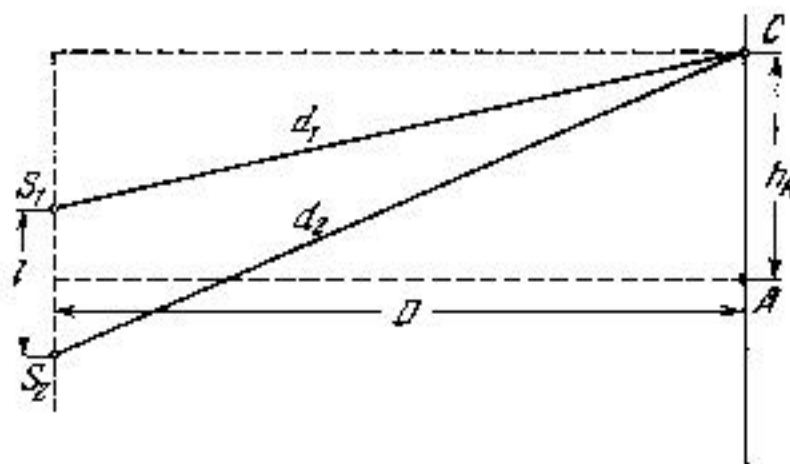


Fig. 330

Pitágoras temos que:

$$d_2^2 = D^2 + (h_k + l/2)^2, \quad d_1^2 = D^2 + (h_k - l/2)^2,$$

donde

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2h_k l.$$

De acordo com as condições do problema, $d_2 + d_1 \approx 2D$. Consequentemente, $d_2 - d_1 = k\lambda \approx 2h_k l / 2D$. A distância da k -ésima faixa luminosa até o centro da tela é $h_k = k\lambda D / l$. A distância entre as faixas é $\Delta h = h_{k+1} - h_k = \lambda D / l$.

803. A distância entre as faixas de interferência é $\Delta h = \lambda \frac{D}{l}$ (ver o problema 802). No caso dado, $D = AB \approx \alpha \cdot r$, e $l = S_1 S_2$

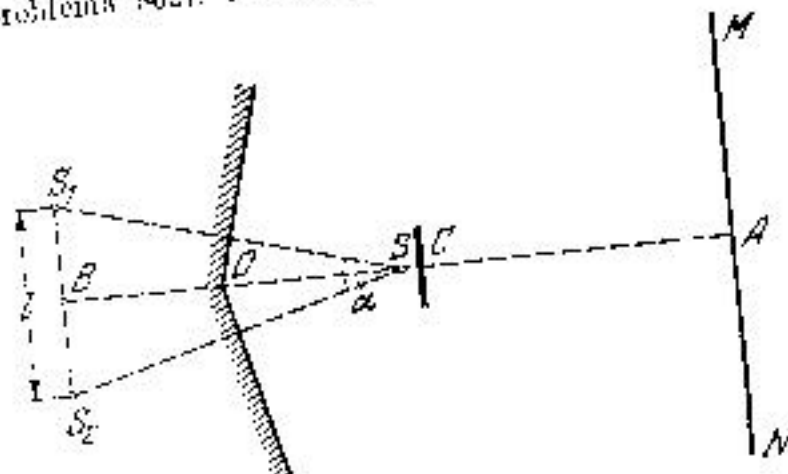


Fig. 331

é a distância entre as imagens S_1 e S_2 da fonte S nos espelhos planos (fig. 331); l pode ser determinada do triângulo $S_1 S B$: $l^2 = 2\alpha \cdot 2$ ou $l = 2\alpha$.

Consequentemente, $\Delta h = \lambda \frac{D}{l} = 51,2 \mu\text{m}$.

804. A segunda fonte coerente é obtida, na experiência de Lloyd, pela reflexão dos raios do espelho AO . Na reflexão ocorre uma variação de fase em π (perda de uma semi-onda). Por isso no ponto O , onde deveria ser observada uma faixa clara, ocorre a extinção das oscilações da onda, isto é, um mínimo de iluminação. Em comparação com o problema 802 todo o quadro acabará deslocado-se na largura da faixa clara (ou escura).
805. O aumento da iluminação na tela obtém-se, quando a diferença de marcha $d_2 - d_1 = k\lambda$. O lugar geométrico dos pontos da

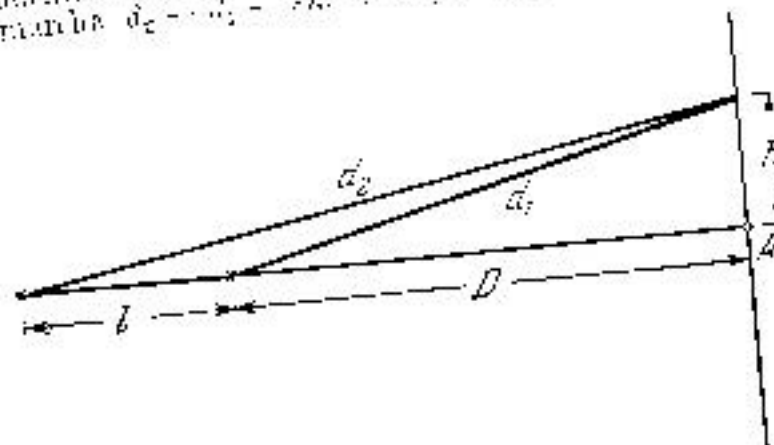


Fig. 332

tela, que os raios atingem, de ambas as fontes, com tal diferença de marcha, é uma circunferência com centro no ponto A (fig. 552). Consequentemente, as faixas de interferência serão circunferências concêntricas.

No caso, em que $l = n\lambda$ no ponto A , observaremos um aumento da iluminação (um máximo de interferência de enésima ordem). A faixa clara, de interferência mais próxima (circunferência), será de $(n-1)$ -ésima ordem e encontra-se do ponto A a uma distância determinada da equação:

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(n\lambda + D)^2 + h_{n-1}^2} - \sqrt{D^2 + h_{n-1}^2} = (n-1)\lambda.$$

Lembrando-se da condição do problema, que $\lambda \ll D$, $\lambda \ll l$, obtemos:

$$h_{n-1} \approx \sqrt{\frac{2D(D+n\lambda)}{n}} = \sqrt{2Dl} \left(\frac{D}{l} + 1 \right).$$

896. A diferença de marcha dos raios para o k -ésimo anel claro é

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(2n\lambda)^2 + r_k^2} - \sqrt{(n\lambda)^2 + r_k^2} = k\lambda,$$

$$\text{donde } r_k = \frac{\lambda}{2k} \sqrt{(2n^2 - k^2)(n^2 - k^2)}.$$

897. Para a obtenção de uma segunda fonte coerente, localizada mais próxima da tela do que a primeira, poderemos utilizar uma lâmina semitransparente com um orifício. Baseando-se no princípio de Huyghens, o orifício pode ser considerado como uma fonte secundária. Na tela obter-se-á um quadro de interferência. Se a distância entre as fontes é grande, então, para a obtenção do quadro de interferência, é necessário dispor de uma fonte que emita ondas muito próximas às ondas monocromáticas.

898. A fim de determinarmos a distância procurada Δh é necessário, previamente, calcular a distância l entre as fontes virtuais S_1 e S_2 , localizadas na intersecção dos prolongamentos dos raios refratados pelas faces do prisma. Para isto, é mais simples observar o trajeto do raio, que incide normalmente no prisma (fig. 553).

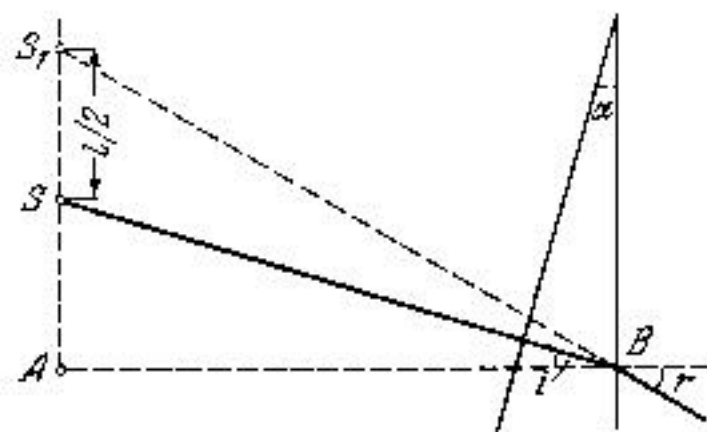


Fig. 553

Não existe tal raio na realidade, mas podemos construí-lo, aumentando mentalmente o prisma para baixo. Todos os raios refratados pelo prisma, de uma fonte pontual, podem ser considerados convergentes no ponto, e essa construção é totalmente permitida. Uma vez que o ângulo de refração do prisma é pequeno (o prisma é delgado), as imagens virtuais S_1 e S_2 da fonte podem ser consideradas equidistantes do prisma e à mesma distância que a fonte S . Como vemos na fig. 553, $l = \alpha$ e $SA = \alpha$. Pela lei da refração, temos que $n \approx \alpha$. Observando o triângulo $\Delta S_1 B_1$ podemos escrever:

$$\frac{l}{2} + \alpha \approx \alpha \alpha,$$

donde $l = 2\alpha$ ($\alpha \ll 1$). Utilizando a solução do problema 802, determinamos que

$$\Delta h \approx \frac{\lambda D}{l} = \frac{\lambda \alpha}{2\alpha^2 (n-1)} = 1,5 \text{ cm}.$$

899. $N = L/\Delta h$, onde L é a largura do quadro de interferência. Como vemos na fig. 200, $L = D\alpha$ e $\alpha \ll 1$. Utilizando os resultados do problema anterior, obtemos:

$$N \approx \frac{2\alpha D^2 (n-1)^2}{(a-l)^2} \approx 5.$$

900. O biprisma, construído de uma substância com índice de refração n_2 , desvia os raios em um ângulo

$$\varphi_1 = (90^\circ - \delta/2) / (n_2 - n_1),$$

onde n_1 é o índice de refração do meio, de onde incidem os raios. Para o biprisma, que se encontra no ar, temos que:

$$\varphi_2 = (90^\circ - \delta/2) / (n_2 - 1).$$

No caso da equivalência dos biprismas, temos que $\varphi_1 = \varphi_2$, donde:

$$\delta = \delta \frac{n_2 - n_1}{n_2 - 1} = 180^\circ \frac{n_2 - 1}{n_2 - 1}.$$

Para as grandezas dadas nas condições do problema, temos que:

$$\delta \approx 179^\circ 37'.$$

901. O trajeto dos raios no sistema está representado na fig. 554. S_1 e S_2 são as imagens da fonte S nas metades da lente. É evidente, que $l = 2a$ ($a = f$). De semelhança de triângulos $S_1 B$ e $SS_1 S_2$ podemos encontrar a distância l entre S_1 e S_2 : $l = \alpha a$, ($\alpha = f$). A distância entre as faixas de interferência vizinhas na tela, é igual a:

$$\Delta h = \frac{\lambda(D-a)}{l} = \frac{\lambda}{\alpha a} (Da - Df - af) = 10^{-2} \text{ cm}$$

(ver o problema 802). O número de faixas de interferência procurado é:

$$N = \frac{L}{\Delta h} = \frac{L(D-a)}{a\Delta h} = 25.$$

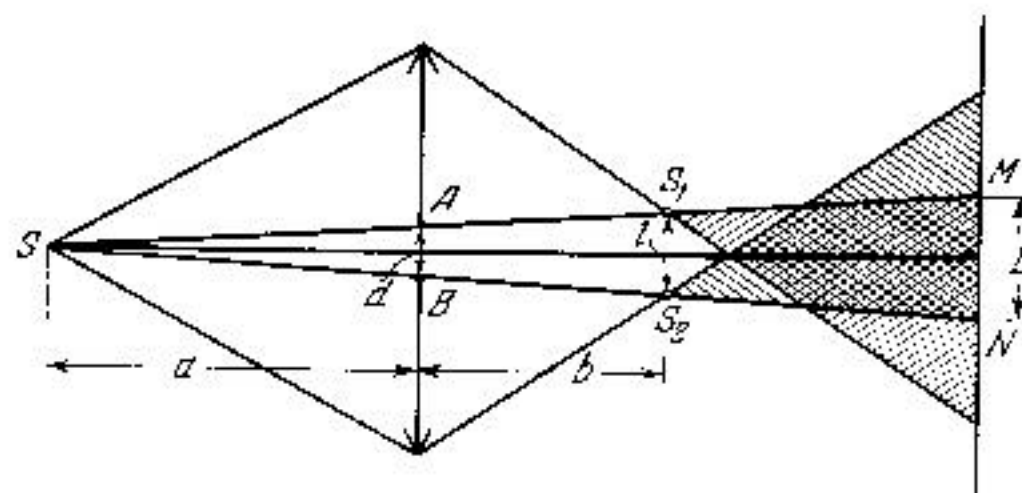


Fig. 554

812. A distância entre as imagens virtuais S_1 e S_2 pode ser determinada pelo método exposto na solução do problema 811 (Fig. 555).

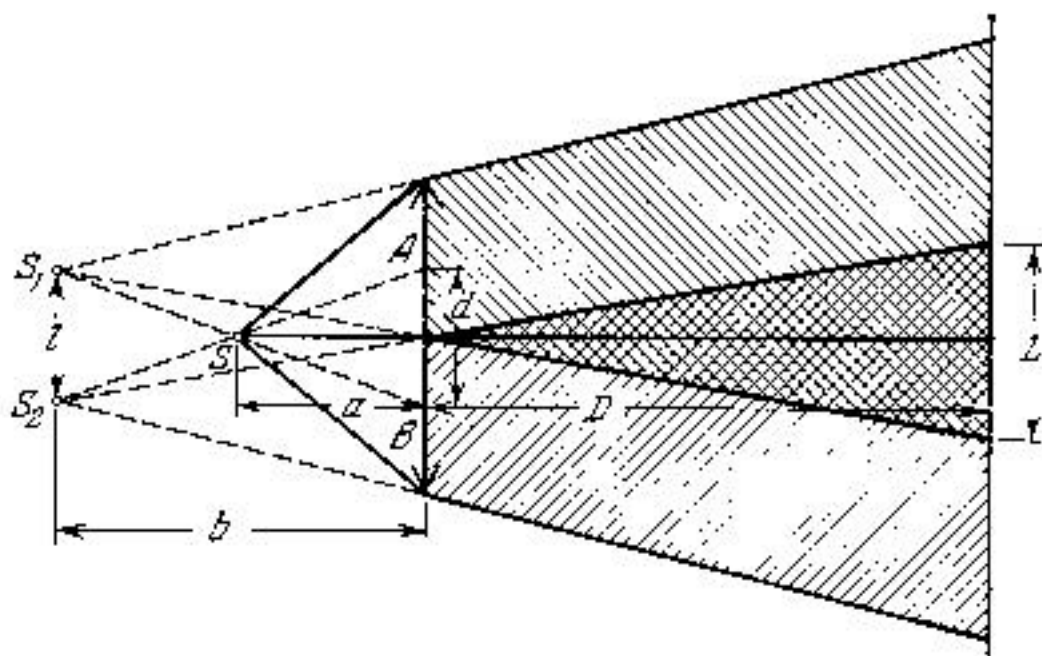


Fig. 555

A distância entre as faixas de interferência é:

$$\Delta h = \frac{\lambda (Df + Da + Af)}{da},$$

O número de faixas na tela é $N = L/\Delta h$, onde $L = Dfb$ é a dimensão da parte da tela, na qual são observadas as faixas de

interferência; donde:

$$D = \frac{Nabf\lambda}{adf + abN\lambda + bfN\lambda} \approx 15 \text{ cm.}$$

O maior número possível de faixas obtém-se da condição: (neste caso $D \rightarrow \infty$): e consequentemente:

$$N_{\max} = \frac{adf}{b\lambda + ab\lambda} \approx 5.$$

O número de faixas obtido é finito, uma vez que, à medida que distanciarmos a tela simultaneamente com o aumento das dimensões da parte da tela, na qual surge o quadro de interferência, aumenta a distância entre as faixas.

813. A distância entre as faixas de interferência não dependerá da posição da tela somente no caso, em que a lente estiver bi-eli-

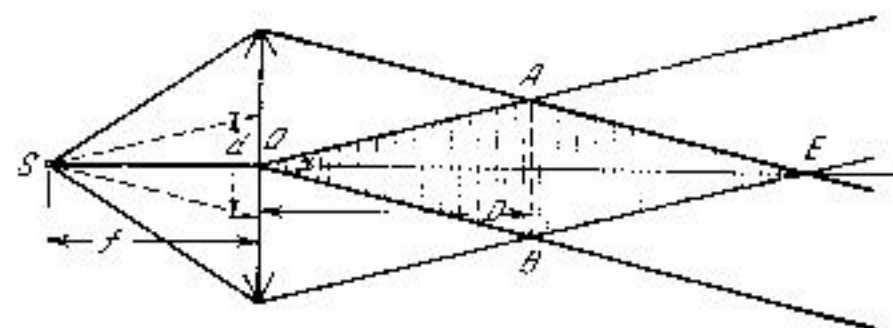


Fig. 556

zela; no p. foc. da lente. Isto é deduzido diretamente da expressão:

$$\Delta h = \frac{\lambda}{ad} (Df + Da + Af),$$

que foi obtida na solução do problema 812. Se $a = f$, então $N \approx 2f/\lambda = 10^3$ cm para qualquer D .

O traçado dos raios, para o caso dado, está representado na Fig. 556. Como vemos, o número de faixas de interferência será o máximo possível, quando a tela encontra-se na posição (D). A distância da tela até a lente, podemos determinar do triângulo SAH , considerando, que o ângulo $\alpha \approx d/f$ e $AB = R/D$ $\Rightarrow R/d = 2$ m.

814. Dentro do vidro o comprimento da onda luminosa diminui em n vezes, uma vez que a frequência não varia, e a velocidade diminui em n vezes. Em consequência disto, entre as ondas coerentes nos feixes surge uma diferença de marcha complementar. Na distância d_1 , no feixe superior, cabem $k_1 = d_1 n/\lambda$ comprimentos de ondas e no feixe inferior, na mesma distância, cabem $k_2 = d_2 n/\lambda + (d_1 - d_2)/\lambda$ comprimentos de ondas. As ondas luminosas em qualquer ponto da tela ficarão deslocadas complementarmente, uma em relação à outra, em $k_1 - k_2$ comprimentos de ondas. Em consequência disto, todo o quadro de interferência move-se para cima em $k_1 - k_2 = \frac{d_1 - d_2}{\lambda} (n - 1) \approx 100$ fai-

xas. O processo do deslocamento pode ser observado no instante de introdução das lâminas. Depois que as lâminas foram colocadas, o quadro de interferência na tela terá a mesma forma anterior.

815. A espessura da lente é muito grande. A interferência ocorre somente no caso de películas finas. A camada de ar, nas proximidades do contato da lente e do vidro, é muito fina.
816. Não, não variará. A diferença de marcha entre as ondas, que se encontram na tela, oriundas das fontes S e S_1 , ou S e S_2 , é muito grande. Nestas condições, os espectros de diferentes ordens, que correspondem ao intervalo espectral da fonte, sobrepõem-se um ao outro, de modo semelhante ao que ocorre na reflexão das ondas do limite de uma película grossa. Se tirarmos a cortina, isto conduzirá somente à superposição no quadro de interferência, das fontes S_1 e S_2 , o que varia monotonicamente a iluminação.
817. Ao observarmos os anéis na luz refletida, a intensidade dos feixes, que se interferem é aproximadamente igual. Ao passar a luz de um feixe, que não sofreu reflexões, a intensidade de um feixe supera sensivelmente a intensidade do segundo feixe, que sofreu duas reflexões. Como resultado, os máximos e mínimos surgem em um fundo de iluminação uniforme, não ocorrerá a extinção total da luz e todo o quadro terá um contraste menor do que no caso da luz refletida.
818. Na ausência do contacto, o raio do quinto anel é determinado pela seguinte equação: $r_5^2/R = 2d = 5\lambda$. Se limpamos o pó, então, o raio deste anel é determinado pela igualdade: $r_5^2/R = 5\lambda$; donde $d = (r_5^2 - r_0^2)/2R = 1,5 \cdot 10^{-4}$ cm.

819.
$$r_h = \sqrt{\frac{k\lambda}{1/R_2 - 1/R_1}}$$

820. A fim de diminuirmos o índice de reflexão, é necessário que os raios 1 e 2 (fig. 557), refletidos pelas superfícies externa e interna

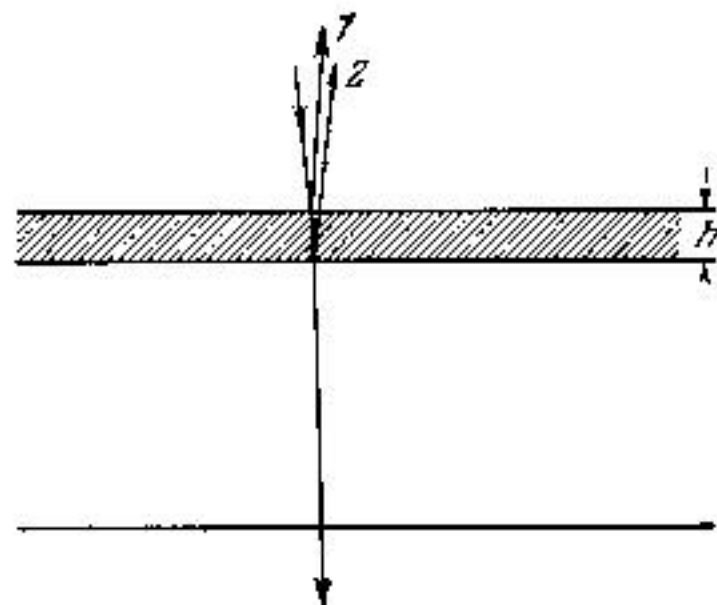


Fig. 557

da película, colocada em um vidro ótico, extinguissem um ao outro. A extinção ocorrerá para as condições:

$$2hn = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$; donde a espessura mínima da película é: $h_{\min} = \lambda/4n$. A condição (1) não é válida para todos os comprimentos de ondas. Por isso, normalmente, é escolhe-se de tal modo, que se extinga a parte média do espectro. A película colocada terá uma espessura que ultrapasse $h_{\min}$ em um número ímpar de vezes, uma vez que as películas grossas são preparadas mais facilmente do que as películas finas (em um quarto do comprimento de onda).

821. Para observação do quadro de interferência, é necessário que o máximo de k -ésima ordem, que corresponde ao comprimento de onda λ , não se sobreponha ao máximo de $(k + 1)$ -ésima ordem, que corresponde ao comprimento de onda $\lambda + \Delta\lambda$, onde $\Delta\lambda = 500 \text{ Å}$. Isto ocorrerá nas condições, em que $(\lambda + \Delta\lambda)k \leq \lambda(k + 1)$; donde $k \leq \lambda/\Delta\lambda$.

A máxima espessura permitida da camada $h_{\max}$, satisfaz à equação $2h_{\max} = (\lambda + \Delta\lambda)k_{\max}$, onde $k_{\max} = \lambda/\Delta\lambda$. Se na qualidade de λ escolhermos um comprimento de onda, que corresponde ao meio da parte visível do espectro ($\lambda = 5000 \text{ Å}$), então, $h_{\max} \approx 1,3 \cdot 10^{-8}$ cm.

Se, no lugar da camada de ar, utilizarmos uma película fina, que tenha um índice de refração n , então, a espessura máxima deverá ser n vezes menor do que na camada de ar.

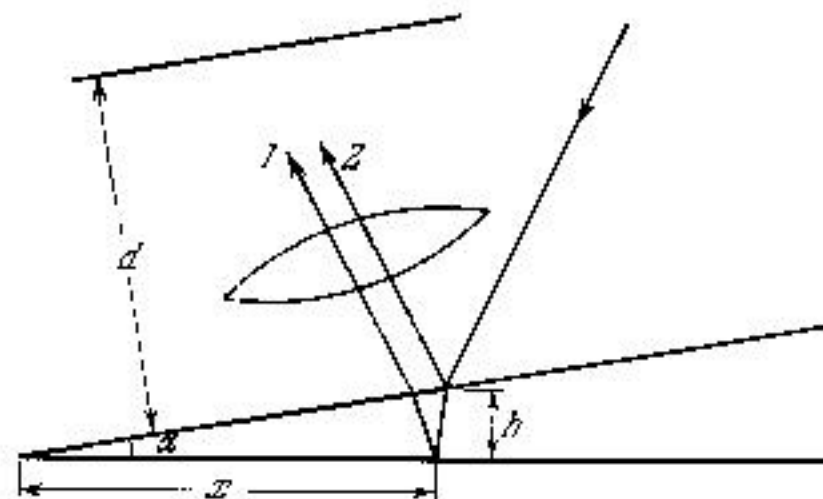


Fig. 558

822. Na interferência dos raios 1 e 2 (fig. 558), refletidos de diferentes faces da cunha, a condição de mínimo é escrita da seguinte forma: $2hn = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2$). Uma vez que o ângulo α é pequeno, então, $h \approx x\alpha$. Consequentemente, a distância entre as faixas de interferência, na própria cunha, será igual a $\Delta x = \lambda/2\alpha n$.

De acordo com a fórmula de aumento da lente $Ax/Al = a/b$, onde a é a distância da tela até a lente e b é a distância da lente até a cunha. Uma vez que $b = d - a$, então, pela fórmula da lente, temos que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{1}{f}.$$

Excluindo destas expressões a e b , determinamos o valor procurado do ângulo α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\pi \Delta l} \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}.$$

Este problema tem duas soluções. Isto está relacionado com o fato, de que uma imagem nítida na tela, estando fixos d e f , pode ser obtida para duas posições da lente.

§ 33. DIFRAÇÃO DA LUZ

823. O raio da primeira zona de Fresnel pode ser determinado dos triângulos ADE e DEB (fig. 559): $r_1^2 = x^2 - (a-x)^2 = (b-x)^2 - x^2$. Uma vez que o comprimento de onda é pequeno, então, $x = b\lambda/2(a+b)$. Consequentemente, $r_1^2 = 2ax - x^2$. Desprezando x^2 , por ser uma grandeza pequena, obtemos, finalmente, que: $r_1 = \sqrt{ab\lambda/(a+b)}$. De um modo

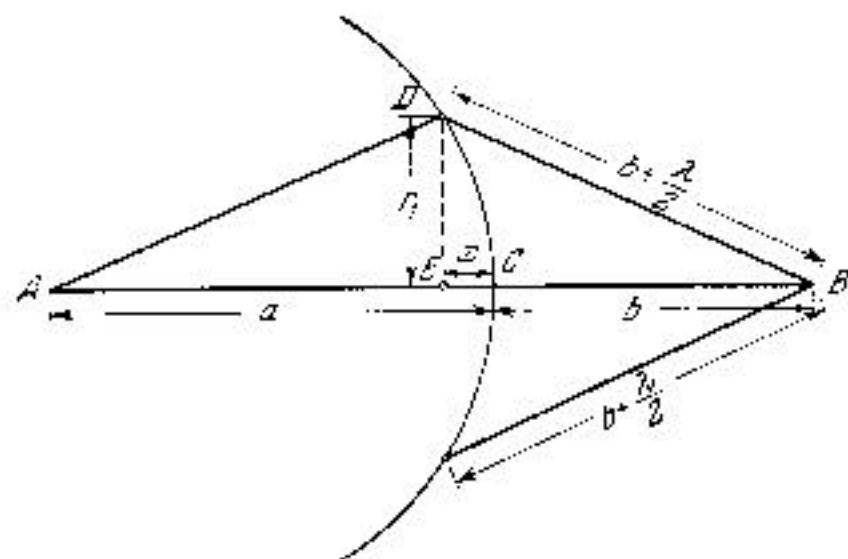


Fig. 559

análogo, podemos determinar os raios das zonas seguintes de Fresnel. Para a zona número k , teremos que:

$$r_k = \sqrt{abk\lambda/(a+b)}.$$

824. A uma onda plana corresponde uma distância da fonte pontual até a frente de onda, i.e., $a \rightarrow \infty$. Os raios procurados das zonas serão:

$$r_k = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{abk\lambda/(a+b)} = \sqrt{kb\lambda},$$

(ver a solução do problema 823).

825. Para a solução do problema é necessário calcular o número k de zonas de Fresnel, que cabem nas aberturas de diâmetros D e D_1 . Utilizando os resultados do problema 823, teremos que $\sqrt{abk\lambda/(a+b)} = D/2$, donde determinamos, facilmente, que $k = 8$ (número ímpar). Sendo o diâmetro da abertura igual a 5,2 mm, na mesma cabem, aproximadamente, 4 zonas (número par). Deste modo, o aumento da abertura conduz à diminuição da iluminação no ponto B.
826. A mancha escura no eixo do feixe, ao estarem abertas as 4 zonas de Fresnel, está circundada por anéis claros e escuros. A iluminação resultante da tela, ao aumentarmos a abertura, aumenta, mas a distribuição da energia luminosa pela tela varia de tal modo, que no centro será mínima.
827. A iluminação procurada será máxima no caso, em que no diafragma caiba uma zona de Fresnel. Considerando a solução do problema 824, teremos que $D/2 = \sqrt{kb\lambda} = 0,2$ cm.
828. A difração será perceptível, se na abertura caber um número não muito grande de zonas de Fresnel, i.e., o raio da abertura será da mesma ordem (ou menor), que o raio da primeira zona de Fresnel:

$$\sqrt{ab\lambda/(a+b)} \approx R,$$

onde R é o raio da abertura. Para $a = l$, teremos $bl \gg 2R^2$.

829. Na fig. 560 estão construídas as zonas de Fresnel, que permitem determinar a intensidade da luz no ponto B. A iluminação no

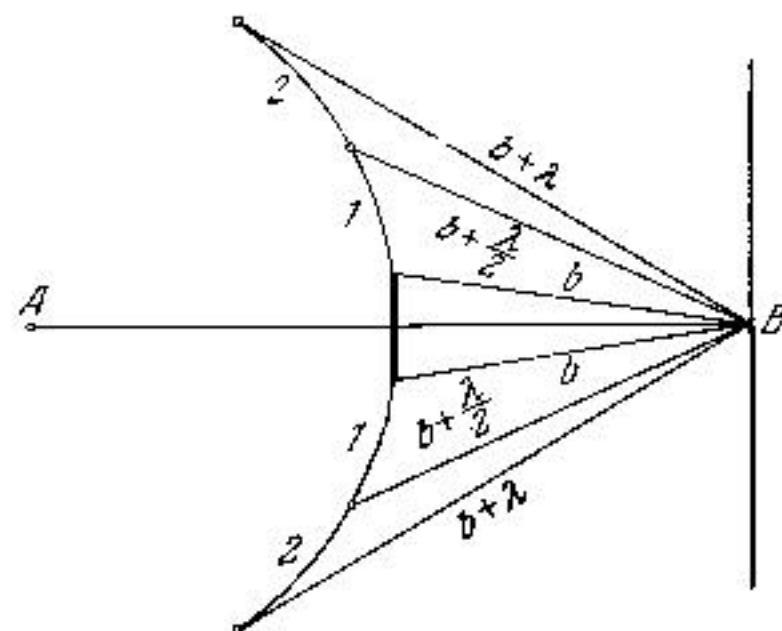


Fig. 560

ponto B é criada pela primeira e seguintes zonas de Fresnel. Se as dimensões da tela não ultrapassarem sensivelmente o raio da primeira zona central, determinado pela fórmula do problema 823, então, no ponto B obrigatoriamente surge uma mancha luminosa com iluminação que pouco difere da iluminação, que existiria na ausência da tela.

830. Aproximadamente 3 m.

831. As zonas de Fresnel, no caso dado, são mais convenientes de serem escolhidas em formas de faixas, paralelas às bordas da abertura estreita. Na direção φ será observado um mínimo no caso,

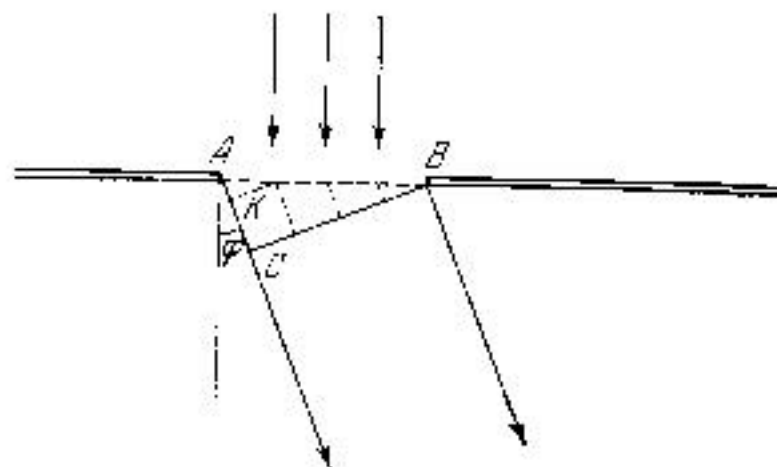


Fig. 561

em que na abertura AB (fig. 561) caiba um número par de zonas. (Na fig. 561 estão representadas 4 zonas de Fresnel). $k = 2k\pi$, onde r é a largura da zona de Fresnel, $k = 1, 2, 3, \dots$. AK é a diferença de marcha entre os raios extremos, enviados por uma zona:

$$AK = r \sin \varphi = \lambda/2,$$

donde $r = \lambda/2 \sin \varphi$, consequentemente, na direção φ será observado um mínimo, se $k \sin \varphi = k\lambda$.

832. Os raios de uma lente pontual distante, que incidem no orifício da câmara, são aproximadamente, paralelos. Se não ocorresse a difração, as dimensões da mancha luminosa seriam iguais a $AB = 2r$ (fig. 562). Em consequência da difração, as dimensões da mancha aumentam até DC . A distância OC é determinada pelo ângulo φ , o qual dá a direção para o primeiro mínimo (anel escuro). Conforme as indicações, temos: $2r \sin \varphi \approx \lambda$. Consequentemente, o raio da mancha é:

$$OC = r + \Delta OC \quad r = d \sin \varphi \approx r + d\lambda/2r.$$

Esta grandeza atinge um mínimo para $r = \lambda d/2r$. As dimensões ideais do orifício são $r = \sqrt{\lambda d/2}$.

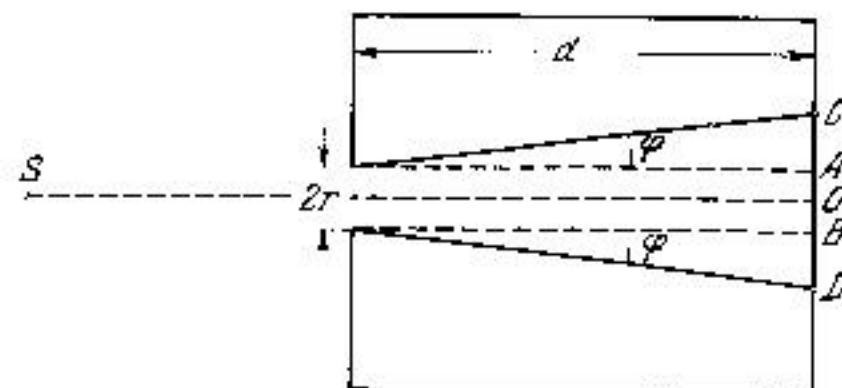


Fig. 562

13. Os ângulos, que determinam as direções para os máximos de segunda e terceira ordem, satisfazem as equações:

$$d \sin \varphi_2 = 2\lambda$$

$$d \sin \varphi_3 = 3\lambda$$

donde:

$$\lambda = d (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2) = 2d \cos \frac{(\varphi_2 + \varphi_3)}{2} \sin \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)}{2}$$

$$\lambda \sin \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)}{2} \approx d (\varphi_3 - \varphi_2) = d\alpha \approx 1,7 \times 10^{-5} \text{ cm.}$$

14. $\sin \varphi = 1$ corresponde ao máximo k ; consequentemente, $k = d/\lambda = 4$.

15. A fim de obtermos um espectro de primeira ordem, é necessário satisfazer a condição $d \gg \lambda$. Consequentemente, o período procurado da rede não pode ser menor do que 0,02 cm.

16. A direção para o primeiro máximo é determinada pela expressão $d \sin \varphi = \lambda$. A tela está localizada no plano focal da lente. Considerando o ângulo φ pequeno, teremos: $l = f\varphi$, donde: $\lambda = f \cdot d/f = 5,10^{-5} \text{ cm.}$

17. Na água, o comprimento de todas as ondas diminui em n vezes (n é o índice de refração da água). Consequentemente, os ângulos φ , que determinam as direções para os máximos, e as distâncias do centro do quadro de difração até os máximos correspondentes a diferentes comprimentos de ondas, também diminuem em n vezes, uma vez que, pelas condições do problema, os ângulos φ são pequenos e $\sin \varphi \approx \varphi$.

18. Os espectros de diferentes ordens tangenciar-se-ão, nas condições, em que $k\lambda_2 = (k-1)\lambda_1$, donde $k = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) = 5$. Consequentemente, poderão sobrepor-se somente os espectros de sexta e sétima ordem. Mas a rede dada (ver o problema 834), pode dar para o intervalo de comprimentos de ondas dado, somente espectros de quarta ordem. Por isso, os espectros, em nosso caso, não sobrepor-se-ão.

839. Ao serem inclinados os raios incidentes na rede em um ângulo θ (fig. 563), a diferença de marcha, entre as ondas, dos extremos vizinhos da abertura, será igual a:

$$\delta = BD = AC = d \sin \varphi - d \sin \theta.$$

Estas ondas, somando, reforçam uma à outra, quando

$$d (\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda,$$

onde $k = 1, 2, 3, \dots$ para os máximos, localizados à direita do máximo central ($k = 0$); e $k = -1, -2, -3, \dots$ para os máximos, localizados à esquerda do máximo central. Teremos um espectro de maior ordem para $\varphi = 90^\circ$. Então, $d (-1 - 1/2) = k\lambda$; donde $k = -6$. Podemos observar um espectro de sexta ordem. O sinal negativo indica, que o espectro localiza-se à esquerda do central.

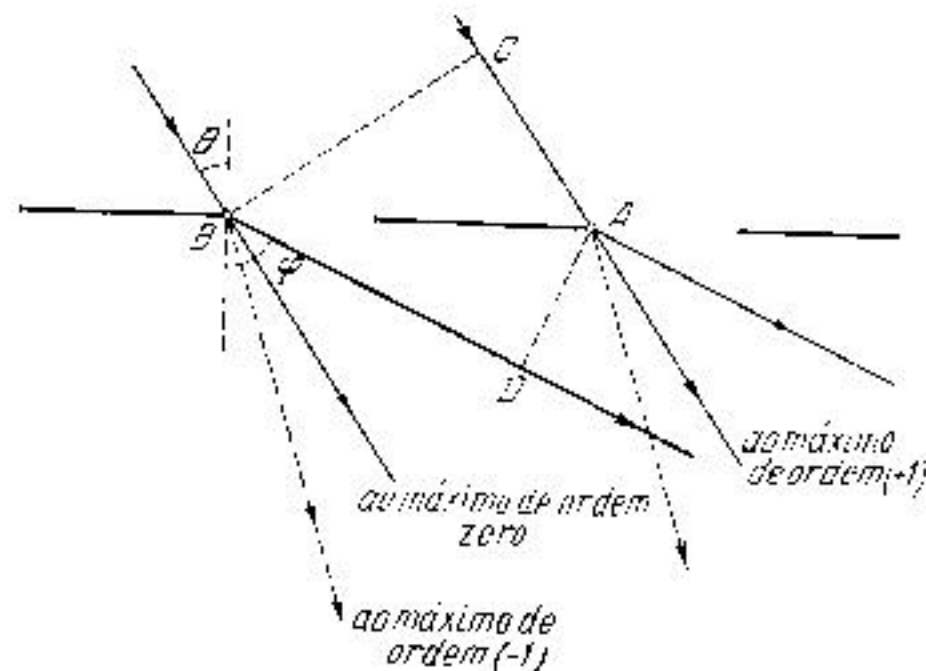


Fig. 563

840. Como deduzimos da fórmula: $d (\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda$, (ver a solução do problema 839), o valor mínimo do período da rede teremos na incidência inclinada dos raios: $\theta = 90^\circ$. Neste caso, $d \approx \lambda/2$ e, consequentemente, o período da rede deverá satisfazer a desigualdade $d \geq \lambda/2$.
841. No caso geral, como foi demonstrado na solução do problema 839, a condição procurada tem a seguinte forma:

$$d (\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda.$$

A mesma pode ser escrita do seguinte modo:

$$2d \cos \frac{\varphi + \theta}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2} = k\lambda.$$

Se $d \approx \lambda/2$, então, $\varphi \approx \theta$ e, neste caso, temos que:

$$\cos \frac{\varphi + \theta}{2} \approx \cos \theta, \quad \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \approx \frac{\varphi - \theta}{2}.$$

Consequentemente, a condição que determina as direções para os máximos principais, terá a seguinte forma:

$$(d \cos \theta) (\varphi - \theta) \approx k\lambda.$$

A constante da rede varia, como se tivesse diminuído e se tornasse igual a $(d \cos \theta)$ em lugar de d . Os ângulos $(\varphi - \theta)$ são medidos desde a direção da luz incidente.

§ 34. DISPERSÃO DA LUZ E CORES DOS CORPOS

842. Como foi demonstrado no problema 730, o ângulo de incidência α , o ângulo de refração do prisma β e o índice de refração n estão relacionados com o ângulo φ , com o qual o raio sai do prisma, pela expressão:

$$n = \sin \beta \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \varphi} - \cot \varphi \right)^2 + 1}.$$

donde, para $\sin \beta$, obtemos a seguinte equação:

$$\sin^2 \beta (1 - \cot^2 \varphi) = 2 \sin^2 \beta \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \sin \varphi} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} + n^2 \sin^2 \varphi.$$

ou para valores dados de α e φ :

$$2 \sin^2 \beta - (1 + 2 \sin^2 \beta) \frac{1}{2} = n^2 \sin^2 \varphi.$$

Resolvendo esta equação, obtemos que:

$$\sin \beta = \frac{1 \pm \sqrt{4n^2 - 1}}{2 \sqrt{2}}.$$

Somente a solução positiva tem sentido físico. Para os raios vermelhos $\sin \beta_{\text{ver}} \approx 0,23$, consequentemente, $\beta_{\text{ver}} \approx 13'6''$. Para os raios violetas $\sin \beta_{\text{viol}} \approx 0,21$ e $\beta_{\text{viol}} \approx 12'0''$. O ângulo procurado é $\theta = \beta_{\text{viol}} - \beta_{\text{ver}} \approx 3'$.

843. Para os raios vermelhos, a distância focal da lente é igual a $f_{\text{ver}} = R/2$ ($n_{\text{ver}} = 1$) ≈ 27 cm; para os raios violetas é igual a $f_{\text{viol}} = 25$ cm. Pela fórmula da lente, a imagem formada pelos raios vermelhos, localiza-se à uma distância $b_{\text{ver}} = a/f_{\text{ver}}(a - f_{\text{ver}}) = 58,7$ cm; pelos raios violetas, a uma distância $b_{\text{viol}} = 50$ cm. Na tela (fig. 564) a imagem da fonte terá a forma de uma mancha com bordas vermelhas. O diâmetro da mancha d pode ser determinado da semelhança dos triângulos ABE e CDE : $d = D(b_{\text{ver}} - b_{\text{viol}})/b_{\text{ver}} \approx 0,15$ cm.

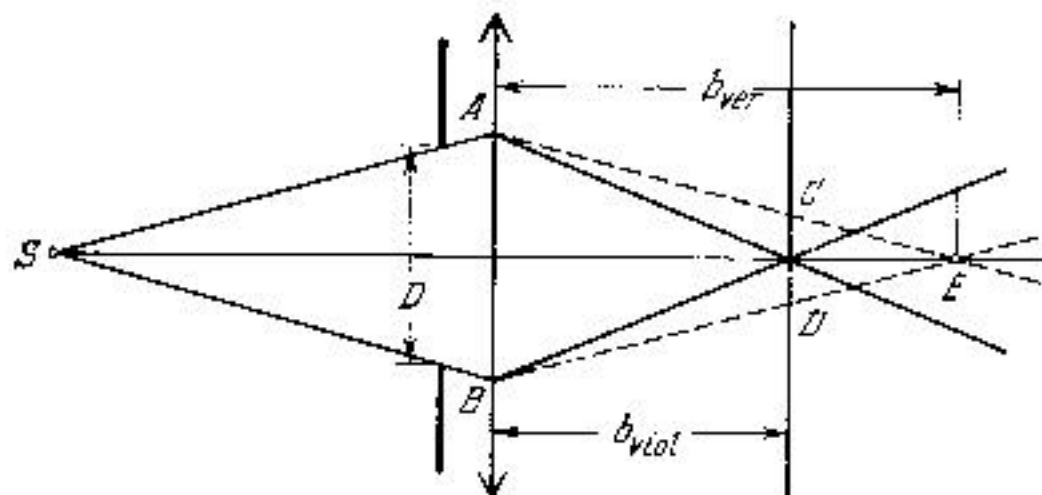


Fig. 564

844. Os raios solares, que incidem em uma gota de chuva, podem ser considerados paralelos. Ao saírem da gota, depois de uma pequena reflexão na superfície interna da mesma, os raios seguem todas as direções. Somente os raios, que sofrem um menor desvio, continuam, aproximadamente, paralelos. É precisamente por isso, que estes raios, atingindo os olhos, provocam uma maior sensação visual. Estes raios possuem, falando em sentido figurado, uma maior "densidade". Os demais raios dispersam-se para todos os lados. Para os raios paralelos, o ângulo de desvio, como foi demonstrado no problema 783, é igual a 138° . Consequentemente, o ângulo entre os raios incidentes do sol e a direção do arco-íris é igual a 42° (para a luz vermelha) (fig. 565).

Os olhos são atingidos pela luz das gotas, que encontram em uma direção que forma um ângulo de 42° com a linha tracada desde os olhos até o sol. Para os raios violetas este ângulo é aproximadamente igual a 50° .

845. O primeiro (fundamental) arco-íris observa-se graças aos raios que sofrem uma reflexão dentro das gotas de água. Na refração, os raios violetas deslocam-se mais sensivelmente em relação à direção inicial (ver o problema 782) ($\angle \theta$ aumenta com o aumento de n , uma vez que r diminui). Por isso, o arco-íris externo

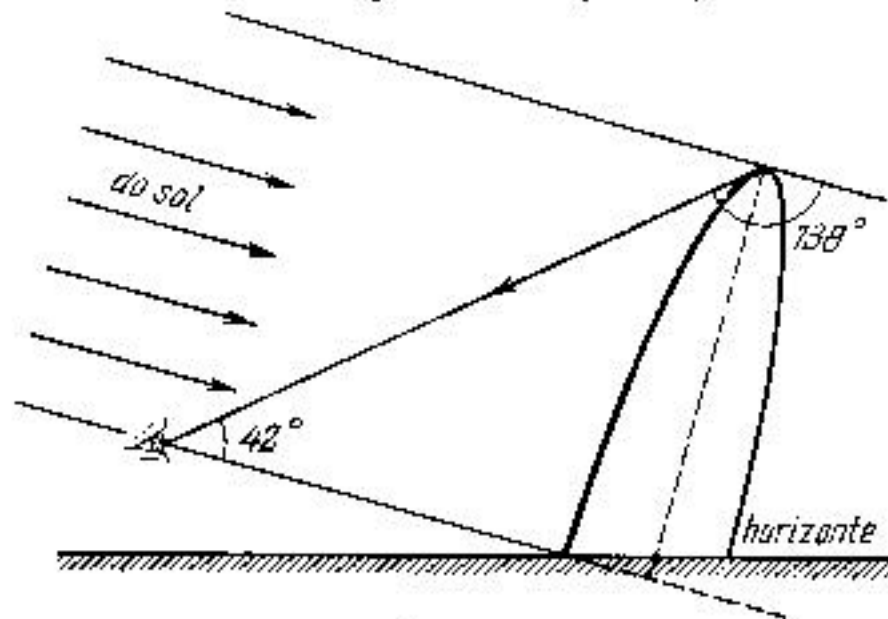


Fig. 565

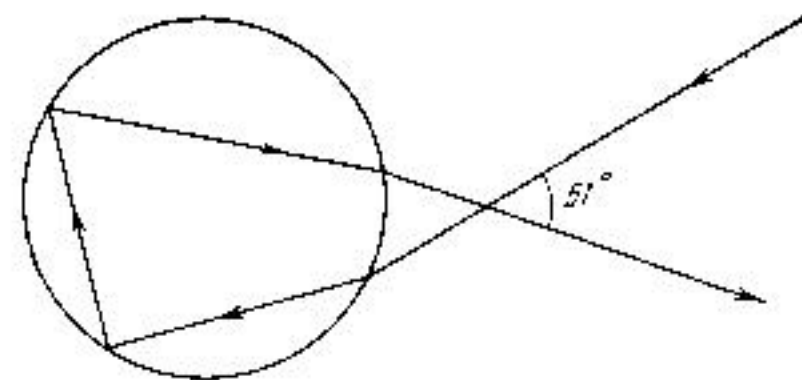


Fig. 566

será vermelho e o interno será violeta. O segundo arco-íris é provocado pelos raios que sofrem duas reflexões dentro das gotas. O trajeto aproximado do raio, está representado na fig. 566. A direção até o arco-íris forma um ângulo de 51° com a linha que une os olhos e o sol, como podemos demonstrar. A sequência de cores para duas refrações e duas reflexões é obtida inversamente: o arco-íris externo será violeta e o interno será vermelho. Depois de duas reflexões, a intensidade da luz tornar-se á bastante débil, como consequência disto, o segundo arco-íris será muito menos intenso do que o primeiro.

846. A latitude geográfica de Moscou, isto é, o ângulo entre o plano do equador e a normal à superfície do globo terrestre, é igual a $\varphi = 56^\circ$. O sol, neste momento, encontra-se no zênite sobre o Trópico norte (latitude $\alpha = 23,5^\circ$). Consequentemente, o ângulo entre a direção para o sol e o horizonte (fig. 567) é igual a:

$$\beta = 90^\circ - \varphi - \alpha = 57^\circ 30'.$$

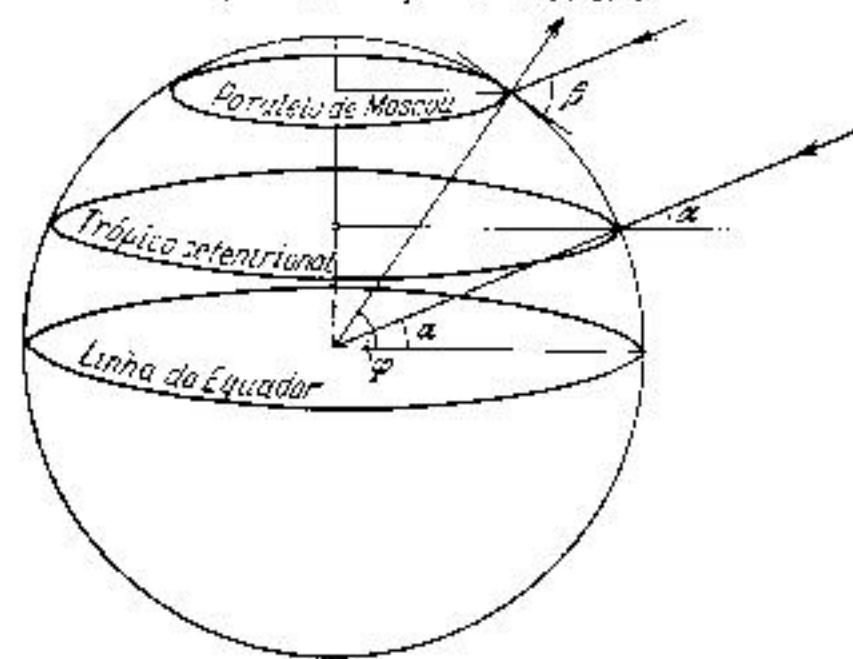


Fig. 567

- o arco-íris será visto somente no caso, em que a altura do sol sobre o horizonte, não ultrapasse 42° (ver a figura 565). Consequentemente, ver o arco-íris no tempo indicado não será possível.
847. Nossos olhos recebem a sensação de uma ou outra cor, quando suas partes sensíveis são excitadas pelas ondas luminosas de uma determinada frequência. A frequência das ondas luminosas não variará ao passar de um meio a outro.
848. É necessário olhar através de um vidro verde. Neste caso, a escritura será vista em uma cor preta no fundo verde do papel; uma vez que o vidro verde não permite a passagem da cor vermelha da palavra atômica. Ao olharmos, através de um vidro vermelho, a escritura vermelha não será vista no fundo vermelho do papel.
849. A objetiva reflete primeiramente as partes extremas do espectro visível: vermelha e violeta (ver o problema 820). Da combinação destas cores surge a tonalidade lilás.
850. As cores do arco-íris são cores espectrais púrpuras (ver o problema 844), uma vez que, na direção dada, é visto somente o raio de um determinado comprimento de onda. As cores de películas finas, ao inverso, são obtidas, graças à extinção total ou parcial dos raios de um certo intervalo espectral, como resultado da interferência. A cor da película será um complemento à cor deste intervalo espectral.
851. Sob ação da força de gravidade, a água do sabão flui para a parte inferior da película, que é sempre mais grossa do que a superior. Consequentemente, as faixas que indicam o lugar geométrico dos pontos de uma mesma espessura, deverão estar em uma posição horizontal. A tonalidade azul (verde-azulado) é obtida pela exclusão do espectro total da parte de ondas longas (vermelho-laranja) (ver o problema 850). Ao extinguir-se a parte média do espectro (verde), os raios que permanecem, dão à película uma tonalidade púrpura (fambesca) e ao tirarmos do espectro continue a parte de ondas curtas (azul-violeta), a película terá uma tonalidade amarela. Se a diferença de marcha dos raios que se extinguem mutuamente é constituída pelo mesmo número de semiondas nos três casos então, em cima deverá existir uma faixa amarelada, a seguir — púrpura e embaixo, azul.
852. A luz azulada, dispersa à tarde pelo céu, soma-se a luz amarelada da própria lua. Esta combinação de cores é tida pelos olhos como uma cor branca. Depois do pôr do sol, a luz azul do céu enfraquece e a lua adquire uma tonalidade amarelada.
853. Nós vemos a fumaça em um fundo escuro, porque a mesma dispersa os raios azules incidentes em ela. As partículas de fumaça dispersam muito mais a luz azul do que a vermelha e amarela. Por isso, a cor da fumaça parece ser azul. No fundo do céu claro a fumaça é vista na luz que passa. A fumaça parece ser amarelada, uma vez que a luz azul é dispersa para todos os lados e somente a parte de ondas longas do espectro da luz branca atinge o olho.
854. Uma camada fina de água, que envolve um objeto húmido, reflete a luz branca incidente para uma direção determinada. A superfície do objeto já não dispersa a luz branca para todos os lados e a sua própria cor torna-se dominante. A luz dispersa não se combina com a refletida do objeto, por isso, a cor parece ser mais saturada.